ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2020, том 9, № 5, с. 420–437

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОСТЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ РЕШЕНИЙ

© 2020 г. А. Д. Полянин[1,*], А. В. Аксенов[2,3,4,]**

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия*

[2] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, 119992, Россия*

[3] *Научно-исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия*

[4] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 125047, Россия*

**e-mail: polyanin@ipmnet.ru*

***e-mail: aksenov@mech.math.msu.su*

Поступила в редакцию 25.10.2020 г.
После доработки 25.10.2020 г.
Принята к публикации 24.11.2020 г.

Описан ряд простых, но достаточно эффективных методов построения точных решений нелинейных уравнений с частными производными, которые не требуют специальной подготовки и приводят к небольшому объему промежуточных вычислений. Эти методы базируются на следующих двух основных идеях: (i) простые точные решения могут служить основой для построения более сложных решений рассматриваемых уравнений; (ii) точные решения одних уравнений могут служить основой для построения решений более сложных уравнений. В частности, предложен метод построения сложных решений, исходя из простых решений, с помощью преобразований сдвига и масштабирования; показано, что в некоторых случаях можно получать достаточно сложные решения путем добавления слагаемых к более простым решениям; рассматриваются ситуации, когда с помощью однотипных простых решений можно построить более сложное составное решение (нелинейная суперпозиция решений); описан метод построения сложных точных решений линейных уравнений путем введения комплексного параметра в более простые решения. Эффективность предложенных методов иллюстрируется большим числом конкретных примеров. Рассматриваются нелинейные уравнения теплопроводности, реакционно-диффузионные уравнения, нелинейные волновые уравнения, уравнения движения в пористых средах, уравнения гидродинамического пограничного слоя, уравнения движения жидкой пленки, уравнения газовой динамики, уравнения Навье–Стокса и др. Помимо точных решений обычных уравнений с частными производными описаны также некоторые точные решения нелинейных функционально-дифференциальных уравнений типа пантографа с частными производными, которые кроме искомой функции содержат также функции с растяжением или сжатием независимых переменных. Сформулирован принцип аналогии, позволяющий эффективно строить точные решения таких функционально-дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: точные решения, нелинейные уравнения с частными производными, реакционно-диффузионные уравнения, нелинейные волновые уравнения, функционально-дифференциальные уравнения типа пантографа, решения с обобщенным разделением переменных

DOI: 10.1134/S2304487X20050119

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Предварительные замечания

Исследование свойств и методы построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений необходимы для разработки, анализа и тестирования различных математических моделей, используемых в естествознании и технике. Существует несколько основных методов поиска точных решений и построения редукций нелинейных уравнений с частными производными: метод группового анализа дифференциальных уравнений (метод поиска классических симметрий) [1–5], методы поиска неклассических симметрий [6–9], прямой метод Кларксона–Крускала [10–14], методы обобщенного разделения переменных [12–15], методы функционального разделения переменных [14, 16–18], метод дифференциальных связей [12–14, 19], метод усеченных разложений Пенлеве [20–22]. Применение этих методов требует специальной подготовки и, как правило, сопровождается трудоемким анализом и большим объемом аналитических преобразований и промежуточных вычислений.

В данной работе описан ряд простых, но достаточно эффективных методов построения точных решений нелинейных уравнений с частными производными, которые не требуют специальной подготовки и проводят к небольшому объему промежуточных вычислений. Эти методы базируются на следующих двух основных идеях:

• простые точные решения могут служить основой для построения более сложных решений рассматриваемых уравнений,

• точные решения одних уравнений могут служить основой для построения решений других более сложных уравнений.

Эффективность предложенных методов иллюстрируется большим числом конкретных примеров. Рассматриваются нелинейные уравнения теплопроводности, реакционно-диффузионные уравнения, нелинейные волновые уравнения, уравнения движения в пористых средах, уравнения гидродинамического пограничного слоя, уравнения движения жидкой пленки, уравнения газовой динамики, уравнения Навье–Стокса и др. Помимо точных решений обычных уравнений с частными производными описаны также некоторые точные решения нелинейных функционально-дифференциальных уравнений типа пантографа и уравнений с постоянным запаздыванием.

1.2. Точные решения нелинейных уравнений с частными производными (используемая терминология)

В данной статье термин *точное решение* для нелинейных уравнений в частных производных будем применять в случаях, когда решение выражается:

(i) через элементарные функции, функции, входящие в уравнение (это необходимо, когда уравнение содержит произвольные функции), и неопределенные или/и определенные интегралы;

(ii) через решения обыкновенных дифференциальных уравнений или систем таких уравнений.

Допустимы комбинации решений из пп. (i)–(ii). В случае (i) точное решение может быть представлено в явной, неявной или параметрической форме. Более детально терминология по данному вопросу обсуждается в книге [14].

2. ПОСТРОЕНИЕ СЛОЖНЫХ РЕШЕНИЙ, ИСХОДЯ ИЗ ПРОСТЫХ РЕШЕНИЙ, С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СДВИГА И МАСШТАБИРОВАНИЯ

2.1. Некоторые определения. Простейшие преобразования

Будем говорить, что уравнение с частными производными

$$F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\,\ldots)=0 \qquad (1)$$

инвариантно относительно однопараметрического обратимого преобразования

$$\bar{x}=X(x,t,u,a),\quad \bar{t}=T(x,t,u,a),\quad \bar{u}=U(x,t,u,a), \qquad (2)$$

если после подстановки выражений (2) в (1) получим точно такое же уравнение

$$F(\bar{x},\bar{t},\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_t,\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}},\bar{u}_{\bar{x}\bar{t}},\bar{u}_{\bar{t}\bar{t}},\,\ldots)=0.$$

Важно отметить, что параметр a, который может принимать значения на некотором интервале (a_1,a_2), не входит в рассматриваемое уравнение (1).

Преобразования, сохраняющие вид уравнения (1), преобразуют решение рассматриваемого уравнения в решение этого же уравнения.

Функция $I(x,t,u)$ (отличная от константы и не зависящая от a) называется *инвариантом преобразования* (2), если она сохраняется при этом преобразовании, т.е.

$$I(x,t,u)=I(\bar{x},\bar{t},\bar{u})$$

при всех допустимых значениях параметра a.

Инварианты преобразования определяются неоднозначно, так как произвольная функция от инвариантов также является инвариантом.

Решение $u=U(x,t)$ уравнения (1) называется *инвариантным*, если оно при преобразовании (2) переходит в точно такое же решение $\bar{u}=U(\bar{x},\bar{t})$.

Далее будут рассматриваться только однопараметрические преобразования вида

$$x=\bar{x}+b_1,\quad t=\bar{t}+b_2,$$
$$u=\bar{u}+b_3\quad (\textit{преобразование сдвига});$$
$$x=c_1\bar{x},\quad t=c_2\bar{t},\quad u=c_3\bar{u}$$
$$(\textit{преобразование масштабирования}),$$

и композиции этих преобразований. Здесь b_n и c_n ($n=1,2,3$) – постоянные величины, зависящие от свободного параметра a. Такие преобразования будем называть *простейшими преобразованиями*.

Ниже на конкретном примере показано, как определять инварианты простейших преобразований и вид соответствующих инвариантных решений.

Пример 1. Рассмотрим преобразование, состоящее из преобразования сдвига по переменной x и преобразований масштабирования по переменным t и u:

$$\bar{x} = x - m\ln a, \quad \bar{t} = at, \quad \bar{u} = a^k u, \tag{3}$$

где k и m — некоторые константы. Исключая параметр a, находим два функционально независимых инварианта:

$$I_1 = x + m\ln t, \quad I_2 = ut^{-k}. \tag{4}$$

Если рассматриваемое уравнение инвариантно относительно преобразования (3), то оно допускает инвариантное решение, которое можно представить в виде $I_2 = \varphi(I_1)$ [1] или $u = t^k\varphi(z)$, где $z = x + m\ln t$. Подставив полученное выражение в исходное уравнение приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $\varphi = \varphi(z)$.

2.2. Построение более сложных решений, исходя из простых решений. Примеры

Простые одночленные решения в виде произведения функций различных переменных проще всего находить методом разделения переменных (простейшие решения данного типа $u = Ax^\alpha t^\beta$ легко определяются из рассматриваемых уравнений методом неопределенных коэффициентов). Ниже описаны способы построения более сложных решений, исходя из таких решений.

Сначала будем рассматривать простые решения с разделением переменных специального вида

$$u = t^k\varphi_1(x), \tag{5}$$

где k — некоторая постоянная, а $\varphi_1(x)$ — некоторая функция. Такие решения не меняются (инварианты) при преобразовании масштабирования

$$\bar{t} = at, \quad \bar{u} = a^k u. \tag{6}$$

Ниже, в виде утверждения, дано описание метода, позволяющего строить более сложные решения, исходя из решений вида (5).

Утверждение 1. *Пусть уравнение*

$$F(t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \ldots) = 0, \tag{7}$$

которое не зависит явно от переменной x, имеет простое решение вида (5) *и не меняется при преобразовании масштабирования* (6) (*т.е. уравнение* (7) *имеет такое же свойство, что и исходное решение* (5)). *Тогда это уравнение имеет также более сложное решение вида*

$$u = t^k\varphi_2(z), \quad z = x + m\ln t, \tag{8}$$

где m *— произвольная постоянная.*

Доказательство. Поскольку уравнение (7) не зависит явно от пространственной переменной, оно допускает преобразование сдвига по x. Рассмотрим преобразование (3), которое является композицией преобразований сдвига по переменной x и преобразования масштабирования (6). Преобразование (3) имеет два функционально независимых инварианта (4). Поэтому решение, инвариантное относительно преобразования (3), имеет вид (8) (см. пример 1).

