

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ SIR-МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ КОРОНАВИРУСА

© 2020 г. Н. А. Кудряшов^{1,*}, М. А. Чмыхов¹

¹ Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

*e-mail: nakudryashov@mephi.ru

Поступила в редакцию 15.07.2020 г.

После доработки 31.07.2020 г.

Принята к публикации 06.10.2020 г.

Рассмотрена популярная математическая модель, известная как SIR-model (susceptible – infectives – recovered), для описания распространения коронавируса. Показано, что, используя два первых интеграла исходной нелинейной системы трех дифференциальных уравнений, ее можно преобразовать к одному автономному дифференциальному уравнению первого порядка с разделяющимися переменными и двум алгебраическим уравнениям для вычисления количества инфицированных и выздоровевших людей от коронавируса. Особенностью редуцированной математической модели является то, что она является однопараметрической и поведение ее решений определяется одним безразмерным параметром $\delta = \beta/(\alpha N)$, зависящим от коэффициента передачи инфекции α , от коэффициента выздоровления β и от количества контактного сообщества N . Демонстрируется, что общее решение SIR-модели может быть представлено в виде квадратуры. Исследуется влияние безразмерного параметра δ и влияние количества инфицированных людей в начальный момент времени на характеристики, описывающие распространение коронавируса. Даны асимптотические зависимости количества $S(t)$, $I(t)$ и $R(t)$ в зависимости от начального количества инфицированных людей μ и безразмерного параметра математической модели δ . Результаты могут быть полезны при анализе распространения COVID-19.

Ключевые слова: коронавирус, SIR-модель, модифицированная математическая модель, нелинейное дифференциальное уравнение, первый интеграл, решение

DOI: 10.1134/S2304487X20050089

1. ВЕДЕНИЕ

Одной из самых популярных математических моделей для описания распространения коронавируса и ряда других инфекций является так называемая SIR-модель (susceptible – infectious – recovered). Ее популярность объясняется достоинствами этой математической модели, к которым, прежде всего, относится простота ее формулировки и ясная ее интерпретация.

Математическая модель описывается системой из трех обыкновенных дифференциальных уравнений и двух самых важных параметров: коэффициентом передачи инфекции от одной группы людей к другой и коэффициентом выздоровления, характеризующим скорость выздоровления инфицированных людей. При этом количество выздоровевших людей и количество умерших в этой математической модели не разделяются.

Таким образом, в математической модели присутствуют только три основные характеристики, зависящие от времени: $S(t)$ – количество

людей, которые могут заболеть в результате контактов с инфицированными больными, $I(t)$ – больные и $R(t)$ – количество выздоровевших людей или умерших.

Система уравнений для описания изменения трех выше указанных характеристик была предложена в 1927 году в работе [1] и в настоящее время, как правило, записывается в виде:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI, \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I, \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta I. \quad (3)$$

Система уравнений (1), (2) и (3) написана на основе разумных предположений и закона сохранения количества людей [2–6]. В частности, при выводе уравнения (2) сделано предположение, что скорость изменения числа инфицированных

людей изменяется из-за контактов здоровой, но склонной к заболеваниям популяции людей $S(t)$ и инфицированных больных $I(t)$, и это изменение характеризуется коэффициентом инфицирования α . Эта скорость уменьшения здоровых людей естественно учитывается в первом уравнении (1).

Кроме того, в уравнении (2) учитывается скорость уменьшения инфицированных людей за счет выздоровления или смерти. Эта скорость предполагается линейно зависящей от количества заболевших людей. В качестве коэффициента пропорциональности используется параметр математической модели β .

Недостатком математической модели (1), (2) и (3) для описания распространения эпидемий является продолжение ее достоинства. Все параметры α , β и N математической модели зависят, вообще говоря от времени и эти зависимости, как правило, заранее не известны.

