

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ ОБОБЩЕННЫМ УРАВНЕНИЕМ ДУФФИНГА С УЧЕТОМ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ

© 2020 г. С. Ф. Лаврова^{1,*}, Н. А. Кудряшов^{1,**}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

*e-mail: infuriatedot@gmail.com

**e-mail: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию 15.09.2020 г.

После доработки 15.09.2020 г.

Принята к публикации 12.10.2020 г.

Рассмотрено обобщенное нелинейное уравнение Дуффинга, которое получено из уравнения для описания распространения импульсов в оптических волокнах с учетом переменных бегущей волны. Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка записано в форме динамической системы. Для обобщенного уравнения Дуффинга без учета внешней силы найдены стационарные точки и исследована их устойчивость. Результаты исследования представлены в таблице, где для каждой из трех точек покоя указан тип устойчивости в зависимости от значения параметра уравнения. Представлен Гамильтониан рассматриваемой системы уравнений. С помощью Гамильтониана построены фазовые портреты обобщенного уравнения Дуффинга без учета возмущения. Дан численный анализ рассматриваемой динамической системы в присутствии периодической внешней силы. Для различных значений амплитуд вынуждающей силы построены сечения Пуанкаре динамической системы при двух различных значениях параметра. Показано, что при увеличении амплитуды возмущающей силы происходит разрушение периодических траекторий решения системы и увеличение площади области хаотической динамики уравнений. По алгоритму Беннетина рассчитан старший Ляпуновский показатель динамической системы как функция амплитуды вынуждающей силы. Установлено, что при увеличении амплитуды, старший Ляпуновский показатель возрастает, и как следствие увеличивается экспоненциальная расходимость траекторий, что согласуется с полученными ранее отображениями Пуанкаре.

Ключевые слова: осциллятор Дуффинга, динамическая система, сечение Пуанкаре, показатель Ляпунова

DOI: 10.1134/S2304487X20050107

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Дуффинга было предложено в 1918 году [1]

$$y_{zz} + \alpha y + \gamma y^3 = 0. \quad (1.1)$$

Оно используется для описания ряда нелинейных физических процессов, таких как движение осциллятора с нелинейной возвращающей силой [2], динамика барабанной перепонки человеческого уха [3], вращательное движение корабля [4] и т.д.

Одним из замечательных свойств этого уравнения является наличие хаотической динамики при возмущении его периодической силой. Исследованию динамических режимов уравнения (1.1) посвящено достаточно большое количество работ. В [5] исследуется структура устойчивых и неустойчивых многообразий (1.1) и выводится для

него аппроксимация отображения Пуанкаре, в [6] изучены бифуркации, происходящие в уравнении [6], работа [7] посвящена аналитическому расчету Ляпуновского показателя уравнения.

Данная работа посвящена исследованию нелинейных динамических режимов одного из обобщений уравнения Дуффинга [2]

$$y_{zz} + \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 = 0, \quad (1.2)$$

которое может быть получено из следующего уравнения для распространения импульсов в оптическом волокне, предложенного в работе [9]

$$iq_t + \alpha q_{xx} + (a|q|^n + b|q|^{2n})q = 0, \quad n \geq 1, \quad (1.3)$$

при $n = 1$.

Введем в уравнении (1.3) безразмерные переменные

$$q = Qq', \quad t = Tt', \quad x = Xx'. \quad (1.4)$$

Используя в уравнении (1.3) переменные (1.4) и опуская штрихи при новых переменных, получим

$$iq_t + \frac{\alpha}{X^2 T} q_{xx} + \left(\frac{a}{T} Q^n |q|^n + \frac{b}{T} Q^{2n} |q|^{2n} \right) q = 0. \quad (1.5)$$

Приравнявая коэффициенты при втором, третьем и четвертом членах (1.5) к единице, получим

$$X = \frac{\sqrt{\alpha b}}{a}, \quad T = \frac{a^2}{b}, \quad Q = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}. \quad (1.6)$$