Замечание 1. В общем случае вид функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(z)$, входящих соответственно в исходное решение (5) и более сложное решение (8), может различаться, причем $\psi_2(z)\big|_{m=0} \neq \varphi_1(x)$.

Рассмотрим теперь простые решения с разделением переменных специального вида

$$u = x^n\psi_1(t), \tag{9}$$

где n — некоторая постоянная, а $\psi_1(t)$ — некоторая функция. Такие решения не меняются (инварианты) при преобразовании масштабирования

$$\bar{x} = ax, \quad \bar{u} = a^n u. \tag{10}$$

Более сложное, чем (9), решение можно получить с помощью утверждения 1, переобозначив соответствующим образом постоянные и переменные величины в (5)–(8). Ниже описан другой эквивалентный способ построения более сложного решения, который иногда удобнее использовать на практике.

Утверждение 2. *Пусть уравнение*

$$F(x, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \ldots) = 0, \tag{11}$$

которое не зависит явно от переменной t, имеет простое решение вида (9) *и не меняется при преобразовании масштабирования* (10) (*т.е. уравнение* (11) *имеет такое же свойство, что и исходное решение* (9)). *Тогда это уравнение имеет также более сложное решение вида*

$$u = e^{-npt}\psi_2(y), \quad y = xe^{pt}, \tag{12}$$

где p *— произвольная постоянная.*

Доказательство. Уравнение (11) допускает преобразование сдвига по переменной t. Рассмотрим преобразование, являющееся композицией преобразований сдвига по переменной t и преобразования масштабирования (10):

$$\bar{x} = ax, \quad \bar{t} = t - \frac{1}{p}\ln a, \quad \bar{u} = a^n u, \tag{13}$$

где p — произвольная постоянная ($p \neq 0$). Преобразование (13) имеет два функционально независимых инварианта $I_1 = y = xe^{pt}$ и $I_2 = e^{npt}u$. Поэтому решение, инвариантное относительно преобразования (13), имеет вид (12).

Замечание 2. Аргумент функции y линеен по x. Поэтому решение (12) легко дифференцировать по x. Это представление решения следует использовать для уравнений, которые содержат частные производные по x более высокого порядка, чем по t.

Пример 2. Рассмотрим уравнение Буссинеска

$$u_t = a(uu_x)_x, \tag{14}$$

которое описывает нестационарное течение грунтовых вод в пористой среде со свободной поверхностью [24].

Уравнение (14) имеет простое точное решение

$$u = -\frac{x^2}{6at}, \tag{15}$$

которое одновременно является решением двух видов (5) и (9). Рассмотрим по порядку обе возможности построения более сложных решений, исходя из решения (15).

1°. Решение (15) и уравнение (14) сохраняют вид при преобразовании масштабирования $\bar{t} = ct$, $\bar{u} = u/c$. Поэтому в силу утверждения 1 уравнение (14) допускает более сложное точное решение

$$u = \frac{\varphi(z)}{t}, \quad z = x + k\ln t,$$

где функция $\varphi = \varphi(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (далее ОДУ):

$$k\varphi'_z - \varphi = a(\varphi\varphi'_z)'_z. \tag{16}$$

Отметим, что уравнение (16) при $k = 0$ допускает однопараметрическое семейство решений в виде квадратичного многочлена

$$\varphi = -\frac{x^2}{6a} + Cx - \frac{3aC^2}{2},$$

где C — произвольная постоянная. При $C = 0$ это решение совпадает с исходным решением (15).

2°. Решение (15) и уравнение (14) сохраняют вид также при преобразовании масштабирования $\bar{x} = cx$, $\bar{u} = c^2u$. Поэтому, в силу утверждения 2, уравнение (14) допускает другое точное решение

$$u = e^{-2pt}\psi(y), \quad y = xe^{pt},$$

где $p \neq 0$, а функция $\psi = \psi(y)$ описывается ОДУ:

$$py\psi'_y - 2p\psi = a(\psi\psi'_y)'_y.$$

Пример 3. Рассмотрим теперь уравнение Гудерлея

$$u_{xx} = au_yu_{yy}, \tag{17}$$

которое используется для описания трансзвуковых течений газа [25].

Уравнение (17) допускает простое точное решение

$$u = \frac{y^3}{3ax^2}, \tag{18}$$

которое является частным случаем сразу двух видов решений (5) и (9). Рассмотрим по порядку обе возможности построения более сложных решений, исходя из решения (18).

1°. Решение (18) и уравнение (17) сохраняют вид при преобразовании масштабирования $\bar{x} = cx$, $\bar{u} = c^{-2}u$. Поэтому, в силу утверждения 1, уравнение (17) имеет более сложное точное решение вида

$$u = x^{-2}\varphi(z), \quad z = y + m\ln x,$$

где функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается ОДУ второго порядка:

$$m^2\varphi''_{zz} - 5m\varphi'_z + 6\varphi = a\varphi'_z\varphi''_{zz}.$$

Это уравнение при $m = 0$ допускает однопараметрическое семейство решений в виде кубического многочлена

$$\varphi(z) = \frac{z^3}{3a} + Cz^2 + aC^2z + \frac{a^2C^3}{3},$$

где C — произвольная постоянная. При $C = 0$ это решение совпадает с исходным решением (18).

2°. Решение (18) и уравнение (17) сохраняют вид также при преобразовании масштабирования $\bar{y} = cy$, $\bar{u} = c^3u$. Поэтому, в силу утверждения 2, можно получить также другое более сложное точное решение

$$u = e^{-3px}\psi(z), \quad z = ye^{px},$$

где $p \neq 0$, а функция $\psi = \psi(z)$ описывается ОДУ:

$$p^2z^2\psi''_{zz} - 5p^2z\psi'_z + 9p^2\psi = a\psi'_z\psi''_{zz}.$$

Пример 4. В газовой динамике встречается нелинейное волновое уравнение

$$u_{tt} = a(u^bu_x)_x, \quad b \neq 0, \tag{19}$$

которое допускает простое точное решение

$$u = a^{-1/b}x^{2/b}t^{-2b}. \tag{20}$$

Это решение принадлежит обоим классам решений (5) и (9). Поэтому, исходя из решения (20), можно построить два более сложных решения, описанных ниже.

1°. Решение (20) и уравнение (19) инвариантны относительно преобразования масштабирования $\bar{t} = ct$, $\bar{u} = c^{-2/b}u$. В силу утверждения 1, уравнение (19) имеет более сложное решение вида

$$u = t^{-2/b}\varphi(z), \quad z = x + m\ln t,$$

где функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается ОДУ:

$$m^2\varphi''_{zz} - \frac{m(b+4)}{b}\varphi'_z + \frac{2(b+2)}{b^2}\varphi = a(\varphi^b\varphi'_z)'_z.$$

2°. Решение (20) и уравнение (19) инвариантны также относительно преобразования масштабирования $\bar{x} = cx$, $\bar{u} = c^{2/b}u$. Поэтому, в силу утверждения 2, уравнение (19) допускает другое решение

$$u = e^{-2pt/b}\psi(y), \quad y = xe^{pt},$$

где $p \neq 0$, а функция $\psi = \psi(y)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ второго порядка

$$p^2y^2\psi''_{yy} + \frac{p^2(b-4)}{b}y\psi'_y + \frac{4p^2}{b^2}\psi = a\left(\psi^b\psi'_y\right)'_y.$$

Пример 5. Система уравнений пограничного слоя на плоской пластине путем введения функции тока сводится к одному нелинейному уравнению третьего порядка

$$u_yu_{xy} - u_xu_{yy} = \nu u_{yyy}, \tag{21}$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости [23].

Уравнение (21) имеет простое решение вида

$$u = \frac{6\nu x}{y}, \tag{22}$$

которое порождает два более сложных решения.

1°. Решение (22) и уравнение (21) не меняются при преобразовании масштабирования $\bar{x} = ax$, $\bar{u} = au$. Поэтому, в силу утверждения 1, уравнение (21) имеет более сложное решение вида

$$u = x\varphi(z), \quad z = y + k\ln x,$$

где k — произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(z)$ удовлетворяет ОДУ:

$$-\varphi\varphi''_{zz} + (\varphi'_z)^2 = \nu\varphi'''_{zzz}.$$

2°. Решение (22) и уравнение (21) не меняются также при преобразовании масштабирования $\bar{y} = ay$, $\bar{u} = u/a$. Поэтому, в силу утверждения 2, уравнение (21) допускает другое решение

$$u = e^{px}\psi(z), \quad z = ye^{px},$$

где $p \neq 0$, а функция $\psi = \psi(z)$ описывается ОДУ:

$$p\psi\psi''_{zz} - 2p(\psi'_z)^2 = \nu\psi'''_{zzz}.$$

Пример 6. Рассмотрим нелинейное эволюционное уравнение, описывающее изменение толщины пленки тяжелой вязкой жидкости, движущейся вдоль горизонтальной супергидрофобной поверхности с переменным коэффициентом поверхностного натяжения

$$u_t = [(au^3 + bx^{2/3}u^2)(u_x - c(x^2u_{xx})_x)]_x, \tag{23}$$

где a, b и c — некоторые постоянные [26, 27].

Уравнение (23) имеет простое решение вида

$$u = x^{2/3}f(t), \tag{24}$$

где функция $f = f(t)$ описывается ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными

$$f'_t = \frac{10}{81}(2c+9)f^3(af+b).$$

Решение (24) и уравнение (23) инвариантны относительно преобразования масштабирования $\bar{x} = kx$, $\bar{u} = k^{2/3}u$. Поэтому, в силу утверждения 2, уравнение (23) имеет также более сложное решение вида

$$u = e^{-2pt/3}\psi(y), \quad y = xe^{pt},$$

где функция $\psi = \psi(y)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ четвертого порядка [26, 27]:

$$\begin{gathered} py\psi_y - \frac{2}{3}p\psi = \\ = [(a\psi^3 + by^{2/3}\psi^2)(\psi_y - (cy^2\psi_{yy})_y)]_y, \end{gathered}$$

где p — произвольная постоянная ($p \neq 0$).

