

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ

© 2020 г. Д. В. Сафонова^{1,*}, Н. А. Кудряшов^{1,**}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия

*e-mail: safonovadashav@gmail.com

**e-mail: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию 20.10.2020 г.

После доработки 20.10.2020 г.

Принята к публикации 24.11.2020 г.

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка со степенными и нелокальными нелинейностями. Уравнение используется для описания распространения импульсов в оптическом волокне. Задача Коши для исследуемого уравнения не решается методом обратной задачи рассеяния, поэтому рассматривается редукция этого уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ). Для построения редукции используются переменные бегущей волны. Принимая во внимание переменные бегущей волны, получена система ОДУ для мнимой и действительной части. Для проверки интегрируемости системы ОДУ проведен тест Пенлеве. Установлено, что система ОДУ не проходит тест Пенлеве. Однако используя индексы Фукса, полученные при выполнении второго шага теста Пенлеве, определена скорость бегущей волны, при которой исследуемая модель упрощается. При этом условия системы ОДУ является совместной, и остается одно уравнение четвертого порядка. Для поиска точных решений применяется метод простейших уравнений. В результате построены решения, выраженные через эллиптическую функцию Якоби и экспоненциальную функцию. Найденные точные решения содержат две произвольные постоянные и имеют вид периодических и уединенных волн.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, точное решение, тест Пенлеве, оптические импульсы

DOI: 10.1134/S2304487X20050120

1. ВВЕДЕНИЕ

Для описания распространения импульсов в оптических волокнах используются различные модели. Одной из самых популярных моделей является уравнение Радхакришнана–Кунду–Лаксманана [1, 2]. Кроме того используют следующие уравнения: уравнение Чена–Ли–Лу [3, 4], уравнение Кунду–Мекури–Наскара [5, 6] и другие [7–9]. Несмотря на большое количество используемых уравнений, представляет интерес поиск новых моделей для описания распространения импульсов в оптических волокнах. В статье [10] предложен метод построения уравнений высокого порядка, которые могут использоваться для описания оптических импульсов.

Для многих известных в оптике моделей ищутся решения в виде уединенных импульсов [11–15]. Однако более важной задачей является построение общих решений [16–19]. В связи с этим возникает задача проверки интегрируемости изу-

чаемых уравнений, для чего можно использовать тест Пенлеве [20–22].

В данной работе рассматривается одно из уравнений построенных в статье [10]

$$iu_t + \alpha u_{xx} + i\beta u_{xxx} + u_{xxxx} + \mu |u|^2 u + v |u|^4 u + \kappa |u|^2 u_{xx} + i \frac{\beta \kappa}{2} |u|^2 u_x = 0, \quad (1)$$

где i – мнимая единица ($i^2 = -1$), $u(x, t)$ – комплекснозначная функция, соответствующая профилю волны, $\alpha, \beta, \delta, \kappa, \mu, v, \rho, \chi$ – параметры уравнения (1). Уравнение (1) при параметре $\kappa = 0$ ранее рассматривалось в работе [23]. Задача Коши для (1) не решается методом обратной задачи рассеяния, поэтому для поиска его решений (1) используем переменные бегущей волны (2).

$$u(x, t) = y(z) \exp(i(\psi(z) - \omega t)), \quad z = x - C_0 t. \quad (2)$$

Подставляя решение в виде (2) в уравнение, получаем систему обыкновенных дифференци-

альных уравнений, соответствующую мнимой и действительной частям уравнения (1)

$$2\alpha y_z \phi - y_z C_0 + 3\beta y_z \phi^2 - 6y \phi^2 \phi_z + \alpha y \phi_z + 4y_z \phi_{zz} + \beta y_{zzz} + 6y_{zz} \phi_z + 4y_{zzz} \phi + y \phi_{zzz} - 3\beta y \phi_z \phi - 4y_z \phi^3 + \kappa y^3 \phi_z + 2\kappa y^2 y_z \phi + \frac{1}{2} \beta \kappa y^2 y_z = 0, \quad (3)$$

$$\mu y^3 + \nu y^5 - \kappa y^3 \phi^2 - \frac{1}{2} \beta \kappa y^3 \phi + \kappa y^2 y_{zz} + \alpha y_{zz} - 6y_{zz} \phi^2 - 3y \phi_z^2 + y \phi^4 + y \omega - 3\beta y_z \phi_z - 3\beta y_{zz} \phi - 12y_z \phi_z \phi - \beta y \phi_{zz} + y \phi C_0 - \alpha y \phi^2 + \beta y \phi^3 - 4y \phi_{zz} \phi + y_{zzzz} = 0. \quad (4)$$

Целью данной работы является исследование интегрируемости уравнения (1) и построение его точных решений в переменных бегущей волны.

Статья состоит из трех разделов. В разделе 2 использован тест Пенлеве для проверки интегрируемости системы уравнений (3)–(4). В разделе 3 найдены точные решения уравнения (1) в переменных бегущей водны.

2. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕСТА ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (3)–(4)

Тест Пенлеве один из эффективных методов исследования аналитических свойств обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Прохождение теста Пенлеве является необходимым условием интегрируемости ОДУ. То есть если уравнение не проходит тест Пенлеве, то, как правило, общего решения у этого уравнения нет.

Для проверки свойства Пенлеве будем использовать модифицированный алгоритм Ковалевской [20–22]. Этот алгоритм проверяет количество произвольных постоянных в разложении решения в ряд Лорана. Если число произвольных постоянных, полученных в результате проведения теста, совпадает с порядком уравнения, то имеет смысл искать общее решение уравнения.

Модифицированный алгоритм Ковалевской состоит из трех шагов. Рассмотрим эти шаги для исследования аналитических свойств обыкновенного дифференциального уравнения.

Пусть имеем ОДУ n -го порядка

$$E(w_{n,x}, w_{n-1,x}, \dots, w, x) = 0, \quad w_{k,x} = \frac{d^k w}{dx^k}.$$

Вначале из этого уравнения находятся ведущие члены, подставляя $w = w_0(x - x_0)^{-p}$ и выбирая слагаемые, в которых показатель степени $(x - x_0)$ наименьший.

Шаг 1. Определение порядка полюса решения. Используем $w(x)$ в виде

$$w(x) = w_0 \xi^{-p}, \quad \xi = x - x_0, \quad (5)$$

x_0 – произвольная постоянная, w_0 и p – неизвестные постоянные.

Подставляя (5) в ведущие члены уравнения, находим значения p , приравнивая показатели степеней ξ , а из равенства коэффициентов при степени ξ находим постоянную w_0 . Найденные значения p соответствуют полюсам решения. Если значения p целые, то переходим ко второму шагу.

Шаг 2. Определение индексов Фукса. Для каждой пары значений p и w_0 используем $w(x)$ в виде

$$w(x) = \frac{w_0}{\xi^p} + a_j \xi^{j-p}, \quad \xi = x - x_0, \quad (6)$$

w_0 и p – постоянные, полученные на первом шаге, j – индексы Фукса, a_j – коэффициенты ряда Лорана для решения $w(x)$, которые не определяются. Подставляем (6) в ведущие члены и собираем коэффициенты при a_j . Приравнивая нулю коэффициент при первой степени a_j , получаем уравнение для определения индексов Фукса j_1, \dots, j_n . Если все индексы Фукса целые, то переходим к следующему шагу.

Шаг 3. Определение произвольных постоянных. Расположим индексы Фукса в порядке возрастания. Тогда $j_1 = -1$, что соответствует произвольной постоянной x_0 , и $j_n = \max(j_1, \dots, j_n)$. Используем $w(x)$ в виде

$$w(x) = \sum_{k=0}^{j_n} w_k \xi^{k-p}, \quad \xi = x - x_0. \quad (7)$$

Подставляем (7) в исходное уравнение и собираем коэффициенты при различных степенях ξ . Приравнивая выражения при ξ нулю, находим коэффициенты w_k . Если k равно индексу Фукса, то невозможно найти w_k . И если коэффициент при ξ^{k-p-n} равен нулю, то w_k произвольная постоянная, иначе тест Пенлеве не выполнен. Однако если коэффициент при ξ^{k-p-n} зависит от параметров уравнения, то можно найти условия на эти параметры, при которых w_k будет произвольным. Если все w_k при $k = j_2, \dots, j_n$ будут произвольными, то исходное уравнение проходит тест Пенлеве.

Тест Пенлеве для системы ОДУ выполняется аналогично. Далее в этом разделе проведем тест Пенлеве для системы уравнений (3)–(4).

Шаг 1. Находим ведущие члены для системы уравнений (3), (4), используя подстановки: $y(z) = y_0(z - z_0)^{-p}$ и $\phi(z) = \phi_0(z - z_0)^{-q}$. Получаем два возможных варианта значений p и q .

В первом случае $p = 1, q = 0$, а коэффициенты y_0 и ϕ_0 принимают следующий вид

$$y_0 = \pm \frac{\sqrt{-v(\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - 24v})}}{v}, \quad \phi_0 = -\frac{\beta}{4}. \quad (8)$$

Системы с ведущими членами (3), (4) записываются следующим образом

$$\begin{cases} \beta y_{zzz} + 4y_{zzz}\phi + 2\kappa y^2 y_z \phi + \frac{1}{2}\beta \kappa y^2 y_z = 0, \\ y_{zzzz} + v y^5 + \kappa y^2 y_{zz} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Во втором случае $p = 1, q = 1$, при этом y_0 и ϕ_0 имеют вид

$$y_0 = \pm \frac{\sqrt{30\kappa(\phi_0^2 - 5)}}{3v}, \quad \phi_0^2 = \frac{-105\kappa^2 - 1000v \pm 9\sqrt{7\kappa^2(7\kappa^2 + 800v)}}{42\kappa^2 - 200v}. \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2y_0 z^{j-4} (\kappa y_0^2 + 12) \\ \frac{z^{j-5} (j^2 \kappa y_0^2 + 5v y_0^4 + j^4 - 3j \kappa y_0^2 - 10j^3 + 6\kappa y_0^2 + 35j^2 - 50j + 24)}{24} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Приравнивая нулю определитель этой матрицы, получаем уравнение для поиска индексов Фукса. Таким образом, находим, что индексы Фукса зависят от параметров системы. Аналогичные результаты получаем для второго случая при $p = 1, q = 1$.