Таким образом, после перехода к переменным (1.4) с учетом (1.6) уравнение (1.5) примет вид

$$iq_t + q_{xx} + (|q|^n + |q|^{2n})q = 0. \quad (1.7)$$

Будем искать решения уравнения (1.7) в виде

$$q(x, t) = y(z) e^{i(kx - \omega t)}, \quad z = x - C_0 t. \quad (1.8)$$

Подставляя (1.8) в уравнение (1.7) и приравнявая к нулю действительные и мнимые части, получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} y_{zz} + (\omega - k^2)y + y^{n+1} + y^{2n+1} &= 0, \\ (2k - C_0)y_z &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Положим $k = \frac{C_0}{2}$, тогда второе уравнение (1.9) будет выполняться тождественно, а первое примет вид

$$y_{zz} + \left(\omega - \frac{C_0^2}{4} \right) y + y^{n+1} + y^{2n+1} = 0. \quad (1.10)$$

При $n = 1$ уравнение (1.10) является обобщенным уравнением Дуффинга (1.2) без затухания, в котором $\alpha = \omega - \frac{C_0^2}{4}$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$. Обозначим $\omega - \frac{C_0^2}{4} = \alpha$ и введем в уравнение периодическую внешнюю силу

$$y_{zz} + \alpha y + y^{n+1} + y^{2n+1} = A \cos(\Omega z), \quad (1.11)$$

где A амплитуда возмущающей силы, а Ω ее частота.

Перепишем (1.11) в форме динамической системы

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\alpha y_1 - y_1^{n+1} - y_1^{2n+1} + A \cos \theta, \\ \dot{\theta} = \Omega. \end{cases} \quad (1.12)$$

Работа построена следующим образом. Во втором разделе дается анализ стационарных точек системы (1.12) при отсутствии возмущения и построены ее фазовые портреты. В третьем разделе представлен численный анализ динамических ре-

жимов системы (1.12). Построены сечения Пуанкаре динамической системы и рассчитан ее старший Ляпуновский показатель при различных значениях амплитуды возмущающей силы.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Рассмотрим устойчивость точек покоя системы уравнений (1.12) без учета внешней силы

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\alpha y_1 - y_1^{n+1} - y_1^{2n+1}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Стационарными точками (2.1) являются

$$\begin{aligned} O = (0, 0), \quad P = \left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-4\alpha}}{2} \right)^{\frac{1}{n}}, 0 \right), \\ Q = \left(\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-4\alpha}}{2} \right)^{\frac{1}{n}}, 0 \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Матрица Якоби (2.1) в точке покоя (x_*, y_*)

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - (n+1)y_*^n - (2n+1)y_*^{2n} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где (x_*, y_*) — координаты точки O , P или Q .

Характеристическое уравнение Якобиана (2.3) имеет вид

$$\lambda^2 + (2n+1)y_*^{2n} + (n+1)y_*^n + \alpha = 0. \quad (2.4)$$

Решая уравнение (2.4), получим собственные значения Якобиана

$$\lambda^{\pm} = \pm \sqrt{-(2n+1)y_*^{2n} - (n+1)y_*^n - \alpha}, \quad (2.5)$$

которые в точках покоя O , P и Q имеют следующие значения

$$\begin{aligned} \lambda_O^{\pm} &= \pm \sqrt{-\alpha}, \\ \lambda_P^{\pm} &= \pm \frac{\sqrt{2}\sqrt{n}\sqrt{-1+4\alpha+\sqrt{1-4\alpha}}}{2}, \\ \lambda_Q^{\pm} &= \pm \frac{i\sqrt{2}\sqrt{n}\sqrt{-1-4\alpha+\sqrt{1-4\alpha}}}{2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Устойчивость стационарных точек исследуемого уравнения представлена в табл. 1, где “—” обозначает отсутствие стационарной точки при указанном значении параметра.