Пример 7. Рассмотрим эволюционное уравнение произвольного порядка n

$$u_t = u^sF(u_x/u, u_{xx}/u, \ldots, u_x^{(n)}/u), \quad s \neq 1. \tag{25}$$

Уравнение (25) имеет простое решение вида

$$u = t^{1/(1-s)}\varphi(x), \tag{26}$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается ОДУ:

$$\frac{\varphi}{1-s} = \varphi^sF(\varphi'_x/\varphi, \varphi''_{xx}/\varphi, \ldots, \varphi_x^{(n)}/\varphi).$$

Решение (26) и уравнение (25) инвариантны относительно преобразования масштабирования $\bar{t} = at$, $\bar{u} = a^{1/(1-s)}u$. Поэтому, в силу утверждения 1, уравнение (25) имеет также более сложное решение вида

$$u = t^{1/(1-s)}\varphi(z), \quad z = x + m\ln t,$$

где m — произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(z)$ удовлетворяет ОДУ:

$$m\varphi'_z + \frac{\varphi}{1-s} = \varphi^s F(\varphi'_z/\varphi, \varphi''_{zz}/\varphi, \ldots, \varphi_z^{(n)}/\varphi).$$

Утверждение 3. *Пусть уравнение*

$$F(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \ldots) = 0, \tag{27}$$

которое не зависит явно от переменных x и t (и поэтому допускает решение типа бегущей волны), не меняется при преобразовании масштабирования искомой функции

$$\bar{u} = au. \tag{28}$$

Тогда это уравнение допускает точное решение (более сложное, чем решение типа бегущей волны), которое можно представить в следующих двух альтернативных формах:

$$\begin{aligned} &u = Ce^{kt}\varphi(z), \quad z = px + qt, \\ &u = Ce^{mx}\psi(z), \quad z = px + qt, \end{aligned} \tag{29}$$

где C, k, p, q — произвольные постоянные ($pq \neq 0$), $m = kp/q$, $\psi(z) = e^{-mz/p}\varphi(z)$. Имеются также более простые решения с разделением переменных вида $u = Ce^{kt}\varphi(x)$ и $u = Ce^{mx}\psi(t)$.

Доказательство. Рассмотрим преобразование, являющееся композицией преобразований сдвига по переменным x и t и преобразования масштабирования искомой функции (28):

$$\bar{x} = x + \frac{1}{p}\ln a, \quad \bar{t} = t - \frac{1}{q}\ln a, \quad \bar{u} = a^{-k/q}u, \tag{30}$$

где $a > 0$ — произвольная постоянная, а p и q — некоторые константы ($pq \neq 0$). Преобразование (30) сохраняет вид уравнения (27) и имеет два функционально независимых инварианта $I_1 = z = px + qt$ и $I_2 = e^{-kt}u$. Поэтому решение, инвариантное относительно преобразования (30), может быть представлено в виде (29).

Пример 8. Рассмотрим нелинейное уравнение типа теплопроводности

$$u_t = bu_{xx} + uf(u_x/u), \tag{31}$$

где $f = f(\xi)$ — произвольная функция.

Уравнение (31) не меняется при преобразовании масштабирования зависимой переменной $\bar{u} = au$. Поэтому, в силу утверждения 3, это уравнение имеет решение вида (29), где функция $\varphi = \varphi(z)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ:

$$k\varphi + q\varphi'_z = bp^2\varphi''_{zz} + \varphi f(p\varphi'_z/\varphi).$$

Пример 9. Рассмотрим более сложное эволюционное уравнение произвольного порядка

$$u_t = uF(u_x/u, u_{xx}/u, \ldots, u_x^{(n)}/u), \tag{32}$$

где $F(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ — произвольная функция.

Уравнение (32) не меняется при преобразовании масштабирования зависимой переменной $\bar{u} = au$. Поэтому, в силу утверждения 3, это уравнение имеет решение вида (29), где функция $\varphi = \varphi(z)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ:

$$k\varphi + q\varphi'_z = \varphi F(p\varphi'_z/\varphi, p^2\varphi''_{zz}/\varphi, \ldots, p^n\varphi_z^{(n)}/\varphi).$$

2.3. Обобщение на случай произвольного числа пространственных переменных

Приведенные выше утверждения 1—3 допускают очевидные обобщения на случай произвольного числа пространственных переменных.

Пример 10. Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности с n пространственными переменными

$$u_t = a\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u^k \frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \quad k \neq 0. \tag{33}$$

Уравнение (33) допускает простое решение с разделением переменных

$$u = t^{-1/k}\varphi(x_1, \ldots, x_n), \tag{34}$$

где функция $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$-\frac{1}{k}\varphi = a\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi^k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right).$$

Решение (34) и уравнение (33) не меняются при преобразовании масштабирования $\bar{t} = ct$, $\bar{u} = c^{-k}u$. Поэтому, в силу утверждения 1, уравнение (33) имеет также более сложное решение вида

$$u = t^{-1/k}\theta(z_1, \ldots z_n), \quad z_i = x_i + m_i \ln t,$$

где m_i — произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(z_1, \ldots z_n)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$-\frac{1}{k}\theta + \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \theta}{\partial z_i} = a\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial z_i}\left(\theta^k \frac{\partial \theta}{\partial z_i}\right).$$

2.4. Обобщение на системы уравнений

Приведенные выше утверждения 1—3 могут быть также использованы для нахождения решений систем уравнений.

Пример 11. Рассмотрим нелинейную систему, состоящую из двух уравнений реакционно-диффузионного типа

$$\begin{aligned} u_t &= a(u^b u_x)_x + uf(u/v), \\ v_t &= a(v^b v_x)_x + vg(u/v), \end{aligned} \tag{35}$$

где a, b — некоторые постоянные ($b \neq 0$), $f(z)$ и $g(z)$ — произвольные функции.

Система уравнений (35) имеет простое решение вида

$$u = x^{2/b}\varphi(t), \quad v = x^{2/b}\psi(t), \qquad (36)$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой ОДУ первого порядка

$$\varphi'_t = \frac{2a(b+2)}{b^2}\varphi^{b+1} + \varphi f(\varphi/\psi),$$
$$\psi'_t = \frac{2a(b+2)}{b^2}\psi^{\mu+1} + \psi g(\varphi/\psi).$$

Решение (36) и система уравнений (35) не меняются при преобразовании масштабирования $\bar{x} = cx$, $\bar{u} = c^{2/b}u$, $\bar{v} = c^{2/b}v$. Поэтому, в силу утверждения 2, система уравнений (35) имеет также более сложное решение вида

$$u = e^{-2mt/b}\Phi(z), \quad v = e^{-2mt/b}\Phi(z), \quad z = xe^{mt},$$

где функции $\Phi = \Phi(z)$ и $\Psi = \Psi(z)$ описываются системой ОДУ:

$$mz\Phi'_z - \frac{2m}{b}\Phi = a(\Phi^b\Phi'_z)'_z + \Phi f(\Phi/\Psi),$$
$$mz\Psi'_z - \frac{2m}{b}\Psi = a(\Psi^b\Psi'_z)'_z + \Psi f(\Phi/\Psi),$$

где m — произвольная постоянная ($m \neq 0$).

Пример 12. Рассмотрим другую нелинейную систему, состоящую из двух уравнений реакционно-диффузионного типа

$$\begin{aligned} u_t &= a(u^b u_x)_x + u^{b+1}f(u/v), \\ v_t &= a(v^b v_x)_x + v^{b+1}g(u/v), \end{aligned} \qquad (37)$$

где a, b — некоторые постоянные ($b \neq 0$), $f(z)$ и $g(z)$ — произвольные функции.

Система уравнений (37) имеет простое решение вида

$$u = t^{-1/b}\varphi(x), \quad v = t^{-1/b}\psi(x), \qquad (38)$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются системой ОДУ второго порядка

$$-\frac{\varphi}{b} = a\left(\varphi^b\varphi'_x\right)'_x + \varphi^{b+1}f(\varphi/\psi),$$
$$-\frac{\psi}{b} = a\left(\psi^b\psi'_x\right)'_x + \psi^{b+1}g(\varphi/\psi).$$

Решение (38) и система уравнений (37) сохраняют вид при преобразовании масштабирования $\bar{t} = ct$, $\bar{u} = c^{-1/b}u$, $\bar{v} = c^{-1/b}v$. В силу утверждения 1, система уравнений (37) имеет также более сложное решение вида

$$u = t^{-1/b}\Phi(z), \quad v = t^{-1/b}\Psi(z), \quad z = x + m\ln t,$$

где m — произвольная постоянная, а функции $\Phi = \Phi(z)$ и $\Psi = \Psi(z)$ удовлетворяют системе ОДУ:

$$-\frac{\Phi}{b} + m\Phi'_z = a\left(\Phi^b\Phi'_z\right)'_z + \Phi^{b+1}f(\Phi/\Psi),$$
$$-\frac{\Psi}{b} + m\Psi'_z = a\left(\Psi^b\Psi'_z\right)'_z + \Psi^{b+1}g(\Phi/\Psi).$$

3. ПОСТРОЕНИЕ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ПУТЕМ ДОБАВЛЕНИЯ СЛАГАЕМЫХ К БОЛЕЕ ПРОСТЫМ РЕШЕНИЯМ

В некоторых случаях простые решения удается обобщить путем добавления к ним одного или нескольких дополнительных слагаемых, что приводит к более сложным решениям с обобщенным разделением переменных [12–15]. Продемонстрируем возможный ход рассуждений в таких случаях на примерах уравнения Буссинеска (14) и уравнения Гудерлея (17).

