ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2020, том 9, № 5, с. 438–441

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.91

ОПТИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ТРЕТЬЕЙ, ПЯТОЙ И СЕДЬМОЙ СТЕПЕНИ

© 2020 г. А. А. Кутуков[1,*], Н. А. Кудряшов[1,]**

[1] *Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия*

**e-mail: alexkutuk@gmail.com*

***e-mail: nakudr@gmail.com*

Поступила в редакцию 29.09.2020 г.
После доработки 29.09.2020 г.
Принята к публикации 10.11.2020 г.

Рассматривается математическая модель для описания распространения импульсов в нелинейном оптическом волокне с решетками Брэгга. Изучаются аналитические свойства модели распространения волн в прямом и обратном направлении в волоконных решетках Брэгга, описываемые связанными обобщенными нелинейными уравнениями Шрёдингера с нелинейностями третьей, пятой и седьмой степени. С использованием переменных бегущей волны осуществляется переход к системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных для действительной и мнимой частей исходной системы уравнений. Представлено условие совместности для двух линейных дифференциальных уравнений изучаемой системы. Для двух нелинейных дифференциальных уравнений изучаемой системы получены первые интегралы, а также найдены ограничения на параметры, при которых система не содержит дробных степеней, и условия совместности, при которых система имеет общее решение. При найденных ограничениях на параметры модели представлено решение изучаемой системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений. Приводится решение в виде оптического солитона для связанных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных типа Шрёдингера с нелинейностями третьей, пятой и седьмой степени. Найденное решение иллюстрируется при различных значениях параметров.

Ключевые слова: оптические солитоны, точные решения дифференциальных уравнений, нелинейное уравнение Шрёдингера, волоконные решетки Брэгга

DOI: 10.1134/S2304487X20050090

1. ВВЕДЕНИЕ

Брэгговские или щелевые солитоны возникают в результате резонансного отражения электромагнитных волн в нелинейных оптических средах со слабо меняющимся периодическим показателем преломления (решетки Брэгга) [1]. Впервые такие оптические солитоны удалось экспериментально получить и описать в 1996 году в работе [2]. В настоящее время волоконные решетки Брэгга широко применяются в технике оптической связи и телекоммуникационных системах [3]. Классическая модель для описания распространения импульсов в волоконных брэгговских решетках представляет собой неинтегрируемую систему двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [1, 4]. В последнее время появляется все больше исследований, в которых для описания решеток Брэгга используют систему связанных нелинейных уравнений типа Шрёдингера с полиномиальными нелинейностями [5–9]. В данной работе рассматривается система уравнений такого типа с нелинейностью третьей, пятой и седьмой степени [5]

$$\begin{gathered} iq_t + a_1 r_{xx} + (b_1|q|^2 + c_1|r|^2)q + \\ + (\xi_1|q|^4 + \eta_1|q|^2|r|^2 + \zeta_1|r|^4)q + \\ + (l_1|q|^6 + m_1|q|^4|r|^2 + n_1|q|^2|r|^4 + p_1|r|^6)q + \\ + i\alpha_1 q_x + \beta_1 r = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered} ir_t + a_2 q_{xx} + (b_2|r|^2 + c_2|q|^2)r + \\ + (\xi_2|r|^4 + \eta_2|r|^2|q|^2 + \zeta_2|q|^4)r + \\ + (l_2|r|^6 + m_2|r|^4|q|^2 + n_2|r|^2|q|^4 + p_2|q|^6)r + \\ + i\alpha_2 r_x + \beta_2 q = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где $q(x,t)$ и $r(x,t)$ амплитуды волн, распространяющихся в прямом и обратном направлении, a_j, b_j, c_j, ξ_j, η_j, ζ_j, l_j, m_j, n_j, p_j, α_j, β_j $(j = 1, 2)$ – параметры оптической системы.

2. НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ (1), (2) В ПЕРЕМЕННЫХ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Точное решение системы (1), (2) ищется в виде

$$q(x,t) = y_1(z)e^{i(\kappa x-\omega t+\theta)},\quad r(x,t) = y_2(z)e^{i(\kappa x-\omega t+\theta)},\quad z = x - C_0 t, \tag{3}$$

где κ, ω, θ и C_0 – произвольные постоянные. После подстановки (3) в систему (1) и (2) получается система из четырех уравнений для действительной и мнимой частей системы (1), (2) в виде

$$\begin{aligned} &a_1 y_2'' + l_1 y_1^7 + m_1 y_1^5 y_2^2 + n_1 y_1^3 y_2^4 + p_1 y_1 y_2^6 + \\ &+ \eta_1 y_1^3 y_2^2 + \xi_1 y_1^5 + \zeta_1 y_1 y_2^4 - \kappa^2 a_1 y_2 + b_1 y_1^3 + \\ &+ c_1 y_1 y_2^2 - \kappa\alpha_1 y_1 + \omega y_1 + \beta_1 y_2 = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &a_2 y_1'' + l_2 y_2^7 + m_2 y_1^2 y_2^5 + n_2 y_1^4 y_2^3 + p_2 y_1^6 y_2 + \\ &\eta_2 y_1^2 y_2^3 + \xi_2 y_2^5 + \zeta_2 y_1^4 y_2 - \kappa^2 a_2 y_1 + b_2 y_2^3 + \\ &+ c_2 y_1^2 y_2 - \kappa\alpha_2 y_2 + \omega y_2 + \beta_2 y_1 = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

$$2\kappa a_1 y_2' - (C_0 - \alpha_1) y_1' = 0, \tag{6}$$

$$2\kappa a_2 y_1' - (C_0 - \alpha_2) y_2' = 0. \tag{7}$$

Если $4a_1a_2\kappa^2 \neq (\alpha_2 - C_0)(\alpha_1 - C_0)$, то система (6), (7) имеет решение $y_1 = \mathrm{const}$, $y_2 = \mathrm{const}$ и этот случай не представляет интереса. Если

$$\frac{2\kappa a_1}{C_0 - \alpha_2} = \frac{C_0 - \alpha_1}{2\kappa a_2}, \tag{8}$$

то

$$y_2 = \sigma y_1 + C, \tag{9}$$

где C постоянная интегрирования и

$$\sigma = \frac{2\kappa a_2}{C_0 - \alpha_2}. \tag{10}$$

Из соотношения (8) получаем

$$C_0 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 \pm \sqrt{16a_1a_2\kappa^2 + \alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2}). \tag{11}$$

Положим постоянную интегрирования $C = 0$. После подстановки выражения (9) в переопределенную систему (4), (5), умножения этих уравнений на y_1' и интегрирования по z система (4), (5) приобретает вид

$$\begin{aligned} &4a_1\sigma y_1'^2 + (\sigma^6 p_1 + \sigma^4 n_1 + \sigma^2 m_1 + l_1) y_1^8 + \\ &+ \left(\frac{4}{3}\sigma^4\zeta_1 + \frac{4}{3}\sigma^2\eta_1 + \frac{4}{3}\xi_1\right) y_1^6 + (2\sigma^2 c_1 + 2b_1) y_1^4 + \\ &+ (4\sigma\beta_1 + 4\omega - 4\kappa^2\sigma a_1 - 4\kappa\alpha_1) y_1^2 + C_1 = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &4a_2 y_1'^2 + (\sigma^7 l_2 + \sigma^5 m_2 + \sigma_3^2 n_2 + \sigma p_2) y_1^8 + \\ &+ \left(\frac{4}{3}\sigma^5\xi_2 + \frac{4}{3}\sigma^3\eta_2 + \frac{4}{3}\sigma\zeta_2\right) y_1^6 + \\ &+ (2\sigma^3 b_2 + 2\sigma c_2) y_1^4 + \\ &+ (4\omega\sigma + 4\beta_2 + 4\kappa^2 a_2 - 4\kappa\sigma\alpha_2) y_1^2 + C_2 = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Балансировочное число системы (12), (13) $p = \frac{1}{3}$. Полагая $y_1(z) = y(z)^{\frac{1}{3}}$, уравнения (12), (13) приобретают вид