Рассмотрим частный случай: $\kappa = 5\sqrt{v}$.

В этом случае получаем четыре целых индекса Фукса для двух значений y_0 из (8)

$$j_1 = -1, \quad j_2 = 1, \quad j_3 = 2, \quad j_4 = 8, \quad (13)$$

но для двух других значений y_0 из (8) получаем два целых и два нецелых индекса Фукса

$$j_1 = -1, \quad j_2 = 3, \quad j_{3,4} = 4 \pm 2\sqrt{6}. \quad (14)$$

Это означает, что рассматриваемая система уравнений не проходит тест Пенлеве, и нет необходимости выполнять третий шаг. Однако, выполняя третий шаг теста, часто удается найти условия на параметры, при которых модель упрощается.

Шаг 3. Используем $y(z)$ и $\phi(z)$ в виде

$$\begin{aligned} y(z) &= \frac{y_0}{\xi} + y_1 + y_2 \xi + y_3 \xi^2 + \\ &+ y_4 \xi^3 + y_5 \xi^4 + y_6 \xi^5 + y_7 \xi^6 + y_8 \xi^7, \\ \phi(z) &= \phi_0 + \phi_1 \xi + \phi_2 \xi^2 + \phi_3 \xi^3 + \phi_4 \xi^4 + \\ &+ \phi_5 \xi^5 + \phi_6 \xi^6 + \phi_7 \xi^7 + \phi_8 \xi^8, \\ \xi &= z - z_0. \end{aligned} \quad (15)$$

Получаем следующую систему с ведущими членами

$$\begin{cases} 4y_z \phi_{zz} + 6y_{zz} \phi_z + 4y_{zzz} \phi + y \phi_{zzz} - 6y \phi^2 \phi_z - \\ - 4y_z \phi^3 + \kappa y^3 \phi_z + 2\kappa y^2 y_z \phi = 0, \\ y_{zzzz} - 6y_{zz} \phi^2 - 3y \phi_z^2 + y \phi^4 - 12y_z \phi_z \phi - \\ - 4y \phi_{zz} \phi + v y^5 - \kappa y^3 \phi^2 + \phi y^2 y_{zz} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Шаг 2. Рассмотрим первый случай, когда $p = 1, q = 0$. Используем $y(z)$ и $\phi(z)$ в следующем виде

$$y(z) = \frac{y_0}{\xi} + a_1 \xi^{j-1}, \quad \phi(z) = \phi_0 + a_2 \xi^j, \quad \xi = z - z_0. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (9) и собирая коэффициенты при a_1 и a_2 , составляем матрицу из выражений при первых степенях a_1 и a_2

Подставляем (15) в систему (3), (4) и собираем коэффициенты при различных степенях ξ . Затем, приравнивая выражения при степенях ξ нулю, находим коэффициенты разложения (15). Таким образом, получаем, что все $\phi_i = 0$ для $i \neq 0, i \neq 2$. Из чего получаем, что при некотором значении скорости бегущей волны, можно положить коэффициент ϕ_2 равным нулю. Для этого выбираем следующую скорость

$$C_0 = -\frac{1}{2} \alpha \beta - \frac{1}{8} \beta^3. \quad (16)$$

При условии (16) получаем, что $\phi(z) = \phi_0 = -\beta/4$, в этом случае уравнение (3) тождественно выполняется. И задача сводится к нахождению решений уравнения (4), которое принимает вид

$$\begin{aligned} y_{zzzz} + \left(\alpha + \frac{3}{8} \beta^2 \right) y_{zz} + \left(\omega + \frac{\alpha \beta^2}{16} + \frac{5}{256} \beta^4 \right) y + \\ + \left(\mu + \frac{1}{16} \kappa \beta^2 \right) y^3 + v y^5 + \kappa y^2 y_{zz} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнение (17) так же не проходит тест Пенлеве, поэтому не имеет общего решения. Однако используя специальные методы будем искать точные решения (17).

3. ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ (17)

В разделе 2 получено, что система (3)–(4) не проходит тест Пенлеве, следовательно, уравнение (17) не обладает свойством Пенлеве и не имеет общего решения с четырьмя произвольными постоянными. Поэтому будем искать решение уравнения с меньшим числом постоянных. Точные решения ищем, используя метод простейших уравнений [24, 25]. При применении этого метода искомое решение выражается через решение другого уравнения, которое называют простейшим. При этом следует принимать во внимание условия соответствия порядков полюсов решения уравнения (17) и выражения составленного из решения простейшего уравнения.