Пример 13. Как указывалось ранее, уравнение Буссинеска (14) имеет квадратичное по x решение с простым разделением переменных (15), которое запишем в виде

$$u = \varphi(t)x^2, \quad \varphi(t) = -1/(6at). \qquad (39)$$

Попробуем искать более сложное решение в виде суммы

$$u(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x^k, \quad k \neq 2, \qquad (40)$$

первый член которой совпадает с решением (39). Во второе слагаемое формулы (40) входят функция $\psi(t)$ и коэффициент k, которые требуется найти.

Подставив (40) в (14), после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} (\varphi'_t - 6a\varphi^2)x^2 + [\Psi'_t - a(k+1)(k+2)\varphi\psi]x^k &- \\ - ak(2k-1)\psi^2x^{2k-2} &= 0. \end{aligned} \qquad (41)$$

Поскольку это равенство должно выполняться тождественно для любых x, функциональные коэффициенты при различных степенях x в (41) должны равняться нулю. Таким образом, возможны два случая $k = 0$ и $k = 1/2$ (оба соответствуют обращению в нуль коэффициента при x^{2k-2}), которые надо рассмотреть отдельно.

1°. *Первый случай*. Подставив $k = 0$ в (41), для определения функций $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ имеем систему уравнений

$$\varphi'_t - 6a\varphi^2 = 0, \quad \psi'_t - 2a\varphi\psi = 0,$$

общее решение которой определяется формулами

$$\varphi(t) = -\frac{1}{6a(t + C_1)}, \quad \psi(t) = \frac{C_2}{|t + C_1|^{1/3}}, \qquad (42)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

2°. *Второй случай* (решение Баренблатта–Зельдовича дипольного типа [28]). Подставив $k = 1/2$ в (41), получим систему уравнений для определения функций $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$:

$$\varphi'_t - 6a\varphi^2 = 0, \quad \psi'_t - \frac{15}{4}a\varphi\psi = 0.$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$\varphi(t) = -\frac{1}{6a(t + C_1)}, \quad \psi(t) = \frac{C_2}{|t + C_1|^{5/8}}. \qquad (43)$$

Учитывая формулы (40), (42), (43), в итоге получим два трехпараметрических решения с обобщенным разделением переменных уравнения (14):

$$u = -\frac{1}{6a(t + C_1)}(x + C_3)^2 + \frac{C_2}{|t + C_1|^{1/3}},$$
$$u = -\frac{1}{6a(t + C_1)}(x + C_3)^2 + \frac{C_2}{|t + C_1|^{5/8}}(x + C_3)^{1/2},$$

где в целях большей общности дополнительно добавлен произвольный сдвиг по пространственной переменной x.

Замечание 3. Волновое уравнение с квадратичной нелинейностью

$$u_{tt} = a(uu_x)_x,$$

также допускает решения вида (40) при $k = 0$ и $k = 1/2$.

Пример 14. Вернемся теперь к уравнению Гудерлея (17). Это уравнение допускает простое точное решение (18), которое запишем в виде

$$u = f(x)y^3, \quad f(x) = 1/(3ax^2).$$

Будем искать более сложные решения (с обобщенным разделением переменных) уравнения (17) в виде

$$u(x, y) = \varphi(x)y^k + \psi(x), \qquad (44)$$

где функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и константа $k \neq 0$ являются искомыми (решение (18) является частным случаем решения (44) при $k = 3$ и $\psi = 0$). Важно отметить, что подобные двучленные решения УрЧП достаточно часто встречаются на практике и являются наиболее простыми решениями с обобщенным разделением переменных.

Подставив (44) в (17), после перестановки членов приходим к соотношению

$$\varphi''_{xx}y^k - ak^2(k-1)\varphi^2 y^{2k-3} + \psi''_{xx} = 0, \qquad (45)$$

которое содержит степенные функции y^k и y^{2k-3} и должно удовлетворяться тождественно для любых y.

Рассмотрим два случая: $\psi''_{xx} = 0$ и $\psi''_{xx} \neq 0$.

1°. *Первый случай*. При $\psi''_{xx} = 0$ получим двучленное уравнение с разделяющимися переменными, которому можно удовлетворить, если положить

$$k = 3, \quad \varphi''_{xx} - 18a\varphi^2 = 0. \qquad (46)$$

Общее решение автономного ОДУ (46) можно представить в неявной форме

$$x = \pm\int(12a\varphi^3 + C_1)^{-1/2}d\varphi + C_2.$$

Кроме того, это уравнение допускает частное решение степенного вида $\varphi = \frac{1}{3a}(x + C_1)^{-2}$, что приводит к трехпараметрическому точному решению уравнения (17):

$$u = \frac{1}{3a}(x + C_1)^{-2}y^3 + C_2x + C_3, \qquad (47)$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

2°. *Второй случай*. Чтобы сбалансировать функцию $\psi''_{xx} \neq 0$ со вторым членом в равенстве (45), надо положить $k = 3/2$. В результате получим двучленное уравнение, которому можно удовлетворить, если положить

$$\varphi''_{xx} = 0, \quad \psi''_{xx} = \frac{9}{8}a\varphi^2.$$

Эти уравнения легко интегрируются и приводят к четырехпараметрическому точному решению уравнения (17):

$$u = (C_1x + C_2)y^{3/2} + \frac{3a}{32C_1^2}(C_1x + C_2)^4 + C_3x + C_4, \qquad (48)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

Пример 15. Вернемся к уравнению гидродинамического пограничного слоя (21). Нетрудно проверить, что это уравнение допускает автомодельное решение [31]:

$$u = F(\xi), \quad \xi = y/x, \qquad (49)$$

где функция $F = F(\xi)$ удовлетворяет ОДУ третьего порядка $-(F'_z)^2 = \nu F'''_{zzz}$.

Ищем более общее решение уравнения (21), добавив к (49) функцию $\varphi(x)$:

$$u = F(\xi) + \varphi(x), \quad \xi = y/x.$$

Несложные выкладки показывают, что $\varphi(x) = a\ln x$, где a — произвольная постоянная. В итоге получим неавтомодельное решение уравнения пограничного слоя (21) вида [13]:

$$u = F(\xi) + a\ln x, \quad \xi = y/x,$$

где функция $F = F(\xi)$ описывается ОДУ $-(F'_z)^2 - aF''_{zz} = \nu F'''_{zzz}$.

4. ПОСТРОЕНИЕ СОСТАВНЫХ РЕШЕНИЙ (НЕЛИНЕЙНАЯ СУПЕРПОЗИЦИЯ РЕШЕНИЙ)

В некоторых случаях два однотипных, но различных решения рассматриваемого нелинейного уравнения удается объединить и получить более общее составное решение. Продемонстрируем возможный ход рассуждений в таких случаях на примерах уравнения Гудерлея и нелинейного уравнения диффузии с объемной химической реакцией второго порядка.

Пример 16. Из выражений (47) и (48) следует, что уравнение Гудерлея (17) имеет два однотипных решения $u_1 = \varphi y^{3/2} + \psi$ и $u_2 = \varphi y^3 + \psi$, отличающихся друг от друга показателем степени y. Это обстоятельство наводит на мысль попытаться построить более общее решение уравнения (17), включающее сразу оба члена с различными показателями степени. Другими словами, ищем составное решение вида

$$u(x, y) = \varphi_1(x)y^3 + \varphi_2(x)y^{3/2} + \psi(x). \tag{50}$$

Подставим его в уравнение (17). После объединения членов при степенных функциях $y^{3n/2}$ $(n = 0, 1, 2)$, получим

$$\left(\varphi_1'' - 18a\varphi_1^2\right)y^3 + \left(\varphi_2'' - \frac{45}{4}a\varphi_1\varphi_2\right)y^{3/2} + \\ + \psi'' - \frac{9}{8}a\varphi_2^2 = 0.$$

Чтобы это равенство выполнялось для любых y, надо приравнять нулю коэффициенты при $y^{3n/2}$. В результате приходим к системе ОДУ:

$$\begin{aligned} &\varphi_1'' - 18a\varphi_1^2 = 0,\\ &\varphi_2'' - \frac{45}{4}a\varphi_1\varphi_2 = 0,\\ &\psi'' - \frac{9}{8}a\varphi_2^2 = 0. \end{aligned} \tag{51}$$

Таким образом конструктивно доказано, что уравнение (17) допускает решение вида (50) (это решение было получено в работе [29]).

Можно показать, что система (51) допускает точное решение

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{3a}(x + C_1)^{-2},\\ \varphi_2 &= C_2(x + C_1)^{5/2} + C_3(x + C_1)^{-3/2},\\ \psi &= \frac{3a}{112}C_2^2(x + C_1)^7 + \frac{3}{8}aC_2C_3(x + C_1)^3 + \\ &+ \frac{9}{16}aC_3^2(x + C_1)^{-1} + C_4x + C_5. \end{aligned}$$

Пример 17. Рассмотрим теперь нелинейное уравнение диффузии с объемной химической реакцией второго порядка

$$u_t = a(uu_x) - bu^2. \tag{52}$$

Процедуру построения составного решения этого уравнения проведем в два этапа: сначала найдем два достаточно простых решений, а затем, используя эти решения, построим уже составное решение.