$$A_1 y^{10/3} + B_1 y^{8/3} + C_1 y^{4/3} + E_1 y'^2 + F_1 y^4 + G_1 y^2 = 0, \tag{14}$$

$$A_2 y^{10/3} + B_2 y^{8/3} + C_2 y^{4/3} + E_2 y'^2 + F_2 y^4 + G_2 y^2 = 0, \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned} &A_1 = \frac{4}{3}\sigma^4\zeta_1 + \frac{4}{3}\sigma^2\eta_1 + \frac{4}{3}\xi_1, \\ &A_2 = \frac{4}{3}\sigma^5\xi_2 + \frac{4}{3}\sigma^3\eta_2 + \frac{4}{3}\sigma\zeta_2, \\ &B_1 = 2\sigma^2 c_1 + 2b_1, B_2 = 2\sigma(\sigma^2 b_2 + c_2), \\ &E_1 = \frac{4a_1\sigma}{9}, E_2 = \frac{4a_2}{9}, \\ &F_1 = \sigma^6 p_1 + \sigma^4 n_1 + \sigma^2 m_1 + l_1, \\ &F_2 = \sigma(\sigma^6 l_2 + \sigma^4 m_2 + \sigma^2 n_2 + p_2), \\ &G_1 = (-4\kappa^2 a_1 + 4\beta_1)\sigma - 4\kappa\alpha_1 + 4\omega, \\ &G_2 = (-4\kappa\alpha_2 + 4\omega)\sigma - 4\kappa^2 a_2 + 4\beta_2. \end{aligned} \tag{16}$$

Систему (14), (15) можно проинтегрировать при следующих ограничениях на параметры

$$A_1 = 0,\quad A_2 = 0,\quad B_1 = 0,\quad B_2 = 0,\quad C_1 = 0,\quad C_2 = 0 \tag{17}$$

и условиях совместности

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{G_1}{G_2}. \tag{18}$$

С учетом (16) условия на параметры (17), (18) можно выразить следующим образом

$$\begin{aligned} &\xi_1 = -\sigma^4\zeta_1 - \sigma^2\eta_1,\quad \xi_2 = -\frac{\sigma^2\eta_2 + \zeta_2}{\sigma^4},\quad b_1 = -\sigma^2 c_1, b_2 = -\frac{c_2}{\sigma^2}, \\ &\beta_1 = -\frac{\kappa\sigma^2 a_1\alpha_2 - \omega\sigma^2 a_1 - \kappa a_2\alpha_1 - \sigma a_1\beta_2 + \omega a_2}{a_2\sigma}, \\ &l_1 = \frac{\sigma^2(\sigma^6 a_1 l_2 + \sigma^4 a_1 m_2 - \sigma^4 a_2 p_1 + \sigma^2 a_1 n_2 - \sigma^2 a_2 n_1 + a_1 p_2 - a_2 m_1)}{a_2}. \end{aligned} \tag{19}$$