Система (2.1) консервативна, так как $\nabla y = \frac{\partial y_{1z}}{\partial y_1} + \frac{\partial y_{2z}}{\partial y_2} = 0$ и имеет следующий Гамильтониан

$$H(y_1, y_2) = \frac{y_2^2}{2} + \frac{\alpha y_1^2}{2} + \frac{y_1^{n+2}}{n+2} + \frac{y_1^{2n+2}}{2n+2}. \quad (2.7)$$

Гамильтониан (2.7) позволяет для невозмущенного случая сразу построить фазовые портре-

Таблица 1. Устойчивость стационарных точек обобщенного уравнения Дуффинга (2.1) в зависимости от параметра α

	О	Р	Q
$\alpha \in (-\infty, 0)$	Седло	Центр	Центр
$\alpha = 0$	Вырожденная точка	Вырожденная точка	Центр
$\alpha = (0, \frac{1}{4})$	Центр	Седло	Центр
$\alpha = \frac{1}{4}$	Центр	Вырожденная точка	Вырожденная точка
$\alpha > \frac{1}{4}$	Центр	—	—

ты, поскольку фазовыми кривыми являются линии уровня Гамильтониана. Примеры фазовых портретов для двух значений параметра α приведены на рис. 1. Из них видно, как при увеличении α эллиптическая точка покоя P становится гиперболической, а точка гиперболическая O — эллиптической.

3. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

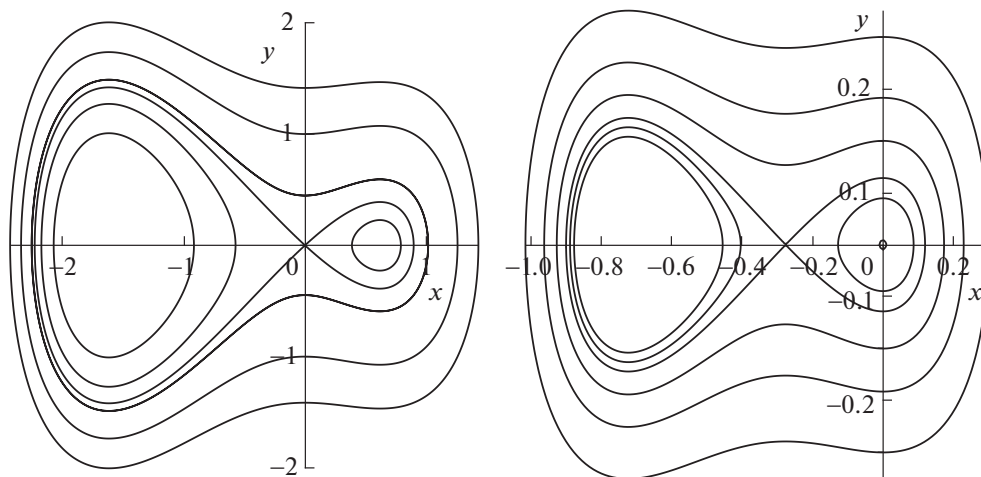
Рассмотрим обобщенное уравнение Дуффинга без затухания с учетом внешней силы с амплитудой A и частотой Ω

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\alpha y_1 - y_1^{n+1} - y_1^{2n+1} + A \cos \theta, \\ \dot{\theta} = \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

Классическими характеристиками динамики трехмерных систем являются Ляпуновские показатели и отображения Пуанкаре [10]. Фиксируем $\omega = 1$ и будем варьировать амплитуду внешней силы A при $\alpha = -1$ и $\alpha = \frac{1}{5}$.

Построим отображения Пуанкаре системы при нескольких значениях амплитуды вынуждающей силы A . На рис. 2 и 3 представлено изменение динамики отображения Пуанкаре системы при различных начальных условиях и значениях параметра A . В качестве плоскости сечения выбрана $\Sigma = \{y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2 | \omega = \frac{2\pi}{\Omega}\}$. При малых значениях амплитуды внешней силы точки покоя P (для $\alpha = -1$) или O (для $\alpha = \frac{1}{5}$) и Q остаются эллиптическими. Замкнутые периодические орбиты превращаются в квазипериодические орбиты, в сечениях Пуанкаре которых находятся инвариантные замкнутые кривые. Сепаратриса при появлении вынуждающей силы разрушается и в ее области образуется тонкий хаотический слой. При увеличении параметра A площадь хаотической области увеличивается, а количество квазипериодических орбит внутри нее уменьшается.

Наличие хаотического режима в системе количественно определяется с помощью вычисления старшего Ляпуновского показателя, описывающего экспоненциальное расхождение близлежащих траекторий.