1°. *Решение экспоненциального вида по* x. Точные решения с обобщенным разделением переменных уравнения (52) ищем в виде

$$u(x, t) = \varphi(t)e^{\lambda x} + \psi(t), \tag{53}$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ и постоянная λ подлежат определению в ходе дальнейшего исследования. Подставив (53) в (52) и собрав подобные члены при экспонентах $e^{n\lambda x}$ $(n = 0, 1, 2)$, получим

$$(b - 2a\lambda^2)\varphi^2e^{2\lambda x} + \\ + [\varphi_t' + (2b - a\lambda^2)\varphi\psi]e^{\lambda x} + \psi_t' + b\psi^2 = 0.$$

Поскольку это равенство должно выполняться тождественно для любых x, функциональные коэффициенты при $e^{n\lambda x}$ надо приравнять к нулю. В результате приходим к простой дифференциально-алгебраической системе

$$\begin{aligned} &b - 2a\lambda^2 = 0,\\ &\varphi_t' + (2b - a\lambda^2)\varphi\psi = 0,\\ &\psi_t' + b\psi^2 = 0, \end{aligned}$$

которая допускает два решения

$$\lambda = \pm\left(\frac{b}{2a}\right)^{1/2}, \quad \varphi = \frac{C_1}{|t + C_2|^{3/2}}, \quad \psi = \frac{1}{b(t + C_2)}, \tag{54}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2°. *Составное решение экспоненциального вида по* x. Из соотношений (53) и (54) следует, что уравнение (52) имеет два решения $u_{1,2} = \varphi e^{\pm\lambda x} + \psi$. По структуре они отличаются друг от друга только знаком показателя экспоненты λ.

Это обстоятельство наводит на мысль попытаться построить более общее решение уравнения (52), включающее сразу оба экспоненциальных члена. Другими словами, ищем составное решение вида

$$u(x,t) = \varphi_1(t)e^{-\lambda x} + \varphi_2(t)e^{\lambda x} + \psi(t), \quad \lambda = \left(\frac{b}{2a}\right)^{1/2}. \quad (55)$$

Подставив его в (52), после элементарных преобразований имеем

$$\left[(\varphi_1)'_t + \frac{3}{2}b\varphi_1\psi\right]e^{-\lambda x} + \left[(\varphi_2)'_t + \frac{3}{2}b\varphi_2\psi\right]e^{\lambda x} + \\ + \psi'_t + b(2\varphi_1\varphi_2 + \psi^2) = 0.$$

Приравнивая нулю функциональные коэффициенты при $e^{n\lambda x}$ $(n = 0, \pm 1)$, приходим к системе ОДУ первого порядка

$$(\varphi_1)'_t + \frac{3}{2}b\varphi_1\psi = 0, \quad (\varphi_2)'_t + \frac{3}{2}b\varphi_2\psi = 0, \\ \psi'_t + b(2\varphi_1\varphi_2 + \psi^2) = 0. \quad (56)$$

Таким образом доказано, что уравнение (52) допускает решение вида (55).

Исключив ψ из первых двух уравнений в (56), получим равенство $(\varphi_1)'_t/\varphi_1 = (\varphi_2)'_t/\varphi_2$. Отсюда следует, что $\varphi_1 = A\varphi(t)$, $\varphi_2 = B\varphi(t)$, где A и B – произвольные постоянные. Поэтому решение с обобщенным разделением переменных (55) приводится к виду

$$u(x,t) = \varphi(t)(Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x}) + \psi(t), \quad \lambda = \left(\frac{b}{2a}\right)^{1/2}, \quad (57)$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ, состоящей из двух уравнений

$$\varphi'_t + \frac{3}{2}b\varphi\psi = 0, \quad \psi'_t + b(2AB\varphi^2 + \psi^2) = 0. \quad (58)$$

Эта автономная система путем исключения t сводится к одному ОДУ, которое является однородным и поэтому может быть проинтегрировано [30]. Отметим, что система уравнений (58) при $AB > 0$ допускает два простых решения

$$\varphi = \pm\frac{1}{3b\sqrt{AB}(t+C)}, \quad \psi = \frac{2}{3b(t+C)},$$

которые определяют решение (57) в виде произведения функций разных аргументов.

3°. *Решение тригонометрического вида по* x. При записи формул (55) и (57) неявно подразумевалось, что $ab > 0$. При $ab < 0$ имеем

$$\lambda = i\beta, \quad \beta = \left(-\frac{b}{2a}\right)^{1/2}, \quad i^2 = -1.$$

В этом случае в решении (57) вместо экспоненциальных функций появляются тригонометрические функции, т.е. его можно представить в виде

$$u(x,t) = \varphi(t)[A_1\cos(\beta x) + B_1\sin(\beta x)] + \psi(t), \\ \beta = \left(-\frac{b}{2a}\right)^{1/2}, \quad (59)$$

где A_1 и B_1 – произвольные постоянные. Подставив (59) в уравнение (52) и проведя выкладки аналогичные сделанным в п. 2°, получим следующую нелинейную систему ОДУ для определения функций $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$:

$$\varphi'_t + \frac{3}{2}b\varphi\psi = 0, \\ \psi'_t + b\left[\frac{1}{2}\left(A_1^2 + B_1^2\right)\varphi^2 + \psi^2\right] = 0. \quad (60)$$

Эта система допускает два простых решения

$$\varphi = \pm\frac{2}{3b\sqrt{A_1^2 + B_1^2}(t+C)}, \quad \psi = \frac{2}{3b(t+C)},$$

которые определяют решение (59) в виде произведения функций разных аргументов.

Замечание 4. Решение (59) и систему уравнений (60) можно получить непосредственно из решения (57) и системы уравнений (58), если в последних формально положить

$$e^{\lambda x} = e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i\sin(\beta x), \\ e^{-\lambda x} = e^{-i\beta x} = \cos(\beta x) - i\sin(\beta x), \\ A = \frac{1}{2}(A_1 + iB_1), \quad B = \frac{1}{2}(A_1 - iB), \\ A_1 = A + B, \quad B_1 = i(B - A).$$

5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕШЕНИЙ БОЛЕЕ ПРОСТЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ УРАВНЕНИЙ. ПРИНЦИП АНАЛОГИИ РЕШЕНИЙ

Нередко для построения точных решений сложных нелинейных дифференциальных уравнений удается использовать решения более простых уравнений. Проиллюстрируем ход рассуждений в подобных случаях на конкретных примерах.

Пример 18. Реакционно-диффузионное уравнение со степенной нелинейностью

$$u_t = au_{xx} + bu^k, \quad (61)$$

при $k \neq 1$ допускает автомодельное решение [33]:

$$u(x,t) = t^{\frac{1}{1-k}} U(z), \quad z = xt^{-1/2}, \tag{62}$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ:

$$\frac{1}{1-k} U - \frac{1}{2} z U'_z = a U''_{zz} + U^k.$$

Рассмотрим теперь существенно более сложное нелинейное функционально-дифференциальное уравнение типа пантографа

$$u_t = a u_{xx} + b w^k, \quad w = u(px, qt), \tag{63}$$

где p и q — свободные параметры ($p > 0$, $q > 0$). Значения параметров $0 < p < 1$ и $0 < q < 1$ соответствуют уравнениям с переменным запаздыванием по двум аргументам.

Функционально-дифференциальное уравнение (63) в частном случае $p = q = 1$ переходит в обычное уравнение с частными производными (61). При $k \neq 1$ решение уравнения типа пантографа (63), как и для уравнения (61), ищем в виде (62). В результате для функции $U = U(z)$ получим нелинейное ОДУ типа пантографа:

$$\begin{gathered} \frac{1}{1-k} U - \frac{1}{2} z U'_z = a U''_{zz} + b q^{\frac{k}{1-k}} W^k, \\ W = U(sz), \quad s = pq^{-1/2}. \end{gathered} \tag{64}$$

Замечание 5. Уравнение (63) с переменным запаздыванием при $0 < p$, $q < 1$ в частном случае $p = q^{1/2}$ имеет точное решение, которое выражается через решение ОДУ без запаздывания (64) при $s = 1$, при $p < q^{1/2}$ уравнение (63) сводится к ОДУ с запаздыванием при $s < 1$, а при $p > q^{1/2}$ — к ОДУ с опережением при $s > 1$. Более того, решение уравнения (63) с опережением при $p, q > 1$ при подходящих значениях параметров p и q также может выражаться через решение ОДУ с запаздыванием ($s < 1$), без запаздывания ($s = 1$) и с опережением ($s > 1$).

Замечание 6. Функционально-дифференциальные уравнения типа пантографа, которые содержат искомые функции с растяжением (при $0 < p < 1$) или сжатием (при $p > 1$) аргументов, используются для математического моделирования различных процессов в биологии [34–38], астрофизике [39], электродинамике [40], теории популяций [41], теории чисел [42], стохастических играх [43], теории графов [44], теории риска и очередей [45], теории нейронных сетей [46] и технике [47].

Пример 19. Рассмотрим теперь реакционно-диффузионное уравнение с экспоненциальной нелинейностью

$$u_t = a u_{xx} + b e^{\lambda u}, \tag{65}$$

которое при $\lambda \neq 0$ допускает инвариантное решение [33]:

$$u(x,t) = U(z) - \frac{1}{\lambda} \ln t, \quad z = xt^{-1/2}, \tag{66}$$

где функция $U = U(z)$ описывается нелинейным ОДУ:

$$-\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} z U'_z = a U''_{zz} + b e^{\lambda U}.$$

Рассмотрим теперь существенно более сложное нелинейное функционально-дифференциальное уравнение типа пантографа

$$u_t = a u_{xx} + b e^{\lambda w}, \quad w = u(px, qt), \tag{67}$$

где p и q — свободные параметры ($p > 0$, $q > 0$).

