

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ОПТИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ СИСТЕМОЙ
НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 4-ГО ПОРЯДКА
С НЕЛОКАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2020 г. К. В. Кан^{1,*}, Н. А. Кудряшов¹

¹ Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

*e-mail: kan_13@mail.ru

**e-mail: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию 23.09.2020 г.

После доработки 23.09.2020 г.

Принята к публикации 10.11.2020 г.

Исследуется система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка с нелокальной нелинейностью, которая описывает распространение двух волн в оптическом волокне. Задача Коши для рассматриваемой системы не решается методом обратной задачи рассеяния. Используются переменные бегущей волны для того, чтобы перейти от исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. В работе для поиска точных решений в виде уединенных волн использован метод простейших уравнений. Преобразованная система обыкновенных дифференциальных уравнений состоит из четырех уравнений, соответствующих действительной и мнимой частям исходной системы. Получены ограничения на параметры исходной математической модели. С учетом найденных ограничений рассмотрена система дифференциальных уравнений, соответствующих действительным частям. Для этой системы найдены условия совместности. С учетом ограничений на параметры, полученных из условий совместности, изучено одно из уравнений, соответствующее действительной части. Найдены точные решения в форме уединенных волн. Построены графики полученных решений при различных значениях параметров исходной системы уравнений. Проанализировано влияние параметров математической модели на поведение решений.

Ключевые слова: уединенные волны, нелинейные дифференциальные уравнения, распространение импульсов, оптическое волокно

DOI: 10.1134/S2304487X20050053

ВВЕДЕНИЕ

В связи с широким распространением новых технологий передачи информации в оптических линиях большое внимание уделяется изучению распространения нелинейных волновых импульсов в оптическом волокне. Развитие математического моделирования и программных комплексов для решения математических задач (таких как Maple, Matlab) позволяет строить численные и аналитические решения различных математических моделей.

Семейство нелинейных уравнений Шредингера и, в частности, уравнение, изученное, в [1–3] в виде

$$iq_t + i\alpha_1 q_{xx} + \alpha_2 q_{xxxx} + F(|q|^2)q = 0, \quad (1)$$

описывают распространение оптических импульсов в оптоволокне.

Оптические солитоны уравнений с различными типами нелинейности также изучены в рабо-

тах [4–7]. Одним из известных уравнений, описывающих данное физическое явление, является уравнение Гинзбурга–Ландау [8, 9]:

$$\begin{aligned} iq_t + aq_{xx} + F(|q|^2)q &= \\ &= \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta ((|q|^2)_x)^2] + \gamma q. \end{aligned}$$

В работах [10, 11] исследована модель Бисваса–Миловича:

$$i(q^m)_t + a(q^m)_{xx} + bF(|q|^2)q^m = 0.$$

Предложенное Бисвасом и Аршидом в 2018 году уравнение [12], исследованное в [13], также описывает распространение нелинейных импульсов в оптическом волокне и записывается в виде:

$$\begin{aligned} iq_t + a_1 q_{xx} + a_2 q_{xt} + i(b_1 q_{xxx} + b_2 q_{xx}) &= \\ &= i[\lambda(|q|^2)q_x + \mu((|q|^2)_x)q + \theta|q|^2 q_x]. \end{aligned}$$

В данной работе рассматривается система, описывающая распространение двух волн в оптическом волокне, которая соответствует дифференциальному уравнению в частных производных четвертого порядка с нелокальной нелинейностью [5]:

$$iq_t + \alpha q_{xx} + i\beta q_{xxx} + \delta q_{xxxx} + [h(|q|^n)_{xx} + g(|q|^{2n})_{xx}]q + (a_1|q|^n + b_1|q|^{2n} + c_1|q|^{3n} + d_1|q|^{4n})q = 0. \quad (2)$$

Система уравнений, записанная по аналогии с [14], имеет вид:

$$\begin{aligned} &iu_t + \alpha u_{xx} + i\beta u_{xxx} + \delta u_{xxxx} + \\ &+ (h_1|u|_{xx}^n + h_2|v|_{xx}^n + g_1|u|_{xx}^{2n} + g_2|v|_{xx}^{2n})u + \\ &+ (a_1|u|^n + a_2|v|^n + b_1|u|^{2n} + b_2|v|^{2n} + c_1|u|^{3n} + \\ &- c_2|v|^{3n} + d_1|u|^{4n} + d_2|v|^{4n})u + su = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &iv_t + \alpha v_{xx} + i\beta v_{xxx} + \delta v_{xxxx} + \\ &+ (h_3|u|_{xx}^n + h_4|v|_{xx}^n + g_3|u|_{xx}^{2n} + g_4|v|_{xx}^{2n})v + \\ &+ (a_4|u|^n + a_3|v|^n + b_4|u|^{2n} + b_3|v|^{2n} + c_4|u|^{3n} + \\ &+ c_3|v|^{3n} + d_4|u|^{4n} + d_3|v|^{4n})v + rv = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Система уравнений (3)–(4) является системой двух дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка с нелокальной нелинейностью.