**Рис. 1.** Фазовые портреты системы уравнений (2.1) при $n = 1$, $\alpha = -1$ (слева) и $\alpha = \frac{1}{5}$ (справа).

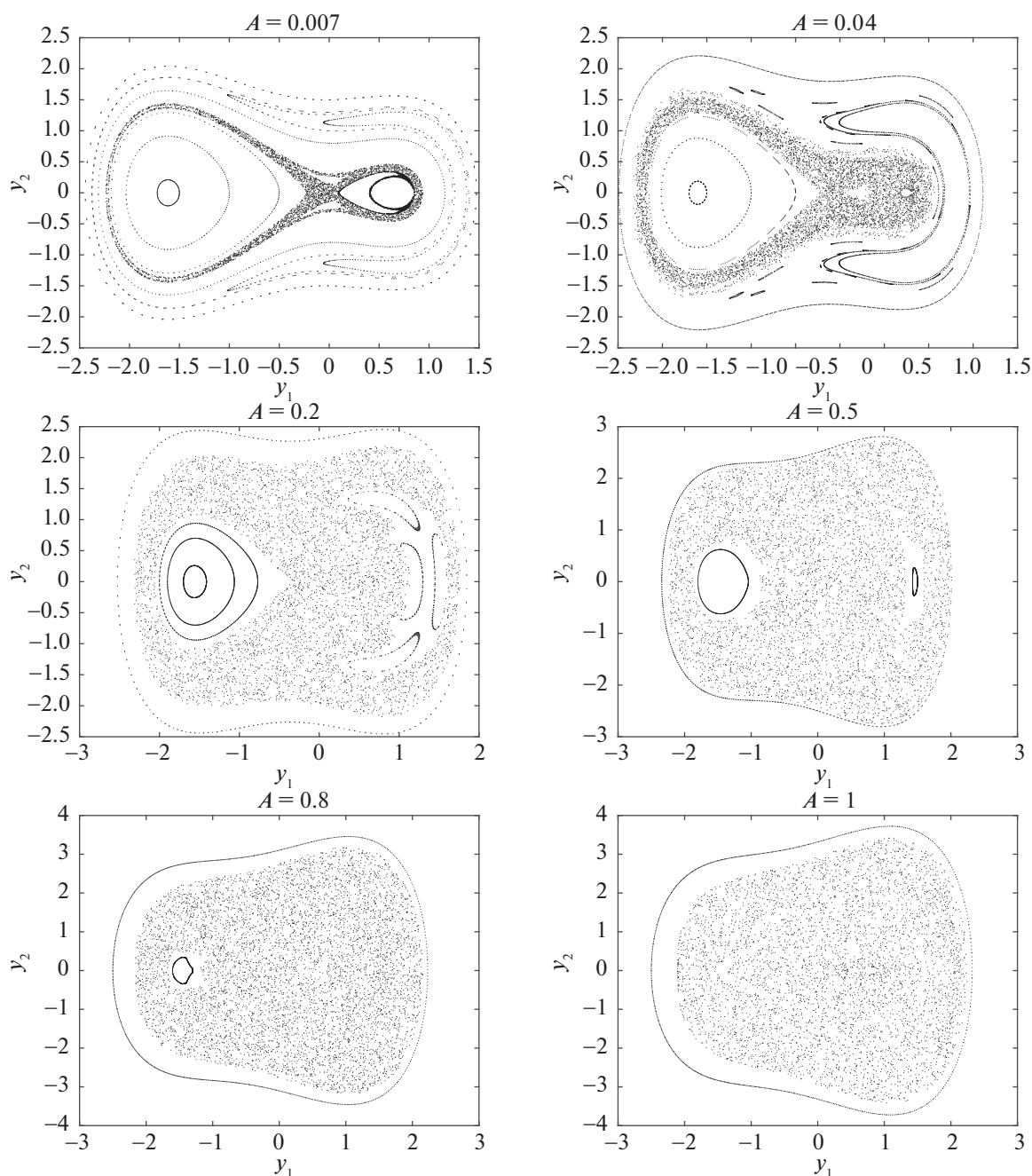


Рис. 2. Сечения Пуанкаре обобщенного уравнения ДUFFинга (2.1) при различных значениях A и $\omega = 1$, $\alpha = -1$, $n = 1$.