Очевидно, складывая все три уравнения мы получаем, что выполняется закон сохранения

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0. \quad (4)$$

Из уравнения (4) мы получаем первый интеграл в виде

$$S(t) + I(t) + R(t) = \text{const} = N. \quad (5)$$

Ясно, что в реальной жизни общее количество сообщества N может значительно изменяться и, вообще говоря, число N зависит от соблюдения условий карантина в обществе [7, 8]. Отсюда следует, что SIR-модель может вполне удовлетворительно описывать распространение эпидемий для небольшого количества сообщества N , в котором все субъекты имеют возможность контактировать.

В этой связи то, что применение SIR-модели для описания распространения коронавируса в ряде случаев приводит к совпадению расчетных характеристик с данными наблюдений для авторов является скорее удивительной особенностью математической модели, чем реальным положением дел.

2. БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ДЛЯ SIR-МОДЕЛИ

Использование удачных безразмерных переменных часто существенно помогает при интерпретации результатов решения задачи и помогает понять особенности математической модели, поэтому ниже используем безразмерные переменные в приведенной выше системе уравнений (1), (2) и (3). Безразмерные переменные и параметры в данной работе используем в виде

$$S = \frac{S(t)}{N}, \quad I = \frac{I(t)}{N}, \quad R = \frac{R(t)}{N}, \quad (6)$$

$$\tau = \alpha N t, \quad \delta = \frac{\beta}{\alpha N}.$$

Далее штрихи опускаются, полагая

$$S'(\tau) \rightarrow S(\tau), \quad I'(\tau) \rightarrow I(\tau), \quad R'(\tau) \rightarrow R(\tau). \quad (7)$$

Учитывая новые переменные и параметры система уравнений (1), (2) и (3) запишется в виде

$$\frac{dS}{d\tau} = -SI, \quad (8)$$

$$\frac{dI}{d\tau} = SI - \delta I, \quad (9)$$

$$\frac{dR}{d\tau} = \delta I. \quad (10)$$

Заметим, что после введения безразмерных переменных (6) система дифференциальных уравнений (1), (2) и (3) для описания распространения коронавируса становится однопараметрической и зависит только от одного параметра δ .

3. РЕДУКЦИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (1), (2) И (3) К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Заметим, что в безразмерных переменных (6), первый интеграл (5) принимает вид:

$$S(\tau) + I(\tau) + R(\tau) = 1 \quad (11)$$

и можно видеть, что функции $S(\tau)$, $I(\tau)$ and $R(\tau)$ удовлетворяют следующим неравенствам

$$0 \leq S(\tau) \leq 1, \quad 0 \leq I(\tau) \leq 1, \quad 0 \leq R(\tau) \leq 1. \quad (12)$$

Из уравнения (8) следует

$$I = -\frac{S_\tau}{S}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в уравнение (9) и интегрируя один раз по времени τ , мы получаем обыкновенно дифференциальное уравнение первого порядка в виде

$$S_\tau = C_1 S + S^2 - \delta S \ln(S), \quad (14)$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Решение уравнения (14) можно записать в виде квадратуры

$$\int \frac{dS}{C_1 S + S^2 - \delta S \ln(S)} = \tau + C_2. \quad (15)$$

Неопределенный интеграл (15) не вычисляется точно и решение $S(\tau)$ не удастся выразить через элементарные или специальные функции. Ниже

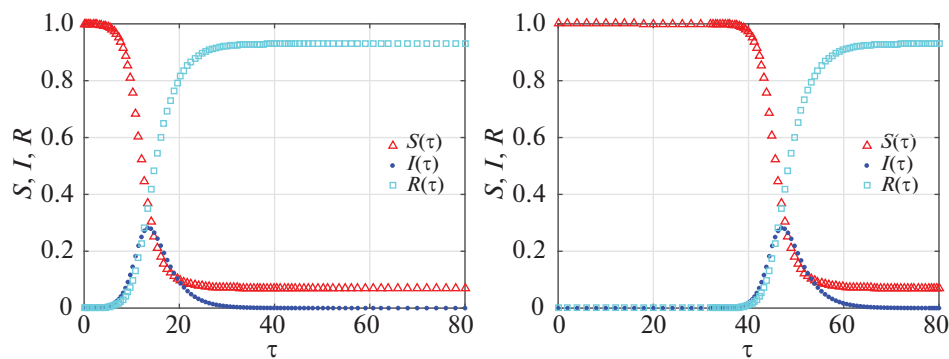


Рис. 1. Зависимость $S(\tau)$, $I(\tau)$, $R(\tau)$ от безразмерного времени τ при $\delta = 0.35$ и $\mu = 0.0003$ (слева), $\mu = 0.3 \times 10^{-12}$ (справа).