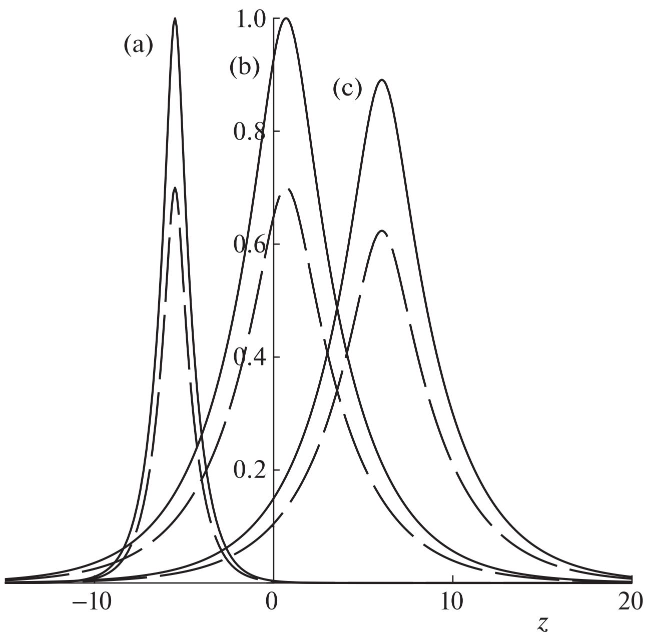

Рис. 1. Решение $y_1(z)$ (сплошная линия) и $y_2(z)$ (пунктирная линия) системы (4), (5), (6), (7) при значениях параметров: (a) $E_1 = 0.1$, $G_1 = -1$, $F_1 = 1$, $z_0 = 5$, $\sigma = 0.7$; (b) $E_1 = 1$, $G_1 = -1$, $F_1 = 1$, $z_0 = 0$, $\sigma = 0.7$; (c) $E_1 = 1$, $G_1 = -1$, $F_1 = 2$, $z_0 = -5$, $\sigma = 0.7$.

Система (14), (15) при условиях (17), (18) имеет общее решение в виде

$$y(z) = \frac{-4E_1G_1\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{-E_1G_1}(z-z_0)}{E_1}}}{-4E_1^2G_1F_1\mathrm{e}^{\frac{-2\sqrt{-E_1G_1}z_0}{E_1}} + \mathrm{e}^{\frac{2\sqrt{-E_1G_1}z}{E_1}}}. \tag{20}$$

Таким образом, найдено точное решение системы (1), (2) в виде

$$\begin{gathered} q(x,t) = \\ = \left(\frac{-4E_1G_1\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{-E_1G_1}(x-C_0t-z_0)}{E_1}}}{-4E_1^2G_1F_1\mathrm{e}^{\frac{-2\sqrt{-E_1G_1}z_0}{E_1}} + \mathrm{e}^{\frac{2\sqrt{-E_1G_1}(x-C_0t)}{E_1}}} \right)^{\frac{1}{3}} e^{i(\kappa x-\omega t+\theta)}, \\ r(x,t) = \\ = \sigma \left(\frac{-4E_1G_1\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{-E_1G_1}(x-C_0t-z_0)}{E_1}}}{-4E_1^2G_1F_1\mathrm{e}^{\frac{-2\sqrt{-E_1G_1}z_0}{E_1}} + \mathrm{e}^{\frac{2\sqrt{-E_1G_1}(x-C_0t)}{E_1}}} \right)^{\frac{1}{3}} e^{i(\kappa x-\omega t+\theta)} \end{gathered} \tag{21}$$

с условиями на параметры (8), (10), (17), (18).

На рис. 1 изображены графики решения $y_1(z)$ и $y_2(z)$ системы уравнений (4), (5), (6), (7) при различных значениях параметров модели с учетом ограничений (8), (10), (17), (18).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изучалась модель волоконных решеток Брэгга, описываемая связанными обобщенными нелинейными уравнениями Шрёдингера (1), (2). В переменных бегущей волны найдено решение рассматриваемой системы в виде оптических солитонов Брэгга (21) с учетом ограничений на парметры модели (8), (10), (19). Проиллюстрирован модуль решения системы (1), (2) в переменных бегущей волны.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00209).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Malomed B.A.* Soliton Management in Periodic Systems. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2006.
2. *Eggleton B.J., Slusher R.E., de Sterke C.M., Krug P.A., Sipe J.E.* Bragg Grating Solitons // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 1627.
3. *Kivshar Y.S., Agrawal G.P.* Optical Solitons. Elsevier, 2003.
4. *Atai J., Malomed B.A.* Families of Bragg-grating solitons in a cubic-quintic medium // Phys. Lett. A. 2001. V. 284. P. 247–252.
5. *Biswas A., Sonmezoglu A., Ekici M., Alshomrani A.S., Belic M.R.* Optical solitons in fiber Bragg gratings with dispersive reflectivity for cubic quintic septic nonlinearity by extended trial function // Optik. 2019. V. 194. P. 163020.
6. *Kudryasahov N.A.* Periodic and solitary waves in optical fiber Bragg gratings with dispersive reflectivity // Chin. J. Phys. 2020. V. 66. P. 401–405.
7. *Kudryashov N.A., Antonova E.V.* Solitary waves of equation for propagation pulse with power nonlinearities // Optik. 2020. V. 217. P. 164881.
8. *Biswas A., Sonmezoglu A., Ekici M., Alshomrani A.S., Belic M.R.* Optical solitons in fiber Bragg gratings with dispersive reflectivity for parabolic-nonlocal combo nonlinearity by extended trial function // Optik, 2019. V. 195. P. 163146.
9. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Biswas A., Ekici M., Triki H., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Optical solitons with fiber Bragg gratings and dispersive reflectivity having parabolic–nonlocal combo nonlinearity via three prolific integration architectures // Optik, 2020. V. 208. P. 164065.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 5, pp. 438–441