Функционально-дифференциальное уравнение (67) при $p = q = 1$ переходит в обычное уравнение с частными производными (65). При $\lambda \neq 0$ решение уравнения типа пантографа (67), как и для уравнения (65), ищем в виде (66). В итоге для функции $U = U(z)$ получим нелинейное ОДУ типа пантографа:

$$\begin{gathered} -\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} z U'_z = a U''_{zz} + \frac{b}{q} e^{\lambda W}, \\ W = U(sz), \quad s = pq^{-1/2}. \end{gathered}$$

В частном случае при $p = q^{1/2}$ это уравнение является стандартным ОДУ (без растяжения или сжатия аргумента).

Пример 20. Нетрудно показать, что нелинейное уравнение типа Клейна–Гордона

$$u_{tt} = a u_{xx} + u(b \ln u + c), \tag{68}$$

допускает решение с разделением переменных

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t). \tag{69}$$

Более сложное, чем (68), нелинейное функционально-дифференциальное уравнение типа пантографа

$$u_{tt} = a u_{xx} + u(b \ln w + c), \quad w = u(px, qt), \tag{70}$$

также имеет решение с разделением переменных (69), где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейными ОДУ типа пантографа

$$a\varphi''_{xx} + \varphi(b\bar{\varphi} + c) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px);$$

$$\psi''_{tt} = b\psi \ln \bar{\psi}, \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Замечание 7. Более сложное, чем (70), функционально-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} = a u_{xx} + u(b \ln w + c), \quad w = u(\xi(x), \eta(t)), \tag{71}$$

где $\xi(x)$ и $\eta(t)$ — произвольные функции, также допускает решение с разделением переменных вида (69).

В частности, при $\xi(x) = x - x_0$ и $\eta(t) = t - t_0$, где x_0 и t_0 — некоторые положительные константы, уравнение (71) является функционально-дифференциальным уравнением с постоянным запаздыванием по двум аргументам.

Ниже сформулирован достаточно общий метод построения точных решений функционально-дифференциальных уравнений с частными производными типа пантографа в виде следующего принципа.

Принцип аналогии решений. *Структура точных решений функционально-дифференциальных уравнений вида*

$$\begin{gathered} F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\,\ldots, \\ w,w_x,w_t,w_{xx},w_{xt},w_{tt},\,\ldots) = 0, \qquad w = u(px,qt) \end{gathered} \tag{72}$$

часто (но не всегда) определяется структурой решений более простых уравнений в частных производных:

$$\begin{gathered} F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\,\ldots, \\ u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\,\ldots) = 0. \end{gathered} \tag{73}$$

В уравнении (73) отсутствуют искомые функции с растяжением или сжатием аргументов; оно получается из (72) путем формальной замены w на u.

Рассмотренные в примерах 18–20 решения были получены путем использования принципа аналогий.

Замечание 8. В [48] описан ряд более сложных точных решений нелинейных уравнений в частных производных типа пантографа, которые были построены с помощью принципа аналогии решений (этот принцип в цитируемой статье сформулирован не был).

6. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В случае линейных уравнений с частными производными для построения более сложных решений, исходя из более простых решений, можно использовать следующее утверждение.

Утверждение 4. *Пусть линейное однородное уравнение с частными производными с двумя независимыми переменными x и t* имеет *однопараметрическое решение вида $u = \varphi(x,t,c)$, где c — параметр, который не входит в исходное уравнение. Тогда рассматриваемое уравнение имеет также два двухпараметрических решения*

$$u_1 = \mathrm{Re}\varphi(x,t,a+ib), \qquad u_2 = \mathrm{Im}\varphi(x,t,a+ib),$$

где a и b — произвольные действительные постоянные, $\mathrm{Re}z$ *и* $\mathrm{Im}z$ *— действительная и мнимая части комплексного числа z.*

Доказательство. Справедливость предложения следует из линейности уравнения и из того, что решение $u = \varphi(x,t,c)$ также является решением при $c = a + ib$.

Из предложения 4 следует справедливость следующих двух следствий.

Следствие 1. *Пусть левая часть линейного однородного уравнения с частными производными не зависит явно от независимой переменной t и имеет решение $u = \varphi(x,t)$. Тогда это уравнение имеет также два однопараметрических семейства решений*

$$u_1 = \mathrm{Re}\varphi(x,t+ia), \qquad u_2 = \mathrm{Im}\varphi(x,t+ia),$$

где a — произвольная действительная постоянная.

Следствие 2. *Пусть левая часть линейного однородного уравнения с частными производными не зависит явно от независимой переменной x и имеет решение $u = \varphi(x,t)$. Тогда это уравнение имеет также два однопараметрических семейства решений*

$$u_1 = \mathrm{Re}\varphi(x+ia,t), \qquad u_2 = \mathrm{Im}\varphi(x+ia,t),$$

где a — произвольная действительная постоянная.

Пример 21. Рассмотрим линейное уравнение теплопроводности

$$u_t - u_{xx} = 0. \tag{74}$$

Нетрудно проверить, что это уравнение допускает точное решение экспоненциального вида

$$u = \exp(c^2t + cx),$$

где c — произвольный параметр.

Используя утверждение 4, получим два более сложных двухпараметрических семейства точных решений уравнения (74):

$$\begin{gathered} u_1 = \mathrm{Re}\exp(c^2t + cx)|_{c=a+ib} = \\ = \exp[(a^2 - b^2)t + ax]\cos[b(2at + x)], \\ u_2 = \mathrm{Im}\exp(c^2t + cx)|_{c=a+ib} = \\ = \exp[(a^2 - b^2)t + ax]\sin[b(2at + x)]. \end{gathered}$$

Пример 22. Рассмотрим линейное волновое уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} = 0. \tag{75}$$

Легко проверить, что уравнение (75) допускает преобразования сдвига по обоим независимым переменным и имеет частное решение

$$u = \frac{x}{x^2 - t^2}. \tag{76}$$

Делая в решении (76) сдвиг с мнимым параметром по переменной t и используя следствие 1, находим два более сложных однопараметрических семейства решений уравнения (75):

$$u_1 = \operatorname{Re}\frac{x}{x^2-(t+ia)^2} = \frac{x(x^2-t^2+a^2)}{(x^2-t^2+a^2)^2+4a^2t^2},$$
$$u_2 = \operatorname{Im}\frac{x}{x^2-(t+ia)^2} = \frac{2axt}{(x^2-t^2+a^2)^2+4a^2t^2}.$$

Делая в решении (76) сдвиг с мнимым параметром по переменной x и используя следствие 2, находим два других однопараметрических семейства решений:

$$u_3 = \operatorname{Re}\frac{x+ia}{(x+ia)^2-t^2} = \frac{x(x^2-t^2+a^2)}{(x^2-t^2-a^2)^2+4a^2x^2},$$
$$u_4 = \operatorname{Im}\frac{x+ia}{(x+ia)^2-t^2} = \frac{a(x^2+t^2+a^2)}{(x^2-t^2-a^2)^2+4a^2x^2}.$$

Пример 23. Рассмотрим линейное уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x, \tag{77}$$

которое описывает двумерные процессы с осевой симметрией, где x — радиальная координата. Нетрудно проверить, что уравнение (77) допускает преобразование сдвига по переменной t и имеет частное решение

$$u = \frac{1}{t}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right). \tag{78}$$

Делая в решении (78) сдвиг с мнимым параметром по переменной t и используя следствие 1, находим два более сложных однопараметрических семейства решений:

$$u_3 = \operatorname{Re}\frac{1}{t+ia}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t+ia)}\right) =$$
$$= \frac{1}{t^2+a^2}\exp\left(-\frac{x^2t}{4(t^2+a^2)}\right)\times$$
$$\times\left(t\cos\frac{ax^2}{4(t^2+a^2)} + a\sin\frac{ax^2}{4(t^2+a^2)}\right),$$
$$u_4 = \operatorname{Im}\frac{1}{t+ia}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t+ia)}\right) =$$
$$= \frac{1}{t^2+a^2}\exp\left(-\frac{x^2t}{4(t^2+a^2)}\right)\times$$
$$\times\left(a\cos\frac{ax^2}{4(t^2+a^2)} - t\sin\frac{ax^2}{4(t^2+a^2)}\right).$$

Пример 24. Рассмотрим линейное волновое уравнение с переменными коэффициентами

$$u_{tt} - (xu_x)_x = 0. \tag{79}$$

Это уравнение допускает преобразование сдвига по переменной t и имеет точное решение

$$u = \frac{Ct}{(4x-t^2)^{3/2}}, \tag{80}$$

где C — произвольная постоянная.

Делая в решении (80) сдвиг с мнимым параметром по переменной t и используя следствие 1, можно найти два более сложных однопараметрических семейства решений по формулам

$$u_1 = \operatorname{Re}\frac{C(t+ia)}{(4x-(t+ia)^2)^{3/2}},$$
$$u_2 = \operatorname{Im}\frac{C(t+ia)}{(4x-(t+ia)^2)^{3/2}}.$$

Окончательный вид этих решений здесь не приводится, ввиду громоздкости их записи. Решение u_1 было получено в [49] и было использовано для описания распространения локализованных возмущений в одномерной мелкой воде над наклонным дном. Отметим, что в работе [50] интегрированием по параметру a было получено другое точное решение уравнения (79).

7. ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПУТЕМ ПЕРЕХОДА ОТ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ К КОМПЛЕКСНЫМ ПАРАМЕТРАМ

Замечание 4 допускает обобщение, которое сформулируем в виде следующего утверждения.