мы дадим асимптотические решения уравнения (14). Используя инварианты системы уравнений (8), (9) и (10) в виде:

$$-\frac{dS}{SI} = \frac{dI}{SI - \delta I} = \frac{dR}{\delta I}. \quad (16)$$

дополнительно к дифференциальному уравнению (14) для SIR-модели получаем, что зависимости $I(\tau)$ и $R(\tau)$ находятся по известной функции $S(\tau)$ используя алгебраические формулы [2]

$$I(\tau) = \delta \ln(S) - C_1 - S, \quad (17)$$

и

$$R(\tau) = 1 + C_1 - \delta \ln(S). \quad (18)$$

Используя начальные условия соответствующие SIR-модели, мы можем определить постоянную интегрирования C_1 . Она определяется принимая во внимание начальные условия для функций $S(\tau)$, $I(\tau)$ и $R(\tau)$. Начальные условия естественно определить в виде:

$$R(\tau = 0) = 0, \quad I(\tau = 0) = \mu, \quad S(\tau = 0) = 1 - \mu. \quad (19)$$

Заметим, что начальная доля инфицированных больных μ не может быть равна $\mu = 1$. Это условие соответствует экзотическому случаю при котором $R(\tau) = 0$, $S(\tau) = 0$. Кроме того, доля $\mu \neq 0$. В этом случае больных нет и инфекция не передается к еще не заболевшим. Таким образом, доля μ удовлетворяет неравенству $0 < \mu < 1$. Подставляя (19) в уравнение (18), мы получаем C_1 в виде

$$C_1 = \delta \ln(1 - \mu) - 1. \quad (20)$$

С использованием выражения постоянной C_1 через постоянную начального количества больных μ и параметр математической модели δ нелинейное дифференциальное уравнение для умень-

шения числа незаболевших людей $S(\tau)$ принимает вид:

$$S_\tau = \delta S \ln\left(\frac{1 - \mu}{S}\right) - S(1 - S). \quad (21)$$

Зависимости $I(\tau)$ и $R(\tau)$ с учетом постоянной C_1 находятся по формулам

$$I(\tau) = 1 - S - \delta \ln\left(\frac{1 - \mu}{S}\right) \quad (22)$$

и

$$R(\tau) = \delta \ln\left(\frac{1 - \mu}{S}\right). \quad (23)$$

Дифференциальное уравнение первого порядка (21) и зависимости (22), (23) могут быть использованы для оценки распространения коронавируса. Изучим влияние параметров математической модели μ и δ на поведение зависимостей характеристик коронавируса.

4. ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ δ И μ НА ЗАВИСИМОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК КОРОНАВИРУСА

На рис. 1 и 3 представлены результаты вычисления характеристик при изменении параметров δ и μ модернизированной SIR-модели, описываемой системой (21), (22) и (23) распространения коронавируса. Из рис. 1 видно, что при фиксированном значении параметра $\delta = 0.35$, уменьшение доли инфицированных больных μ приводит к замедлению процесса заболевания. В частности, при $\mu = 0.0003$ наблюдается существенное увеличение инфицированных, которое начинается достаточно быстро и достигает максимума при $\tau = 12$. При $\mu = 0.3 \times 10^{-12}$ максимум заболевших достигается при $\tau = 47.0$. Однако общая картина