В качестве простейшего будем использовать следующее уравнение

$$Y_z^2(z) - aY^4(z) - cY^2(z) - d = 0. \tag{18}$$

Решение уравнения (18) в общем случае выражается через эллиптическую функцию Вейерштрасса или одну из эллиптических функций Якоби. Покажем, как решение уравнения (18) выражается через эллиптическую функцию Якоби. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 корни уравнения $aY^4 + cY^2 + d = 0$. И также имеем, что $x_3 = -x_1, x_4 = -x_2$. Тогда уравнение (18) можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} Y_z^2 &= aY^4 + cY^2 + d = a(Y - x_1)(Y + x_1) \times \\ &\times (Y - x_2)(Y + x_2) = a(Y^2 - x_1^2)(Y^2 - x_2^2) = \tag{19} \\ &= ax_1^2x_2^2 \left(1 - \left(\frac{Y}{x_1}\right)^2 \right) \left(1 - \left(\frac{Y}{x_2}\right)^2 \right). \end{aligned}$$

Из (19) получаем, что решение уравнения (18) выражается через эллиптический синус

$$\begin{aligned} Y(z) &= \pm x_1 \operatorname{sn} \left(\sqrt{ax_2} (z - z_0), \frac{x_1}{x_2} \right), \tag{20} \\ x_2 &= \sqrt{\frac{\sqrt{c^2 - 4ad} - c}{2a}}, \quad x_1 = \sqrt{\frac{-\sqrt{c^2 - 4ad} - c}{2a}}. \end{aligned}$$

Теперь применим метод простейших уравнений для (17). Порядок полюса решения уравнения (17) совпадает с порядком полюса решения уравнения (18) и равен единице. Поэтому будем искать решение уравнения (17) в виде

$$y(z) = AY(z) + B, \tag{21}$$

где $Y(z)$ – решение уравнения (18), A и B – неизвестные постоянные.

Дифференцируя (18) по z , получаем, что решение уравнения (18) также удовлетворяет следующим уравнениям

$$\begin{aligned} Y_{zz} &= 2aY^3 + cY, \\ Y_{zzz} &= 6aY^2Y_z + cY_z, \tag{22} \\ Y_{zzzz} &= 6aY^2Y_{zz} + 12aYY_z^2 + cY_{zz}. \end{aligned}$$

Дифференцируя (21) и используя (22), получаем выражения для производных функции $y(z)$

$$\begin{aligned} y_{zz} &= 2aAY^3 + cAY, \tag{23} \\ y_{zzzz} &= 24a^2AY^5 + 20acAY^3 + 12aAdY + c^2AY. \end{aligned}$$

Подставляем (21), (23) в (17) и собираем коэффициенты при различных степенях $Y(z)$. Таким образом, получаем алгебраическое уравнение

$$\begin{aligned} (vA^5 + 2\kappa A^3a + 24Aa^2)Y^5 + (5vA^4B + 4\kappa A^2Ba)Y^4 + \\ + \left(\kappa A^3c + 2\alpha Aa + \frac{1}{16} \kappa \beta^2 A^3 + 2\kappa AB^2a + \right. \\ \left. + \mu A^3 + \frac{3}{4} \beta^2 Aa + 20Aac + 10vA^3B^2 \right) Y^3 + \\ + \left(\frac{3}{16} \kappa \beta^2 A^2B + 10vA^2B^3 + 2\kappa A^2Bc + 3\mu A^2B \right) Y^2 + \\ + \left(\alpha Ac + 12Ada + 5vAB^4 + \frac{5}{256} \beta^4 A + \right. \\ \left. \frac{3}{8} \beta^2 Ac + 3\mu AB^2 + \frac{1}{16} \alpha \beta^2 A + Ac^2 + \right. \\ \left. + \kappa AB^2c + \frac{3}{16} \kappa \beta^2 AB^2 + \omega A \right) Y + \frac{5}{256} \beta^4 B + \omega B + \\ + vB^5 + \mu B^3 + \frac{1}{16} \kappa \beta^2 B^3 + \frac{1}{16} \alpha \beta^2 B = 0. \tag{24} \end{aligned}$$

Приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях $Y(z)$, получаем следующие условия на параметры

$$\begin{aligned} A &= \pm \frac{\sqrt{-av(\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - 24v})}}{v}, \quad B = 0, \\ c &= -\frac{1}{16} \frac{\kappa \beta^2 A^2}{A^2 \kappa + 20a} - \frac{\mu A^2}{A^2 \kappa + 20a} - \\ &- \frac{3}{4} \frac{\beta^2 a}{A^2 \kappa + 20a} - 2 \frac{\alpha a}{A^2 \kappa + 20a}, \tag{25} \\ d &= -\frac{5}{3072} \frac{\beta^4}{a} - \frac{1}{192} \frac{\alpha \beta^2}{a} - \frac{1}{32} \frac{\beta^2 c}{a} - \\ &- \frac{1}{12} \frac{\alpha c}{a} - \frac{1}{12} \frac{c^2}{a} - \frac{1}{12} \frac{\omega}{a}. \end{aligned}$$