Утверждение 5. *Пусть нелинейное уравнение имеет точное решение, содержащее тригонометрические функции вида*

$$u = F(x, t, A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x), \beta^2), \tag{81}$$

где A, B, β — свободные действительные параметры, которые не входят в рассматриваемое уравнение. Тогда это уравнение имеет также точное решение, содержащее гиперболические функции:

$$u = F(x, t, \bar{A}\cosh(\lambda x) + \bar{B}\sinh(\lambda x), -\lambda^2), \tag{82}$$

где $\bar{A}$, $\bar{B}$, λ — свободные действительные параметры. Верно и обратное: если уравнение имеет решение (82)*, то оно имеет также точное решение* (81).

Решение (82) получается из (81) путем переобозначения параметров $\beta = i\lambda$, $A = \bar{A}$, $B = -i\bar{B}$, $i^2 = -1$.

Пример 25. Рассмотрим нелинейное уравнение четверного порядка

$$u_y(\Delta u)_x - u_x(\Delta u)_y = \nu\Delta\Delta u, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}, \tag{83}$$

к которому сводятся стационарные уравнения Навье–Стокса в плоском случае [32].

Уравнение (83) имеет точное решение

$$u(x, y) = [\bar{A}\sinh(\lambda x) + \bar{B}\cosh(\lambda x)]e^{-\gamma y} + \\ + \frac{\nu}{\gamma}(\gamma^2 + \lambda^2)x.$$

Поэтому это уравнение имеет также точное решение

$$u(x, y) = [A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)]e^{-\gamma y} + \frac{\nu}{\gamma}(\gamma^2 - \beta^2)x.$$

Приведенные решения и другие примеры такого рода можно найти в [13].

8. КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Описан ряд простых, но достаточно эффективных, методов построения точных решений нелинейных уравнений с частными производными, которые не требуют специальной подготовки и приводят к небольшому объему промежуточных вычислений. Эти методы базируются на следующих двух основных идеях: (i) простые точные решения могут служить основой для построения более сложных решений рассматриваемых уравнений; (ii) точные решения одних уравнений могут служить основой для построения решений более сложных уравнений. Эффективность предложенных методов иллюстрируется большим числом конкретных примеров построения точных решений нелинейных уравнений теории тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамики и газовой динамики. Помимо точных решений уравнений с частными производными описаны также некоторые точные решения нелинейных функционально-дифференциальных уравнений.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проекты государственного задания № АААА-А20-120011690135-5 и № 0723-2020-0036) и грантов РФФИ № 18-29-10025 и № 18-01-00890.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978.
2. *Bluman G.W., Cole J.D.* Similarity Methods for Differential Equations. New York: Springer, 1974.
3. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1989.
4. *Ibragimov N.H. (Ed.)* CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. Boca Raton: CRC Press, 1994.
5. *Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначев В.В., Родионов А.А.* Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994.
6. *Bluman G.W., Cole J.D.* The general similarity solution of the heat equation // Journal of Mathematics and Mechanics. 1969. V. 18. № 11. P. 1025–1042.
7. *Levi D., Winternitz P.* Nonclassical symmetry reduction: Example of the Boussinesq equation // J. Phys. A. 1989. V. 22. P. 2915–2924.
8. *Nucci M.C., Clarkson P.A.* The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh–Nagumo equation // Phys. Lett. A. 1992. V. 164. P. 49–56.
9. *Cherniha R., Serov M., Pliukhin O.* Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2018.
10. *Clarkson P.A., Kruskal M.D.* New similarity reductions of the Boussinesq equation // Journal of Mathematical Physics. 1989. V. 30. № 10. P. 2201–2213.
11. *Polyanin A.D.* Comparison of the effectiveness of different methods for constructing exact solutions to nonlinear PDEs. Generalizations and new solutions // Mathematics. 2019. V. 7. № 5. P. 386.
12. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
13. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.
14. *Полянин А.Д., Журов А.И.* Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. М.: Издательство "ИПМех РАН", 2020.
15. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2007.
16. *Polyanin A.D.* Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients // Int. J. Non-Linear Mech. 2019. V. 111. P. 95–105.
17. *Polyanin A.D.* Functional separation of variables in nonlinear PDEs: General approach, new solutions of diffusion-type equations // Mathematics. 2020. V. 8. № 1. P. 90.
18. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Separation of variables in PDEs using nonlinear transformations: Applications to reaction-diffusion type equations // Applied Math. Letters. 2020. V. 100. 106055.
19. *Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
20. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 60 с.

21. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики, 2-е изд. Долгопрудный: Интеллект, 2010.

22. *Конт Р.М., Мюзетт М.* Метод Пенлеве и его приложения. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011.

23. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.

24. *Boussinesq J.* Recherches théorique sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources // J. Math. Pures Appl. 1904. V. 10. № 1. P. 5–78.

25. *Гудерлей К.Г.* Теория околозвуковых течений. М.: Иностранная литература, 1960.

26. *Aksenov A.V., Sudarikova A.D., Chicherin I.S.* The surface tension effect on viscous liquid spreading along a superhydrophobic surface // Journal of Physics: Conference Series. 2017. V. 788. 01200.

27. *Аксенов А.В., Сударикова А.Д., Чичерин И.С.* Влияние поверхностного натяжения на растекание вязкой жидкости вдоль супергидрофобной поверхности. I. Плоскопараллельное движение // Вестник Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ". 2016. Т. 5. № 6. С. 489–496.

28. *Баренблатт Г.И., Зельдович Я.Б.* О решении типа диполя в задачах нестационарной фильтрации газа при политропическом режиме // Прикл. мат. мех. 1957. Т. 21. Вып. 5. С. 718–720.

29. *Титов С.С.* Метод конечномерных колец для решения нелинейных уравнений математической физики // Аэродинамика (ред. Т.П. Иванова), Саратовский ун-т. 1988. С. 104–110.

30. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. Boca Raton–London: CRC Press, 2018.

31. *Павловский Ю.Н.* Исследование некоторых инвариантных решений уравнений пограничного слоя // Выч. мат. и мат. физика. 1961. Т. 1. № 2. С. 280–294.

32. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.

33. *Дородницын В.А.* Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником // Ж. вычисл. мат. и мат. физики. 1982. Т. 22. № 6. С. 1393–1400.

34. *Hall A.J., Wake G.C.* A functional differential equation arising in the modelling of cell growth // J. Aust. Math. Soc. Ser. B. 1989. V. 30. P. 424–435.

35. *Hall A.J., Wake G.C., Gandar P.W.* Steady size distributions for cells in one dimensional plant tissues // J. Math. Biol. 1991. V. 30. P. 101–123.

36. *Derfel G., van Brunt B., Wake G.C.* A cell growth model revisited // Functional Differential Equations. 2012. V. 19. № 1–2. P. 71–81.

37. *Zaidi A.A., Van Brunt B., Wake G.C.* Solutions to an advanced functional partial differential equation of the pantograph type // Proc. R. Soc. A. 2015. V. 471. 20140947.

38. *Efendiev M., van Brunt B., Wake G.C., Zaidi A.A.* A functional partial differential equation arising in a cell growth model with dispersion // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41. № 4. P. 1541–1553.

39. *Ambartsumyan V.A.* On the fluctuation of the brightness of the Milky Way // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1944. V. 44. P. 223–226.

40. *Dehghan M., Shakeri F.* The use of the decomposition procedure of Adomian for solving a delay differential equation arising in electrodynamics // Phys. Scripta. 2008. V. 78. № 6. 065004.

41. *Ajello W.G., Freedman H.I., Wu J.* A model of stage structured population growth with density depended time delay // SIAM J. Appl. Math. 1992. V. 52. P. 855–869.

42. *Mahler K.* On a special functional equation // J. London Math. Soc. 1940. V. 1. № 2. P. 115–123.

43. *Ferguson T.S.* Lose a dollar or double your fortune // In: Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, V. III (eds. L.M. Le Cam et al.). P. 657–666. Berkeley, Univ. California Press, 1972.

44. *Robinson R.W.* Counting labeled acyclic digraphs // In: New Directions in the Theory of Graphs (ed. *F. Harari*). P. 239–273. New York: Academic Press, 1973.

45. *Gaver D.P.* An absorption probablility problem // J. Math. Anal. Appl. 1964. V. 9. P. 384–393.

46. *Zhang F., Zhang Y.* State estimation of neural networks with both time-varying delays and norm-bounded parameter uncertainties via a delay decomposition approach // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2013. V. 18. № 12. P. 3517–3529.

47. *Ockendon J.R., Tayler A.B.* The dynamics of a current collection system for an electric locomotive // Proc. R. Soc. Lond. A. 1971. V. 332. P. 447–468.

48. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г.* Точные решения нелинейных уравнений в частных производных с переменным запаздыванием типа пантографа // Вестник НИЯУ МИФИ. 2020. Т. 9. № 4. С. 315–328.

49. *Доброхотов С.Ю., Тироцци Б.* Локализованные решения одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды со скоростью $c = \sqrt{x}$ // Успехи математических наук. 2010. Т. 65. Вып. 1. С. 185–186.