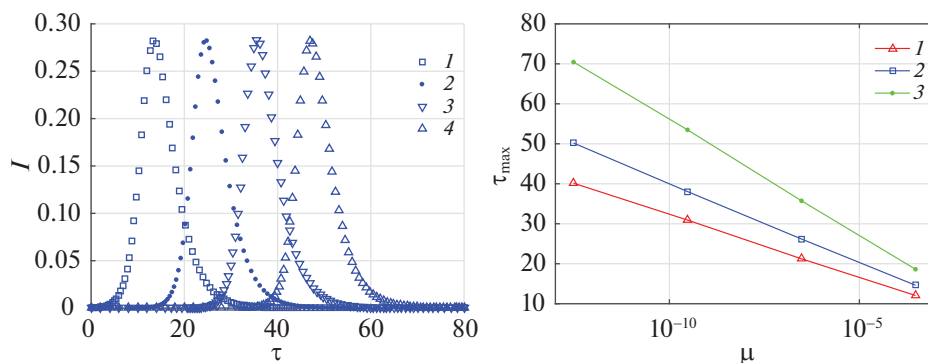


Рис. 2. Зависимость $I(\tau)$ от безразмерного времени τ при $\delta = 0.4$ и $1 - \mu = 0.3 \times 10^{-3}$, $2 - \mu = 0.3 \times 10^{-6}$, $3 - \mu = 0.3 \times 10^{-9}$, $4 - \mu = 0.3 \times 10^{-12}$ (слева). Зависимость положения максимума $I(\tau)$ от μ при $1 - \delta = 0.2$, $2 - \delta = 0.4$, $3 - \delta = 0.6$ (справа).

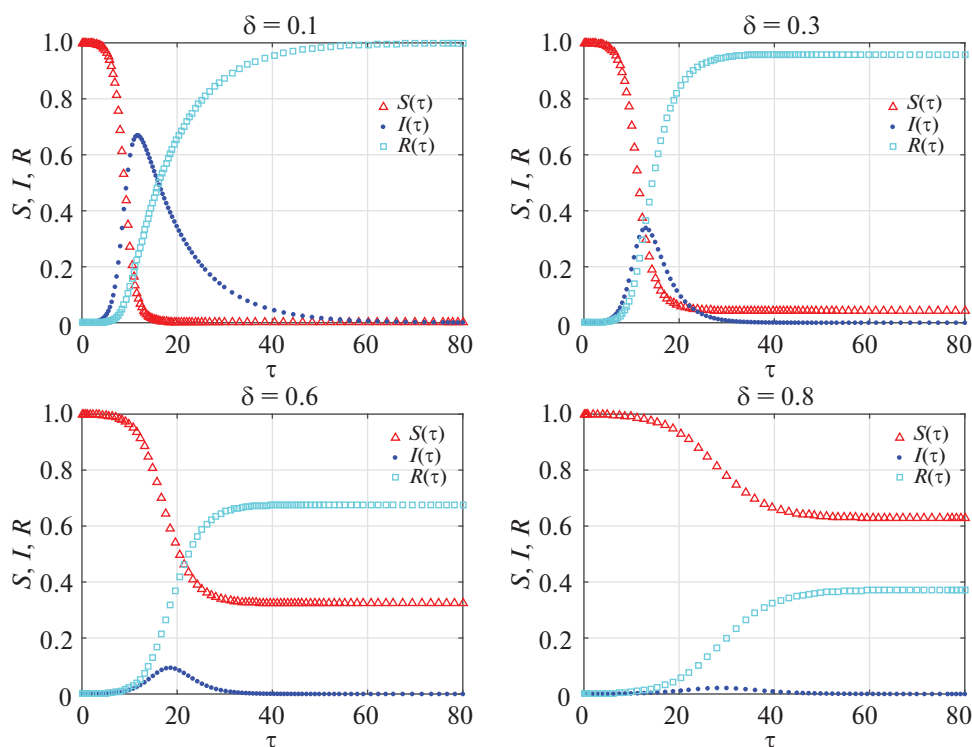


Рис. 3. Зависимость $S(\tau)$, $I(\tau)$, $R(\tau)$ от безразмерного времени τ при $\mu = 0.0003$ и $\delta = 0.1, 0.3, 0.6, 0.8$ (подписано на графиках).