При этих условиях выражение (21) является решением уравнения (17) и имеет вид

$$\begin{aligned} y(z) &= \pm A \frac{\sqrt{-a(\chi + 4c)}}{2a} \operatorname{sn} \left(\frac{\sqrt{\chi}}{2} (z - z_0), K \right), \tag{26} \\ \chi &= 2\sqrt{c^2 - 4ad} - 2c, \quad K = \frac{4\sqrt{ad}}{\chi}, \end{aligned}$$

z_0 и a – произвольные постоянные, A, c, d из (25).

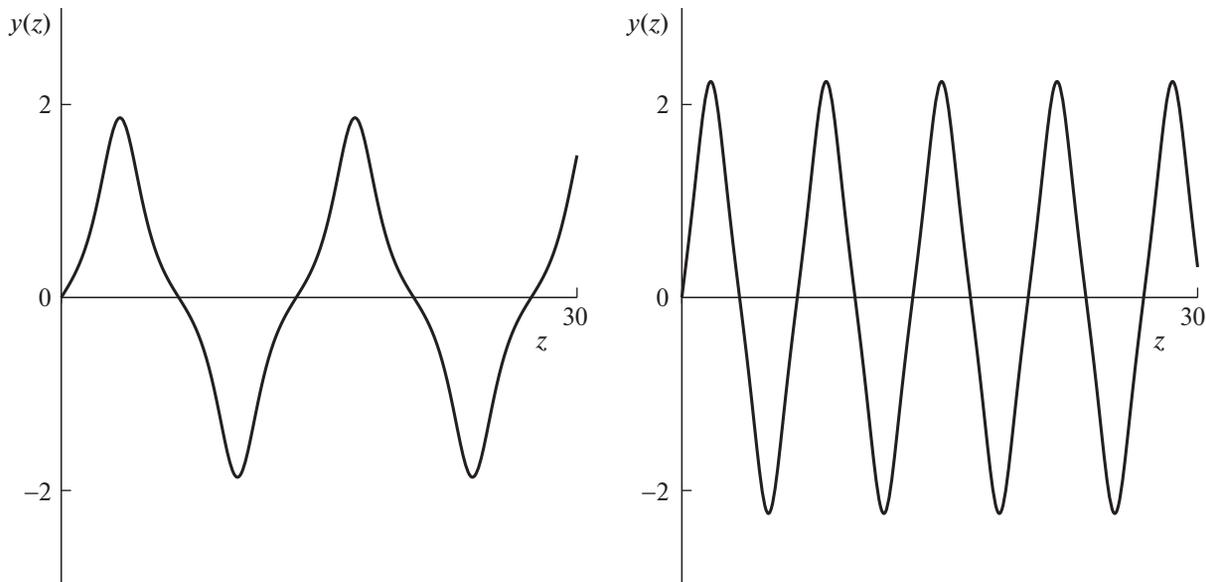


Рис. 1. Решение (26) при параметрах $a = 1, \alpha = -1, \beta = 1, \nu = -1, \mu = 3, \omega = 0.1, \kappa = 1, z_0 = 0$ (слева), при параметрах $a = 1, \alpha = -1, \beta = 1, \nu = -1, \mu = 3, \omega = 6, \kappa = 1, z_0 = 0$ (справа).

Решения (26) при условиях (25) и значениях параметров $a = 1, \alpha = -1, \beta = 1, \nu = -1, \mu = 3, \omega = 0.1, \kappa = 1, z_0 = 0$, а также при значениях параметров $a = 1, \alpha = -1, \beta = 1, \nu = -1, \mu = 3, \omega = 6, \kappa = 1, z_0 = 0$ представлены на рис. 1.

Рассмотрим частный случай. Пусть в уравнении (18) $d = 0$, тогда решение уравнения (18) принимает вид уединенной волны

$$Y(z) = \pm \frac{4ce^{\sqrt{c}(z-z_0)}}{e^{2\sqrt{c}(z-z_0)} - 4ac}. \tag{27}$$

Тогда из уравнения (24) при условии $d = 0$, получаем следующие условия

$$\begin{aligned} A &= \pm \frac{\sqrt{-a\nu(\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - 24\nu})}}{\nu}, & B &= 0, \\ c &= -\frac{1}{16} \frac{\kappa\beta^2 A^2}{A^2\kappa + 20a} - \frac{\mu A^2}{A^2\kappa + 20a} - \frac{3}{4} \frac{\beta^2 a}{A^2\kappa + 20a} - 2 \frac{\alpha a}{A^2\kappa + 20a}, \\ \omega &= -\frac{5}{256} \beta^4 - \frac{1}{16} \alpha \beta^2 - \frac{3}{8} \beta^2 c - \alpha c - c^2. \end{aligned} \tag{28}$$

Таким образом, получаем решение в виде уединенной волны

$$y(z) = \pm A \frac{4ce^{\sqrt{c}(z-z_0)}}{e^{2\sqrt{c}(z-z_0)} - 4ac}, \tag{29}$$

z_0 и a — произвольные постоянные, A, c, ω из (28).