ших траекторий решения динамической системы [10]. Присутствие положительного Ляпуновского показателя в спектре говорит о хаотическом поведении решения системы, если старший Ляпуновский показатель нулевой, то режим квазипериодический или периодический, а если показатель отрицательный, то решение является стационарной точкой. Вычисление старших Ляпуновских показателей системы (2.1) проводилось по алгоритму Беннетина [11]. Рис. 4 показывает, как при увеличении амплитуды вынуждающей силы стар-

ший показатель сначала растет, что соответствует увеличению экспоненциального роста расходимости траекторий, а следовательно и увеличению площади хаотической области на отображении Пуанкаре.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ динамических режимов обобщенного уравнения ДUFFинга, полученного с учетом переменных бегущей волны в уравнении

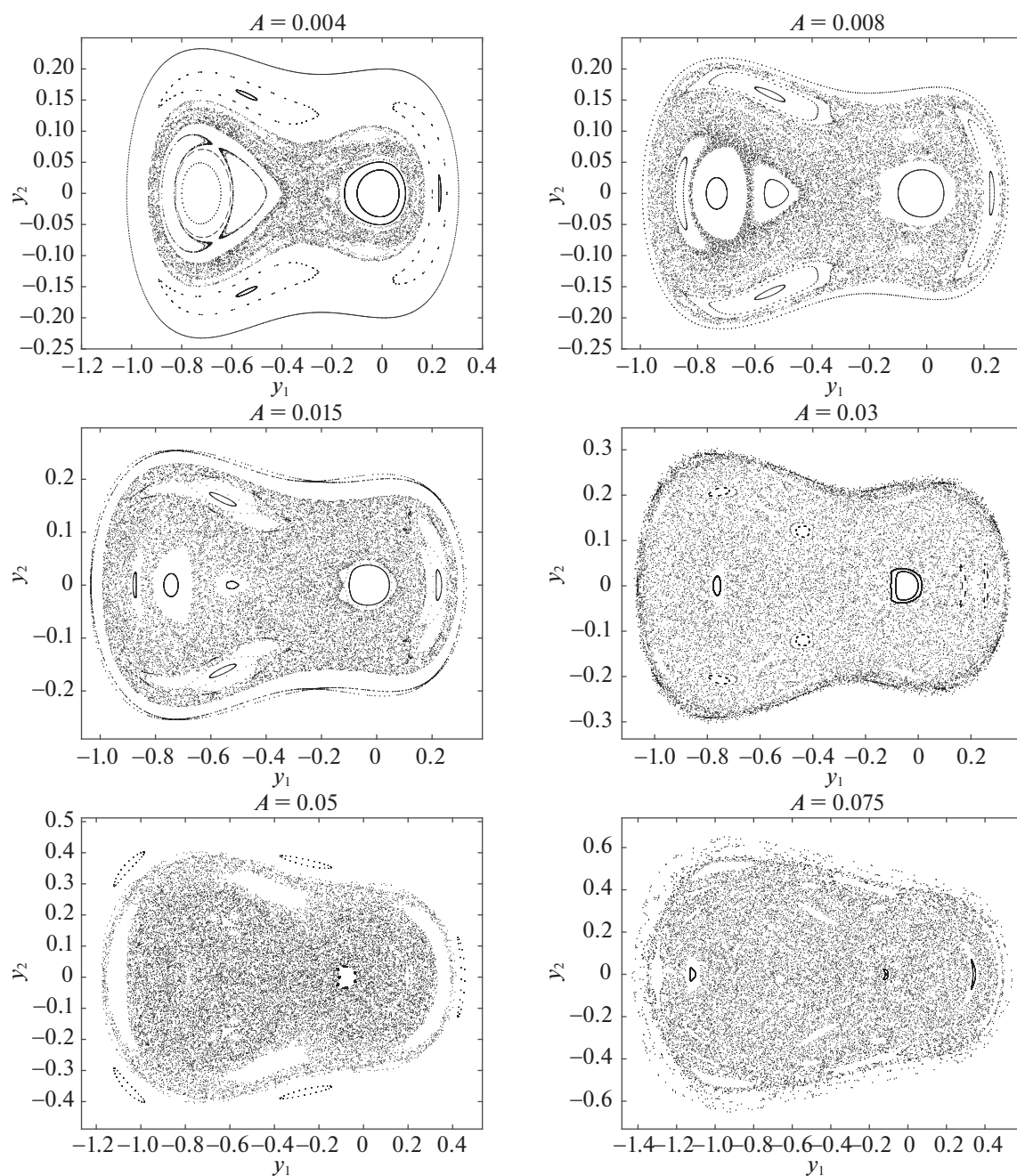


Рис. 3. Сечения Пуанкаре обобщенного уравнения Дуффинга (2.1) при различных значениях A и $\omega = 1$, $\alpha = \frac{1}{5}$, $n = 1$.

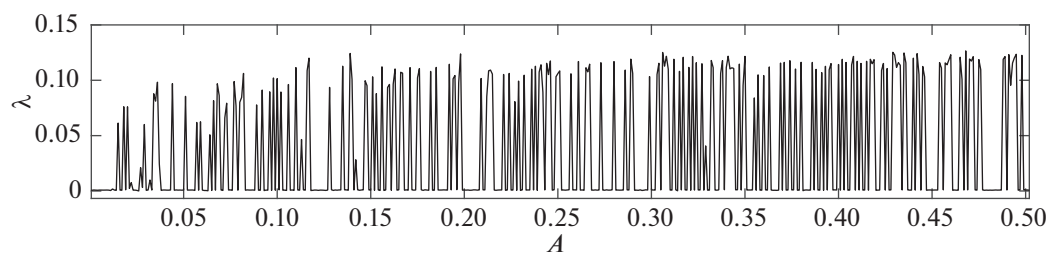


Рис. 4. Старший показатель Ляпунова системы (2.1) как функция параметра A при $\omega = 1$, $\alpha = -1$, $n = 1$.

для описания распространения оптических импульсов.

Проведен анализ устойчивости точек покоя исследуемой системы без учета возмущающей силы. Его результаты представлены в форме таблицы. Представлен Гамильтониан изучаемой системы и с его помощью построены фазовые портреты.

Проведен численный анализ динамических режимов обобщенного уравнения Дуффинга. Для различных значений амплитуды возмущающей силы A построены отображения Пуанкаре динамической системы и рассчитаны ее старшие показатели Ляпунова. Показано, что увеличение параметра A приводит к увеличению площади области хаотической динамики системы.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект государственного задания № 0723-2020-0036).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Duffing G.* Erzwungene schwingungen bei veränderlicher eigenfrequenz. Vieweg u. Sohn, Braunschweig. 1918. 7.