заболеваемости остается неизменной, но смещается на более поздний момент времени (см. рис. 2).

Характеристики распространения коронавируса существенно изменяются при изменении параметра δ , что иллюстрируется на рис. 3. Для иллюстрации влияния параметра δ при распространении коронавируса нами фиксировались значения начальной доли инфицированных

$\mu = 0.0003$ и изменялось значение безразмерного параметра δ .

При вычислениях использованы следующие значения: $\delta = 0.1$; $\delta = 0.2$; $\delta = 0.3$; $\delta = 0.5$; $\delta = 0.6$ и $\delta = 0.8$. Как следует из рисунка, при увеличении параметра δ количество инфицированных больных постоянно уменьшается.

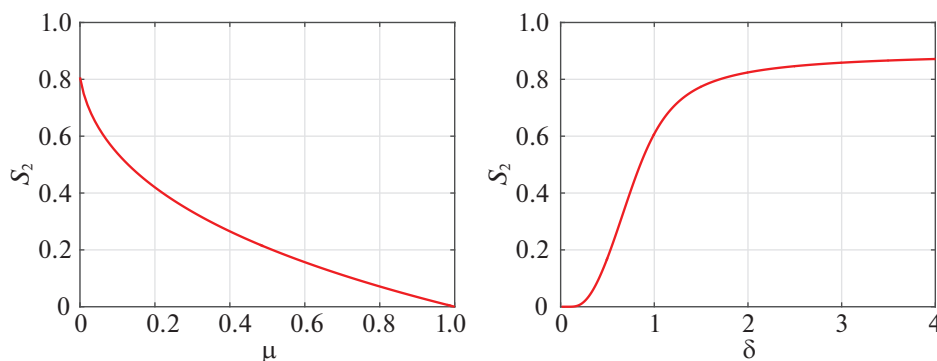


Рис. 4. Зависимость значения S_2 от параметра μ при $\delta = 0.9$ (слева) и параметра δ при фиксированном значении $\mu = 0.1$ (справа).

Это объясняется увеличением коэффициента β , характеризующего выздоровление или под влиянием медицины, или под влиянием иммунной системы. Кроме того, при одном и том же значении коэффициента α и β увеличение значения количества членов контактирующего сообщества N также приводит к увеличению числа инфицированных. Поэтому предпринимаемые меры по уменьшению числа N , что достигается усилением карантина, также положительно влияют на общее количество заболевших при коронавирусе.

Следует отметить, что при больших значениях параметра δ существенно увеличивается количество $S(\tau) \rightarrow \infty$, что соответствует доле сообщества которая могла бы заболеть, но не заболела, что можно наблюдать из рисунка (2) при значении $\delta = 0.9$.

Полагая $\frac{dS}{d\tau} = 0$ в уравнении (21), мы находим две стационарные точки, которые являются корнями правой части уравнения. Один из корней равен $S = S_1 = 0$ соответствует отсутствию тех, кто может заболеть. Второй корень уравнения равен

$$S_2 = (1 - \mu) \exp \left\{ -\frac{1}{\delta} - W \left[\frac{(\mu - 1)}{\delta} \exp \left(-\frac{1}{\delta} \right) \right] \right\}, \quad (24)$$

где $W(x)$ — функция Ламберта. Значение S_2 соответствует доле стационарного количества не заболевших после пандемии. Естественно, что величина $1 - S_2$ соответствует доле выздоровевших и умерших людей в результате пандемии. Как следует из формулы (24), это значение зависит от доли инфицированных людей в начальный момент времени μ и от безразмерного значения коэффициента δ .

На рис. 4 представлены зависимости значений корня S_2 от параметра μ при фиксированном значении $\delta = 0.9$ (рисунок слева) и от параметра δ

при фиксированном значении параметра $\mu = 0.1$ (рисунок справа).