Решения (29) при условиях (28) и значениях параметров $a = -1, \alpha = -1, \beta = 1, \nu = -2, \mu = 2, z_0 = 10, \kappa = 1, 10, 100$, а также при значениях параметров $a = -10, -1, -0.1, \alpha = -1, \beta = 1, \nu = -2, \mu = 2, z_0 = 10, \kappa = 1$ построены на рис. 2.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка со степенными и нелокальными нелинейностями, используемое для описания оптических импульсов. С помощью переменных бегущей волны получается редукция исходного уравнения, которая является системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Установлено, что построенная система ОДУ не проходит тест Пенлеве. В результате применения теста Пенлеве получены индексы Фукса, с помощью которых найдено условие на скорость бегущей волны, упрощающее исследуемую систему. При найденном значении скорости система ОДУ становится совместной, и остается только одно уравнение, решения которого были построены при помощи метода простейших уравнений. Найденные точные решения имеют две произвольные постоянные. Полученные решения выражаются через эллиптическую функцию Якоби и экспоненциальную функцию и имеют соответственно форму периодических и уединенных волн. Построенные точные решения в переменных бегущей волны иллюстрируются при некоторых значениях параметров.

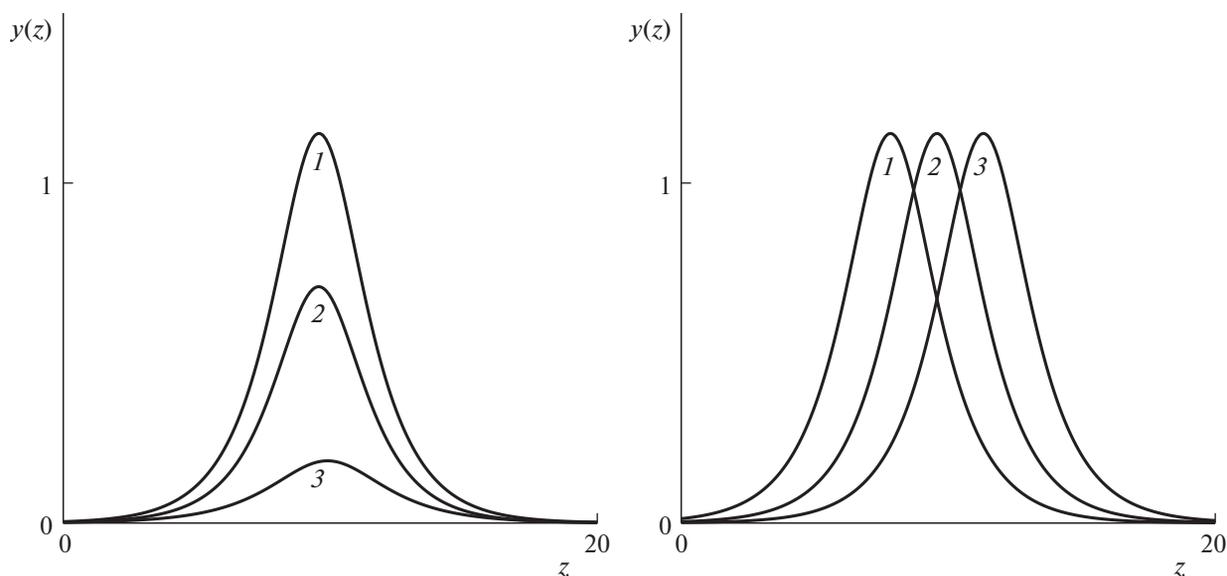


Рис. 2. Решение (29) при параметрах $a = -1$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\nu = -2$, $\mu = 2$, $z_0 = 10$, $\kappa = 1$ (1), 10 (2), 100 (3) (слева), при параметрах $a = -10$ (1), -1 (2), -0.1 (3), $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\nu = -2$, $\mu = 2$, $z_0 = 10$, $\kappa = 1$ (справа).