Solitary Wave Solutions of the Coupled Nonlinear Schrödinger Equation with Cubic–Quintic–Septic Nonlinearity

A. A. Kutukov[a,#] **and N. A. Kudryashov**[a,##]

[a] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[#]*e-mail: alexkutuk@gmail.com*

[##]*e-mail: nakudr@gmail.com*

Received September 29, 2020; revised September 29, 2020; accepted November 10, 2020

Abstract—The mathematical model for describing the propagation of pulses in a nonlinear optical fiber with Bragg gratings is considered. The analytical properties of the model of wave propagation in the forward and backward directions in fiber Bragg gratings, described by coupled generalized nonlinear Schrödinger equations with qubic–quintic–septic nonlinearities, are studied. Using the traveling wave variables, the transition to the system of four ordinary differential equations obtained for the real and imaginary parts of the original system of equations is carried out. The compatibility condition for two linear differential equations of the system under study is presented. For two nonlinear differential equations of the system under study, first integrals are obtained, as well as constraints on the parameters for which the system does not contain fractional powers, and compatibility conditions under which the system has a general solution. Under the found constraints on the parameters of the model, the solution of the studied system of four ordinary differential equations is presented. The solution is given in the form of an optical soliton for coupled nonlinear partial differential equations of the Schrödinger type with nonlinearities of the third, fifth, and seventh degrees. The found solution is illustrated for different values of the parameters.

Keywords: optical solitons, exact solutions of differential equations, nonlinear Schrödinger equation, fiber Bragg gratings

DOI: 10.1134/S2304487X20050090

REFERENCES

1. Malomed B.A., Soliton Management in Periodic Systems, *Boston: Kluwer Academic Publishers*, 2006.
2. Eggleton B.J., Slusher R.E., de Sterke C.M., Krug P.A., Sipe J.E., Bragg Grating Solitons, *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 76. p. 1627.
3. Kivshar Y.S., Agrawal G.P., Optical Solitons, *Elsevier*, 2003.
4. Atai J., Malomed B.A., Families of Bragg-grating solitons in a cubic-quintic medium, *Phys. Lett. A.*, 2001, vol. 284, pp. 247–252.
5. Biswas A., Sonmezoglu A., Ekici M., Alshomrani A.S., Belic M.R., Optical solitons in fiber Bragg gratings with dispersive reflectivity for cubic–quintic–septic nonlinearity by extended trial function, *Optik*, 2019, vol. 194, art. no. 163020.
6. Kudryasahov N.A., Periodic and solitary waves in optical fiber Bragg gratings with dispersive reflectivity, *Chin. J. Phys.*, 2020, vol. 66, pp. 401–405.
7. Kudryashov N.A., Antonova E.V., Solitary waves of equation for propagation pulse with power nonlinearities, *Optik*, 2020, vol. 217, art. no. 164881.
8. Biswas A., Sonmezoglu A., Ekici M., Alshomrani A.S., Belic M.R., Optical solitons in fiber Bragg gratings with dispersive reflectivity for parabolic-nonlocal combo nonlinearity by extended trial function, *Optik*, 2019, vol. 195, art. no. 163146.
9. Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Biswas A., Ekici M., Triki H., Alzahrani A.K., Belic M.R., Optical solitons with fiber Bragg gratings and dispersive reflectivity having parabolic–nonlocal combo nonlinearity via three prolific integration architectures, *Optik*, 2020. vol. 208. art. no. 164065.