Дифференциальное уравнение (21) не имеет общего решения в общем случае. Однако оно имеет асимптотическое решение при $S(t) \sim 1$. В этом случае в этом уравнении можно использовать приближение для логарифмической функции в виде $\ln S(t) = S(t) - 1$. Уравнение (21) принимает вид

$$S_\tau = BS^2 - AS, \quad A = 1 - \delta - \delta \ln(1 - \mu), \quad B = 1 - \delta. \quad (25)$$

Общее решение уравнения (25) хорошо известно [9–11]

$$S(\tau) = \frac{A}{B + AC_3 \exp\{A\tau\}}, \quad (26)$$

где C_3 — постоянная интегрирования. Однако решение (26), как указано выше, справедливо лишь при $S(\tau) \sim 1$. Кроме того, постоянная C_3 должна соответствовать начальному условию.

Используя (26), можно написать формулу для оценки уменьшения количества здоровой популяции из-за пандемии в виде обобщенной приближенной формулы, построенной на основе формул (24) и (26):

$$S(\tau) \cong S_2 + \frac{(1 - S_2)A}{B + AC_3 \exp\{A\tau\}}, \quad A = 1 - \delta - \delta \ln(1 - \mu), \quad B = 1 - \delta, \quad S_2 = (1 - \mu) \times \exp \left\{ -\frac{1}{\delta} - W \left[\frac{(\mu - 1)}{\delta} \exp \left(-\frac{1}{\delta} \right) \right] \right\}. \quad (27)$$

Формула (27) учитывает сращивание двух асимптотических решений (24) и (26). Постоянная C_3 находится из начального условия $S(\tau = 0) = 1 - \mu$.

$$C_3 = \delta - 1 + \frac{(1 - S_2)(1 - \delta - \delta \ln(1 - \mu))}{1 - \mu - S_2}. \quad (28)$$

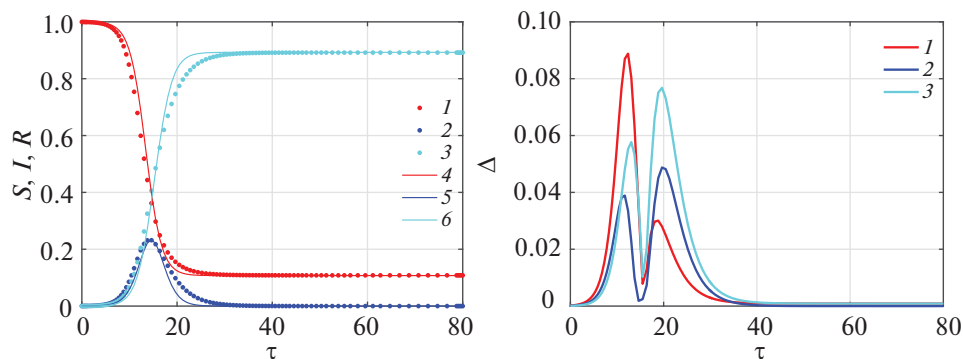


Рис. 5. Зависимость численного решения $I - S(\tau)$, $2 - I(\tau)$, $3 - R(\tau)$ и приближенных решений полученных по формулам (27), (22), (23) от безразмерного времени τ при $\delta = 0.4$ и $\mu = 0.3 \times 10^{-3}$ (слева). Зависимость погрешности приближенного решения от безразмерного времени τ для $I - S$, $2 - I$, $3 - R$ (справа).