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10039) и Министерства науки и высшего образования РФ (проект государственного задания № 0723-2020-0036).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Biswas A. 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation // *Physics Letters A*. 2009. V. 373. P. 2546–2548.
2. Kudryashov N.A., Safonova D.V., Biswas A. Painlevé analysis and solution to the traveling wave reduction of Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2019. V. 24. № 6. P. 607–614.
3. Biswas A. Chirp-free bright optical soliton perturbation with Chen–Lee–Liu equation by traveling wave hypothesis and semi-inverse variational principle // *Optik*. 2018. V. 172. P. 772–776.
4. Kudryashov N.A. General solution of the traveling wave reduction for the perturbed Chen–Lee–Liu equation // *Optik*. 2019. V. 186. P. 339–349.
5. Kundu A., Mukherjee A. Novel integrable higher-dimensional nonlinear Schrödinger equation: properties, solutions, applications, 2013.
6. Kudryashov N.A. General solution of traveling wave reduction for the Kundu–Mukherjee–Naskar equation // *Optik*. 2019. V. 186. P. 22–27.
7. Kudryashov N.A. Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with cubic-quintic nonlinearity // *Optik*. 2019. V. 188. P. 27–35.
8. Kudryashov N.A. First integral and general solution of traveling wave reduction for the Triki–Biswas equation // *Optik*. 2019. V. 185. P. 275–281.
9. Kudryashov N.A. Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with anti-cubic nonlinearity // *Optik*. 2019. V. 185. P. 665–671.
10. Kudryashov N.A. Construction of nonlinear equations for description of propagation pulses in optical fiber // *Optik*. 2019. V. 192. P. 162964.
11. Bansal A., Biswas A., Zhou Q., Arshed S., Alzahrani A.K., Belic M.R. Optical solitons with Chen–Lee–Liu equation by Lie symmetry // *Optik*. 2020. V. 384. P. 126202.
12. Yıldırım Y., Biswas A., Ekici M., Triki H., Gonzalez-Gaxiola O., Alzahrani A.K., Belic M.R. Optical solitons in birefringent fibers for Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation with five prolific integration norms // *Optik*. 2020. V. 208. P. 164550.
13. Kohl R.W., Biswas A., Zhou Q., Ekici M., Alzahrani A.K., Belic M.R. Optical soliton perturbation with polynomial and triple-power laws of refractive index by semi-inverse variational principle // *Optik*. 2020. V. 135. P. 109765.
14. Kudryashov N.A. Method for finding highly dispersive optical solitons of nonlinear differential equations // *Optik*. 2020. V. 206. P. 163550.
15. Kudryashov N.A. Optical solitons of mathematical model with arbitrary refractive index // *Optik*. 2020. V. 224. P. 165391.
16. Kudryashov N.A. First integrals and general solutions of the Biswas–Milovic equation // *Optik*. 2020. P. 164490.
17. Kudryashov N.A. First integrals and general solution of the Fokas–Lenells equation // *Optik*. 2019. V. 195. P. 163135.
18. Kudryashov N.A., Safonova D.V. Nonautonomous first integrals and general solutions of the KdV–Burgers and

- mKdV–Burgers equations with the source // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2019. V. 42. № 13. P. 4627–4636.
19. Кудряшов Н.А., Сафонова Д.В. Точные решения уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргерса с источником // *Вестник НИЯУ МИФИ*. 2019. Т. 8. № 2. С. 124–131.
 20. Ablowitz M.J., Clarkson P.A. *Solitons nonlinear evolution equations and inverse scattering*. Cambridge University Press, 1991.
 21. Ablowitz M.J., Segur H. Exact linearization of a painleve transcendent // *Phys. Rev. Lett.* 1977. V. 38. P. 1103–1106.
 22. Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of p-type. I // *J. Math. Phys.* 1980. V. 21. P. 715–721.
 23. Кудряшов Н.А., Сафонова Д.В. Точные решения нелинейного дифференциального уравнения для описания оптических импульсов с нелинейностью третьей и пятой степени // *Вестник НИЯУ МИФИ*. 2020. Т. 9. № 1. С. 25–31.
 24. Kudryashov N.A. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // *Chaos Soliton Fractals*. 2005. V. 24. P. 1217–1231.
 25. Kudryashov N.A. Exact solitary waves of the Fisher equations // *Physics Letters A*. 2005. V. 342. P. 99–106.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 5, pp. 412–419

Exact Solution of Fourth Order Differential Equations for Description of Optical Pulses

D. V. Safonova^{a,#} and N. A. Kudryashov^{a,##}

^a National Research Nuclear University MEPHI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: safonovadashav@gmail.com

^{##}e-mail: nakudr@gmail.com

Received October 20, 2020; revised October 20, 2020; accepted November 24, 2020

Abstract—The nonlinear fourth-order partial differential equation is considered with power and nonlocal nonlinearities. This equation is used to describe the propagation of pulses in an optical fiber. Since the Cauchy problem for this equation cannot be solved by the inverse scattering transform method, the reduction of this partial differential equation to an ordinary differential equation (ODE) is considered. To construct the reduction, the traveling wave variables are used. Using a traveling wave solution, a system of ODEs is obtained composed of the imaginary and real parts of the equation. The Painlevé test is performed to check the integrability of this reduction. It is established that the constructed system of ODEs does not have the Painlevé property. Using the Fuchs indices obtained during the second step of the Painlevé test, the values of traveling wave velocity is found at which the model is simplified. In this case, only one four-order equation remains in the system of ODEs, and the simplest equation method is used to find exact solutions of it. As a result, solutions expressed in terms of the Jacobi elliptic function and the exponential function are constructed. The found exact solutions have two arbitrary constants and have the form of periodic and solitary waves.