50. *Аксенов А.В., Доброхотов С.Ю., Дружков К.П.* Точные решения типа "ступеньки" одномерных уравнений мелкой воды над наклонным дном // Математические заметки. 2018. Т. 104. Вып. 6. С. 930–936.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 5, pp. 420–437

Using Simple Solutions of Nonlinear Equations of Mathematical Physics to Construct More Complex Solutions

A. D. Polyanin[a,#] **and A. V. Aksenov**[b,c,d,##]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia*

[b] *Moscow State University, Moscow, 119992 Russia*

[c] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[d] *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 125047 Russia*

[#]*e-mail: polyanin@ipmnet.ru*

[##]*e-mail: aksenov@mech.math.msu.su*

Received October 25, 2020; revised October 25, 2020; accepted November 24, 2020

Abstract—A number of simple, but quite efficient, methods for constructing exact solutions of nonlinear partial differential equations that do not require special training and require a small amount of intermediate calculations are described. These methods are based on the following two main ideas: (i) simple exact solutions can serve as the basis for constructing more complex solutions of the equations under consideration; (ii) exact solutions of some equations can serve as the basis for constructing solutions of more complex equations. In particular, a method for constructing complex solutions based on simple solutions using translation and scaling transformations is proposed. It is shown that quite complex solutions can be obtain in some cases by adding terms to simpler solutions. Situations where a more complex composite solution can be constructed using similar simple solutions (nonlinear superposition of solutions) are considered. A method for constructing complex exact solutions of linear equations by introducing a complex parameter into more simple solutions is described. The efficiency of the proposed methods is illustrated by a large number of particular examples. Nonlinear heat conduction equations, reaction–diffusion equations, nonlinear wave equations, equations of motion in porous media, hydrodynamic boundary layer equations, equations of motion of a liquid film, gas dynamics equations, Navier–Stokes equations, etc. are considered. In addition to exact solutions of ordinary partial differential equations, some exact solutions of nonlinear functional-differential equations of the pantograph type with partial derivatives that, in addition to the required function, also contain functions with stretching or shrinking independent variables are described. The principle of analogy is formulated, which makes it possible to efficiently construct exact solutions of such functional-differential equations.

Keywords: exact solutions, nonlinear partial differential equations, reaction-diffusion equations, nonlinear wave equations, pantograph type functional-differential equations, solutions with generalized separation of variables

DOI: 10.1134/S2304487X20050119

REFERENCES

1. Ovsiannikov L.V., *Group Analysis of Differential Equations*, New York: Academic Press, 1982.
2. Bluman G.W., Cole J.D., *Similarity Methods for Differential Equations*, New York: Springer, 1974.
3. Olver P.J., *Applications of Lie Groups to Differential Equations, 2nd ed.*, Springer, 1993.
4. Ibragimov N.H., (Ed.), *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws*, CRC Press, Boca Raton, 1994.
5. Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A., *Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics*, Dordrecht: Kluwer, 1998.
6. Bluman G.W., Cole J.D., The general similarity solution of the heat equation, *Journal of Mathematics and Mechanics*, 1969, vol. 18, no. 11, pp. 1025–1042.
7. Levi D., Winternitz P., Nonclassical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation, *J. Phys. A*, 1989, vol. 22, pp. 2915–2924.
8. Nucci M.C., Clarkson P.A., The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh–Nagumo equation, *Phys. Lett. A*, 1992, vol. 164, pp. 49–56.
9. Cherniha R., Serov M., Pliukhin O., *Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications*, Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2018.

10. Clarkson P.A., Kruskal M.D., New similarity reductions of the Boussinesq equation, *Journal of Mathematical Physics*, 1989, vol. 30, no. 10, pp. 2201–2213.
11. Polyanin A.D., Comparison of the effectiveness of different methods for constructing exact solutions to nonlinear PDEs. Generalizations and new solutions, *Mathematics*, 2019, vol. 7, no. 5, p. 386.
12. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I., *Metody reshenija nelinejnyh uravnenij matematicheskoj fiziki i mehaniki* (Solution Methods for Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics), Moscow, Fizmatlit, 2005 (in Russian).
13. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd ed., CRC Press: Boca Raton, 2012.
14. Polyanin A.D., Zhurov A.I., *Metody razdelenija peremennykh i tochnye reshenija nelinejnykh uravnenij matematicheskoj fiziki* (Methods of separating variables and exact solutions for nonlinear mathematical physics equations), M.: IPMech RAS, 2020 (in Russian).
15. Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R., *Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics*, Chapman and Hall/CRC, 2007.
16. Polyanin A.D., Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: new functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2019, vol. 11, pp. 95–105.
17. Polyanin A.D., Functional separation of variables in nonlinear PDEs: general approach, new solutions of diffusion-type equations, *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 1, p. 90.
18. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Separation of variables in PDEs using nonlinear transformations: applications to reaction-diffusion type equations, *Applied Math. Lett.*, 2020, vol. 100, 106055.
19. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N., *Method of Differential Constraints and Its Applications in Gas Dynamics,* Novosibirsk: Nauka, 1984 (in Russian).
20. Kudryashov N.A., *Analytical Theory of Nonlinear Differential Equations*, Moscow–Izhevsk: Institut kompjuternyh issledovanii, 2004 (in Russian).
21. Kudryashov N.A., *Methods of Nonlinear Mathematical Physics*, Dolgoprudnyi: Izd. Dom Intellekt, 2010 (in Russian).
22. Conte R., Musette M., *The Painlevé Handbook*, Springer, 2008.
23. Schlichting H., Gersten Kl., *Boundary-Layer Theory*, Ninth Ed., Springer-Verlag, 2017.
24. Boussinesq J., Recherches théorique sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources, *J. Math. Pures Appl.*, 1904, vol. 10, no. 1, pp. 5–78.
25. Guderley K.G., *The Theory of Transonic Flow*, Oxford: Pergamon, 1962.
26. Aksenov A.V., Sudarikova A.D., Chicherin I.S., The surface tension effect on viscous liquid spreading along a superhydrophobic surface, *Journal of Physics: Conference Series*, 2017, vol. 788, 01200, pp. 1–6.
27. Aksenov A.V., Sudarikova A.D., Chicherin I.S., Effect of the surface tension on the spreading of a viscous Liquid along a superhydrophobic surface. I. Plane-parallel motion, *Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI"*, 2016, vol. 5, no. 6, pp. 489–496 (in Russian).
28. Barenblatt G.I., Zel'dovich Ya.B., On dipole-type solutions in problems of nonstationary filtration of gas under polytropic regime, *Prikl. Math. & Mech.*, 1957, vol. 21, pp. 718–720 (in Russian).
29. Titov S.S., A method of finite-dimensional rings for solving nonlinear equations of mathematical physics, In: *Aerodynamics,* Ed. T.P. Ivanova, Saratov: Saratov Univ., 1988, pp. 104–110 (in Russian).
30. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems*, CRC Press, Boca Raton–London, 2018.
31. Pavlovskii Yu.N., Investigation of some invariant solutions to the boundary layer equations, *Zhurn. Vychisl. Mat. i Mat. Fiziki*, 1961, vol. 1, no. 2, pp. 280–294 (in Russian).
32. Loitsyanskiy L.G., *Mechanics of Liquids and Gases*, New York: Begell House, 1995.
33. Dorodnitsyn V.A., On invariant solutions of the equation of non-linear heat conduction with a source, *USSR Comput. Math. & Math. Phys.* 1982, vol. 22, no. 6, pp. 115–122.
34. Hall A.J., Wake G.C., A functional differential equation arising in the modelling of cell growth, *J. Aust. Math. Soc. Ser. B*, 1989, vol. 30, pp. 424–435.
35. Hall A.J., Wake G.C., Gandar P.W., Steady size distributions for cells in one dimensional plant tissues, *J. Math. Biol.*, 1991, vol. 30, pp. 101–123.
36. Derfel G., van Brunt B., Wake G.C., A cell growth model revisited, *Functional Differential Equations*, 2012, vol. 19, nos. 1–2, pp. 71–81.
37. Zaidi A.A., van Brunt B., Wake G.C., Solutions to an advanced functional partial differential equation of the pantograph type, *Proc. R. Soc. A*, 2015, vol. 471, 20140947.
38. Efendiev M., van Brunt B., Wake G.C., Zaidi A.A., A functional partial differential equation arising in a cell growth model with dispersion, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2018, vol. 41, no. 4, pp. 1541–1553.
39. Ambartsumyan V.A., On the fluctuation of the brightness of the Milky Way, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1944, vol. 44, pp. 223–226.
40. Dehghan M., Shakeri F., The use of the decomposition procedure of Adomian for solving a delay differential equation arising in electrodynamics, *Phys. Scripta*, 2008, vol. 78, no. 6, 065004.
41. Ajello W.G., Freedman H.I., Wu J., A model of stage structured population growth with density depended time delay, *SIAM J. Appl. Math.*, 1992, vol. 52, pp. 855–869.
42. Mahler K., On a special functional equation. *J. London Math. Soc.*, 1940, vol. 1, no. 2, pp. 115–123.
43. Ferguson T.S., Lose a dollar or double your fortune, In: *Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, V. III (eds. L.M. Le*

Cam et al.), pp. 657–666. Berkeley, Univ. California Press, 1972.

44. Robinson R.W., Counting labeled acyclic digraphs. In: *New Directions in the Theory of Graphs (ed. F. Harari)*, pp. 239–273. New York: Academic Press, 1973.
45. Gaver D.P., An absorption probablility problem, *J. Math. Anal. Appl.*, 1964, vol. 9, pp. 384–393.
46. Zhang F., Zhang Y., State estimation of neural networks with both time-varying delays and norm-bounded parameter uncertainties via a delay decomposition approach, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2013, vol. 18, no. 12, pp. 3517–3529.
47. Ockendon J.R., Tayler A.B., The dynamics of a current collection system for an electric locomotive, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1971, vol. 332, pp. 447–468.
48. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Exact solutions of nonlinear partial differential equations with variable delay of the pantograph type, *Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI"*, 2020, vol. 9, no. 4, pp. 315–328 (in Russian).
49. Dobrokhotov S.Yu., Tirozzi B., Localized solutions of one-dimensional non-linear shallow-water equations with velocity $c = \sqrt{x}$, *Russian Mathematical Surveys*, 2010, vol. 65, no. 1, pp. 177–179.
50. Aksenov A.V., Dobrokhotov S.Yu., Druzhkov K.P., Exact step-like solutions of one-dimensional shallow-water equations over a sloping bottom, *Mathematical Notes*, 2018, vol. 104, no. 6, pp. 915–921.