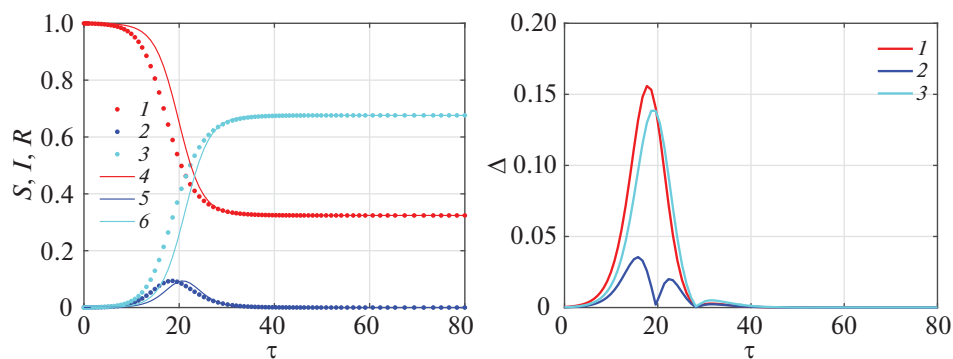


Рис. 6. Зависимость численного решения $I - S(\tau)$, $2 - I(\tau)$, $3 - R(\tau)$ и приближенных решений полученных по формулам (27), (22), (23) от безразмерного времени τ при $\delta = 0.6$ и $\mu = 0.3 \times 10^{-3}$ (слева). Зависимость погрешности приближенного решения от безразмерного времени τ для $I - S$, $2 - I$, $3 - R$ (справа).

Приближенное решение (27) использовано для вычисления $I(\tau)$ и $R(\tau)$ по формулам (22) и (23). Как следует из сравнения приближенных формул с численными решениями, аналитические выражения дают хорошее приближение для SIR-модели (см. рис. 5 и 6) при описании распространения коронавируса для некоторых значений параметров математической модели.

БЛАГОДАРНОСТИ

Эта работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 18-29-10025) и государственным заданием министерства высшей школы и науки Российской Федерации № 0723-2020-0036.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kermack W.O., McKendrick A.G. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1927. V. 115. P. 700–721.
2. Kudryashov N.A., Chmykhov M.A., Vigdorowitsch M.V. Analytical features of the SIR model and their application to COVID-19 // Applied Mathematical Modeling. 2021. V. 90. P. 466–473.
3. Chladni Z., Kopfov J., Rachinskii D., Rouf S.C. Global dynamics of SIR model with switched transmission rate // J. Math. Biol. 2020. V. 80. P. 1209–1233. <https://doi.org/10.1007/s00285-019-01460-2>
4. Barlow N.S., Weinstein S.J. Accurate closed-form solution of the SIR epidemic model // Physica D. 2020. V. 408. P. 132540. www.doi.org/10.1016/j.physd.2020.132540
5. Harko T., Lobo F.S.N., Mak M.K. Exact analytical solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates // Applied Mathematics and Computation. 2014. V. 236. P. 184–194. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.03.030>
6. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., Knuth D.E. On the Lambert W Function // Advances in Computational Mathematics. 1996. V. 5. P. 329–359.

7. a) COVID-19 Data Repository by the Center for Systems Science and Engineering (CSSE) at Johns Hopkins University, 2020. [Online]. Available: <https://github.com/CSSEGISandData/COVID-19>, folder COVID-19/csse-covid-19-data/csse-covid-19-time-series/. [Accessed: 22-May-2020]; b) Dong E., Du H., Gardner L. An interactive web-based dashboard to track COVID-19 in real time. *Lancet Inf Dis.* 20(5): 533–534. [https://doi.org/10.1016/S1473-3099\(20\)30120-1](https://doi.org/10.1016/S1473-3099(20)30120-1).
8. CORONAVIRUS today Monitoring the spread of COVID-19 in the world, 2020. [Online]. Available: <https://xn-7sbgffetn1ahcahtfb7a0v.xn-p1ai/>. [Accessed: 29-May-2020] (in Russian).
9. Kudryashov N.A. One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2012. P. 2248–2253.
10. Kudryashov N.A. Polynomials in logistics function and solitary waves of nonlinear differential equations // *Appl. Math. Comput.* 2013. P. 9245–9253.
11. Kudryashov N.A. Logistic function as solution of many nonlinear differential equations // *Appl. Math. Model.* 2015. V. 18. P. 5733–5742.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 5, pp. 404–411