Keywords: nonlinear differential equation, exact solution, Painlevé test, optical pulses

DOI: 10.1134/S2304487X20050120

REFERENCES

1. Biswas A., 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation, *Physics Letters A*, 2009, vol. 373, pp. 2546–2548.
2. Kudryashov N.A., Safonova D.V., Biswas A., Painlevé analysis and solution to the traveling wave reduction of Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, vol. 24, no. 6, pp. 607–614.
3. Biswas A., Chirp-free bright optical soliton perturbation with Chen–Lee–Liu equation by traveling wave hypothesis and semi-inverse variational principle, *Optik*, 2018, vol. 172, pp. 772–776.
4. Kudryashov N.A., General solution of the traveling wave reduction for the perturbed Chen–Lee–Liu equation, *Optik*, 2019, vol. 186, pp. 339–349.
5. Kundu A., Mukherjee A., *Novel integrable higher-dimensional nonlinear Schrödinger equation: properties, solutions, applications*, 2013.
6. Kudryashov N.A., General solution of traveling wave reduction for the Kundu–Mukherjee–Naskar equation, *Optik*, 2019, vol. 186, pp. 22–27.

7. Kudryashov N.A., Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with cubic-quintic nonlinearity, *Optik*, 2019, vol. 188, pp. 27–35.
8. Kudryashov N.A., First integral and general solution of traveling wave reduction for the Triki–Biswas equation, *Optik*, 2019, vol. 185, pp. 275–281.
9. Kudryashov N.A., Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with anti-cubic nonlinearity, *Optik*, 2019, vol. 185, pp. 665–671.
10. Kudryashov N.A., Construction of nonlinear equations for description of propagation pulses in optical fiber, *Optik*, 2019, vol. 192, p. 162964.
11. Bansal A., Biswas A., Zhou Q., Arshed S., Alzahrani A.K., Belic M.R., Optical solitons with Chen–Lee–Liu equation by Lie symmetry, *Optik*, 2020, vol. 384, p. 126202.
12. Yıldırım Y., Biswas A., Ekici M., Triki H., Gonzalez-Gaxiola O., Alzahrani A.K., Belic M.R., Optical solitons in birefringent fibers for Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation with five prolific integration norms, *Optik*, 2020, vol. 208, p. 164550.
13. Kohl R.W., Biswas A., Zhou Q., Ekici M., Alzahrani A.K., Belic M.R., Optical soliton perturbation with polynomial and triple-power laws of refractive index by semi-inverse variational principle, *Optik*, 2020, vol. 135, p. 109765.
14. Kudryashov N.A., Method for finding highly dispersive optical solitons of nonlinear differential equations, *Optik*, 2020, vol. 206, p. 163550.
15. Kudryashov N.A., Optical solitons of mathematical model with arbitrary refractive index, *Optik*, 2020, vol. 224, p. 165391.
16. Kudryashov N.A., First integrals and general solutions of the Biswas–Milovic equation, *Optik*, 2020, p. 164490.
17. Kudryashov N.A., First integrals and general solution of the Fokas–Lenells equation, *Optik*, 2019, vol. 195, p. 163135.
18. Kudryashov N.A., Safonova D.V., Nonautonomous first integrals and general solutions of the KdV–Burgers and mKdV–Burgers equations with the source, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2019, vol. 42, no. 13, pp. 4627–4636.
19. Kudryashov N.A., Safonova D.V., *Tochniye resheniya uravneniya Kortewega–de Vriesa–Burgersa istochnikom.* (Exact Solutions of the Korteweg–de Vries–Burgers Equation with a Source), *Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI"*, 2019, vol. 8, no. 2, pp. 124–131 (in Russian).
20. Ablowitz M.J., Clarkson P.A., Solitons nonlinear evolution equations and inverse scattering, *Cambridge University Press*, 1991.
21. Ablowitz M.J., Segur H., Exact linearization of a painleve transcendent, *Phys Rev Lett.*, 1977, vol. 38, pp. 1103–1106.
22. Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H., A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of p-type. I, *J. Math. Phys.*, 1980, vol. 21, pp. 715–21.
23. Kudryashov N.A., Safonova D.V., *Tochniye resheniya nelineynogo differentsialnogo uravneniya dlya opisaniya opticheskikh impulsov s nelineynostyu tret'ey i pyatoy stepeni* (Exact Solutions of a Nonlinear Differential Equation with Third and Fifth Degree Nonlinearities for Description of Optical Pulses), *Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI"*, 2020, vol. 9, no. 1, pp. 25–31 (in Russian).
24. Kudryashov N.A., Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations, *Chaos Soliton Fractals*, 2005, vol. 24, pp. 1217–1231.
25. Kudryashov N.A., Exact solitary waves of the Fisher equations, *Physics Letters A*, 2005, vol. 342, pp. 99–106.