2. *Thompson J., Tutill M., Stewart H.B.* Nonlinear dynamics and chaos. John Wiley & Sons, 2002.
3. *Hu N.Q., Wen X.S.* The application of Duffing oscillator in characteristic signal detection of early fault // *Journal of Sound and Vibration*. 2003. V. 268 (5). P. 917–931.
4. *Nayfeh A.H., Khdeir A.A.* Nonlinear rolling of ships in regular beam seas // *International Shipbuilding Progress*. 1986. V. 33 (379). P. 40–49.
5. *Holmes P.* A nonlinear oscillator with a strange attractor // *Philosophical Trans. Royal Soc. London. Ser. A, Math. and Phys. Sci.* 1979. V. 292 (1394). P. 419–448.
6. *Holmes P., Rand D.* Phase portraits and bifurcations of the non-linear oscillator: $\dot{x} + (\alpha + \gamma x^2)\dot{x} + \beta x + \delta x^3$ // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1980. V. 15. № 6. P. 449–458.
7. *Chacón R., Díaz Bejarano J.* Routes to suppressing chaos by weak periodic perturbations // *Phys. Rev. Lett.* 1993. V. 71. № 19. P. 3103.
8. *Ludeke C.A., Wagner W.S.* The generalized Duffing equation with large damping // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 1969. V. 3. № 3. P. 383–395.
9. *Kudryashov N.A.* Highly dispersive optical solitons of equation with various polynomial nonlinearity law // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020. V. 140. P. 110202.
10. *Lakshmanan Muthusamy, Shanmuganathan Rajaseekar.* *Nonlinear Dynamics: Integrability, Chaos and Patterns.* Springer Science & Business Media, 2012.
11. *Benettin Giancarlo et al.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory // *Meccanica*. 1980. V. 15. № 1. P. 9–20.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 5, pp. 442–448