Approximate Solutions of the SIR-Model for Describing the Coronavirus

N. A. Kudryashov^{a, #} and M.A. Chmykhov^a

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: nakudryashov@mephi.ru

Received July 15, 2020; revised July 31, 2020; accepted October 6, 2020

Abstract—A popular mathematical susceptible–infectious–recovered (SIR) model is used to describe the spread of the coronavirus. It is shown that using the first two integrals of the nonlinear system of three differential equations transforms it to one autonomous first-order differential equation with separable variables and two algebraic equations for calculating infected and recovered people with coronavirus. A feature of the reduced differential equation is that it is one-parameter model and its behavior is determined by a dimensionless parameter $\delta = \beta/(\alpha N)$ depending on the transmission coefficient α , on the coefficient for the characterization of recovery β , and on the amount of contacting community N . It is demonstrated that the general solution of the SIR model can be represented in the form of quadrature. The influence of the dimensionless parameter δ and the influence of the infected patients on the characteristics describing the spread of coronavirus are investigated. Asymptotic dependences are given for the number of people that can become ill after contacts with infected people $S(t)$, the number of ill peoples $I(t)$, and the number of recovered and dead peoples $R(t)$ depending on the initial number of infected people and the dimensionless parameter of the mathematical model. The results can be useful for considering the spread of COVID-19.

Keywords: coronavirus, SIR-model, modified mathematical model, nonlinear differential equation, first integral, solution

DOI: 10.1134/S2304487X20050089

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kermack W.O., McKendrick A.G., A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 1927, vol. 115, pp. 700–721.
2. Kudryashov N.A., Chmykhov M.A., Vigdorowitsch M.V., Analytical features of the SIR model and their application to COVID-19, *Applied Mathematical Modeling*, 2021, vol. 90, pp. 466–473.
3. Chladni Z., Kopfov J., Rachinskii D., Rouf S.C., Global dynamics of SIR model with switched transmission rate, *J. Math. Biol.*, 2020, vol. 80, pp. 1209–1233. <https://doi.org/10.1007/s00285-019-01460-2>.
4. Barlow N.S., Weinstein S.J., Accurate closed-form solution of the SIR epidemic model, *Physica D*, 2020, vol. 408, p. 132540. [www.doi.org/10.1016/j.physd.2020.132540](https://doi.org/10.1016/j.physd.2020.132540)
5. Harko T., Lobo F.S.N., Mak M.K., Exact analytical solutions of the Susceptible–Infected–Recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates, *Applied Mathematics and Computation*, 2014, vol. 236, pp. 184–194. [dx.doi.org/10.1016/j.amc.2014.03.030](https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.03.030)
6. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., Knuth D.E., On the Lambert W Function, *Advances in Computational Mathematics*, 1996, vol. 5, pp. 329–359.

7. a) COVID-19 Data Repository by the Center for Systems Science and Engineering (CSSE) at Johns Hopkins University, 2020. [Online]. Available: <https://github.com/CSSEGISandData/COVID-19>, folder COVID-19/csse-covid-19-data/csse-covid-19-time-series/. (Accessed 22-May-2020); b) Dong, E., Du, H., Gardner, L., An interactive web-based dashboard to track COVID-19 in real time, *Lancet Inf. Dis.*, vol. 20, no. 5, pp. 533–534. doi: 10.1016/S1473-3099(20)30120-1
8. CORONAVIRUS today Monitoring the spread of COVID-19 in the world, 2020. [Online]. Available <https://xn-7sbgffetn1ahcahtfb7a0v.xn-p1ai/>. (Accessed 29-May-2020) (in Russian).
9. Kudryashov N.A., One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2012, pp. 2248–2253.
10. Kudryashov N.A., Polynomials in logistics function and solitary waves of nonlinear differential equations, *Appl. Math. Comput.*, 2013, pp. 9245–9253.
11. Kudryashov N.A., Logistic function as solution of many nonlinear differential equations, *Appl. Math. Model.*, 2015, vol. 18, pp. 5733–5742.