Nonlinear Dynamical Processes Described by the Generalized Duffing Equation with an External Force

S. F. Lavrova^{a,#} and N. A. Kudryashov^{a,##}

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: kan_13@mail.ru

^{##}e-mail: nakudr@gmail.com

Received September 15, 2020; revised September 15, 2020; accepted October 12, 2020

Abstract—The generalized nonlinear Duffing equation, which is obtained from the equation for description of the pulse propagation in optical fibers using traveling wave variables, is considered. An ordinary second-order differential equation is written in the form of a dynamical system. For the generalized Duffing equation without external force, stationary points are found and their stability is investigated. The results of the study are presented in the table, where the type of stability is indicated for each of the three equilibrium points depending on the equation parameter. Using the presented Hamiltonian of the considered system of equations, phase portraits of the generalized Duffing equation are constructed excluding perturbation. The considered dynamical system in the presence of a periodic external force is numerically analyzed. For different amplitudes of the driving force, Poincaré sections of the dynamical system are constructed for two different values of the parameter. It is shown that with an increase in the amplitude of the perturbing force, the periodic trajectories of the solution of the system are destroyed and the area of the region of chaotic dynamics of the equations increases. According to Benettin's algorithm, the senior Lyapunov exponent of the dynamical system is calculated as a function of the amplitude of the driving force. It has been found that with an increase in the

amplitude, the senior Lyapunov exponent increases, and as a consequence, the exponential divergence of the trajectories increases, which agrees with the previously obtained Poincaré mappings.

Keywords: Duffing oscillator, dynamical system, Poincaré section, Lyapunov exponent

DOI: 10.1134/S2304487X20050107

REFERENCES

1. Duffing G., *Erzwungene schwingungen bei veränderlicher eigenfrequenz*, Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 1918, p. 7.
2. Thompson J., Tutill M., Stewart H.B., *Nonlinear dynamics and chaos*, John Wiley & Sons, 2002.
3. Hu N.Q., Wen X.S., The application of Duffing oscillator in characteristic signal detection of early fault, *J. Sound and Vibration*, 2003, vol. 268, no. 5, pp. 917–931.
4. Nayfeh A.H., Khdeir, A.A., Nonlinear rolling of ships in regular beam seas, *Int. Shipbuilding Progress*, 1986, vol. 33, no. 379, pp. 40–49.
5. Holmes Ph., A nonlinear oscillator with a strange attractor, *Philos. Trans. Royal Society of London. Ser. A, Math. and Phys. Sci.*, 1979, vol. 292, no. 1394, pp. 419–448.
6. Holmes P., Rand D., Phase portraits and bifurcations of the non-linear oscillator: $\dot{x} + (\alpha + \gamma x^2)\dot{x} + \beta x + \delta x^3$, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1980, vol. 15, no. 6, pp. 449–458.
7. Chacón R., Díaz Bejarano J., Routes to suppressing chaos by weak periodic perturbations, *Phys. Rev. Lett.*, 1993, vol. 71, no. 19, p. 3103.
8. Ludeke C.A., Wagner W.S., The generalized Duffing equation with large damping, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1968, vol. 3, no. 3, pp. 383–395.
9. Kudryashov N.A., Highly dispersive optical solitons of equation with various polynomial nonlinearity law, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2020, vol. 140, p. 110202.
10. Lakshmanan Muthusamy, Shanmuganathan Rajaseekar, *Nonlinear Dynamics: Integrability, Chaos and Patterns*, Springer Science & Business Media, 2012.
11. Benettin Giancarlo, et al., Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory, *Meccanica*, 1980, vol. 15, no. 1, pp. 9–20.