Целью данной работы является поиск точных решений системы уравнений (3)–(4) в форме единственных волн.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (3)–(4)

Для системы уравнений (3)–(4) задача Коши не решается методом обратной задачи рассеяния, поэтому для поиска решений используем переменные бегущей волны

$$\begin{aligned} u(x, t) &= y_1(z)e^{i(kx-\omega t)}, \\ v(x, t) &= y_2(z)e^{i(kx-\omega t)}, \quad z = x - C_0 t. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя (5), переходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученная система состоит из четырех уравнений, соответствующих мнимым и действительным частям системы уравнений (3)–(4), и является переопределенной для функций $y_1(z)$ и $y_2(z)$.

$$\begin{aligned} &\delta_1 y_{1,zzzz} + (2ng_1y_1^{2n} + nh_1y_1^n - 6\delta_1k_1^2 - 3\beta_1k_1 + \alpha_1)y_{1,zz} + \\ &+ (h_1n^2y_1^{n-1} - 2g_1ny_1^{2n-1} - h_1ny_1^{n-1} + 4g_1n^2y_1^{2n-1})y_{1,z}^2 + \\ &+ (a_1y_1^n + b_1y_1^{2n} + c_1y_1^{3n} + d_1y_1^{4n} + 4g_2y_2^{2n-2}n^2y_{2,z}^2 - \\ &- 2g_2y_2^{2n-2}ny_{2,z}^2 - h_2y_2^{n-2}ny_{2,z}^2 + \beta_1k_1^3 + a_2y_2^n + \delta_1k_1^4 + \\ &+ \omega_1 + c_2y_2^{3n} + b_2y_2^{2n} - \alpha_1k_1^2 + d_2y_2^{4n} + h_2y_2^{n-2}n^2y_{2,z}^2 + \\ &+ h_2y_2^{n-1}ny_{2,zz} + 2g_2y_2^{2n-1}ny_{2,zz} + s)y_1 = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &(4\delta_1k_1 + \beta_1)y_{1,zzz} + (2\alpha_1k_1 - \\ &- 3\beta_1k_1^2 - 4\delta_1k_1^3 - C_0)y_{1,z} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &\delta_2 y_{2,zzzz} + (2ng_4y_2^{2n} + nh_4y_2^n - 6\delta_2k_2^2 - 3\beta_2k_2 + \alpha_2)y_{2,zz} + \\ &+ (h_4n^2y_2^{n-1} - 2g_4ny_2^{2n-1} - h_4ny_2^{n-1} + 4g_4n^2y_2^{2n-1})y_{2,z}^2 + \\ &+ (a_4y_2^n + b_4y_2^{2n} + c_4y_2^{3n} + d_4y_2^{4n} + 4g_3y_1^{2n-2}n^2y_{1,z}^2 - \\ &- 2g_3y_1^{2n-2}ny_{1,z}^2 - h_3y_1^{n-2}ny_{1,z}^2 + \beta_2k_2^3 + a_3y_1^n + \delta_2k_2^4 + \\ &+ \omega_2 + c_3y_1^{3n} + b_3y_1^{2n} - \alpha_2k_2^2 + d_3y_1^{4n} + h_3y_1^{n-2}n^2y_{1,z}^2 + \\ &+ h_3y_1^{n-1}ny_{1,zz} + 2g_3y_1^{2n-1}ny_{1,zz} + r)y_2 = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &(4\delta_2k_2 + \beta_2)y_{2,zzz} + (2\alpha_2k_2 - \\ &- 3\beta_2k_2^2 - 4\delta_2k_2^3 - C_0)y_{2,z} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Полагая коэффициенты мономов уравнений (7) и (9) равными нулю, получим, что любые функции $y_1(z)$ и $y_2(z)$ будут удовлетворять уравнениям (7) и (9) соответственно. Далее рассматриваем уравнения (6) и (8) с учетом найденных из (7) и (9) ограничений

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -4\delta_1k_1, \quad \beta_2 = -4\delta_2k_2, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2k_1}(C_0 - 8\delta_1k_1^3), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2k_2}(C_0 - 8\delta_2k_2^3) \end{aligned} \quad (10)$$

в виде:

$$\begin{aligned} &\delta_1 y_{1,zzzz} + \left(2\delta_1k_1^2 + nh_1y_1^n + 2ng_1y_1^{2n} + \frac{C_0}{2k_1} \right) y_{1,zz} + \\ &+ [ng_1(4n-2)y_1^{2n-1} + nh_1(n-1)y_1^{n-1}]y_{1,z}^2 + \\ &+ \left(ng_2(4n-2)y_{2,z}^2y_2^{2n-2} + nh_2(n-1)y_{2,z}^2y_2^{n-2} + \right. \\ &+ 2ng_2y_{2,zz}y_2^{2n-1} + nh_2y_{2,zz}y_2^{n-1} + \delta_1k_1^4 + a_1y_1^n + \\ &+ b_1y_1^{2n} + c_1y_1^{3n} + d_1y_1^{4n} + a_2y_2^n + b_2y_2^{2n} + \\ &+ \left. c_2y_2^{3n} + d_2y_2^{4n} + s + \omega_1 - \frac{k_1C_0}{2} \right) y_1 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &\delta_2 y_{2,zzzz} + \left(2\delta_2k_2^2 + nh_4y_2^n + 2ng_4y_2^{2n} + \frac{C_0}{2k_2} \right) y_{2,zz} + \\ &+ [ng_4(4n-2)y_2^{2n-1} + nh_4(n-1)y_2^{n-1}]y_{2,z}^2 + \\ &+ \left(ng_3(4n-2)y_{1,z}^2y_1^{2n-2} + nh_3(n-1)y_{1,z}^2y_1^{n-2} + \right. \\ &+ 2ng_3y_{1,zz}y_1^{2n-1} + nh_3y_{1,zz}y_1^{n-1} + \delta_2k_2^4 + a_3y_1^n + \\ &+ b_3y_1^{2n} + c_3y_1^{3n} + d_3y_1^{4n} + a_4y_2^n + b_4y_2^{2n} + \\ &+ \left. c_4y_2^{3n} + d_4y_2^{4n} + r + \omega_2 - \frac{k_2C_0}{2} \right) y_2 = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя $y_1(z) = D_1R(z)$, $y_2(z) = D_2R(z)$ в систему (11)–(12), мы получаем переопределенную

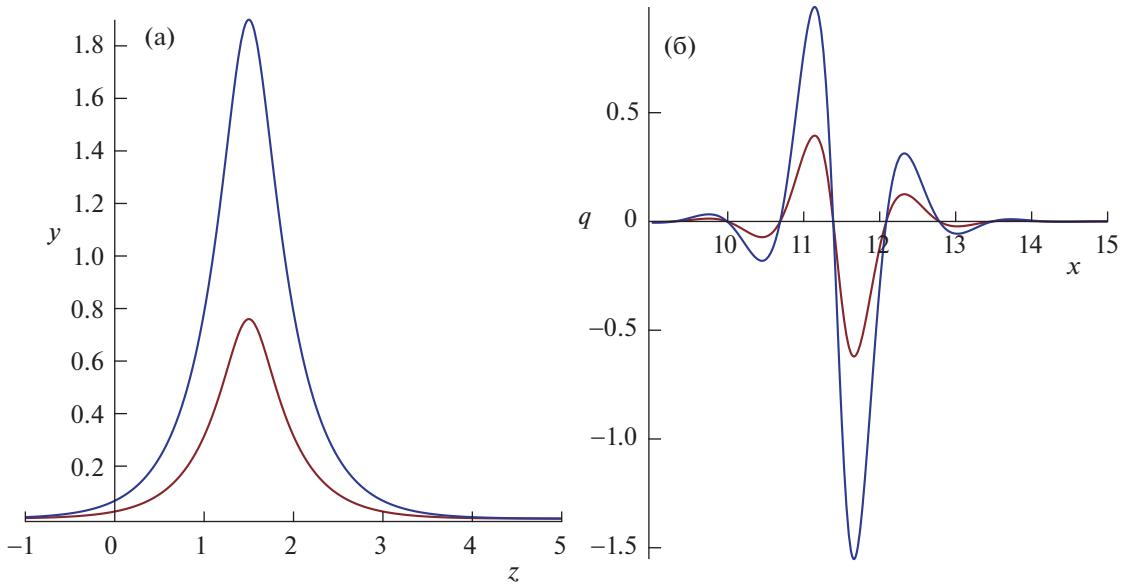


Рис. 1. Графики уединенных волн $y_1(z)$ и $y_2(z)$ (а) и действительных частей $u(x, t)$ и $v(x, t)$ (б) при $t = 10$, $A = 1.0$, $E = 6.0$, $C_0 = 1.0$, $k_1 = 8.0$, $k_2 = 13.0$, $\delta_1 = 1.0$, $\delta_2 = 1.0$, $D_1 = 1.0$, $D_2 = 2.5$, $s = 3.0$, $r = 1.0$, $z_0 = 1.5$, $n = 4.0$.

систему для $R(z)$. Полученные уравнения могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} & P_{i,1}R_{zzz} + P_{i,2}R^nR_{zz} + P_{i,3}R^{2n}R_{zz} + P_{i,4}R_{zz} + \\ & + P_{i,5}R^{2n-1}R_z^2 + P_{i,6}R^{n-1}R_z^2 + P_{i,7}R + P_{i,8}R^{n+1} + \\ & + P_{i,9}R^{2n+1} + P_{i,10}R^{3n+1} + P_{i,11}R^{4n+1} = 0, \quad i = \overline{1, 2}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $P_{i,j}$ ($i = 1, 2$; $j = \overline{1, 11}$) – коэффициенты, зависящие от параметров исходной системы:

$$\begin{aligned} P_{1,1} &= \delta_1 D_1; \quad P_{2,1} = \delta_2 D_2; \\ P_{1,2} &= nh_1 D_1^{n+1} + nh_2 k_1 D_1 D_2^n; \\ P_{2,2} &= nh_4 D_2^{n+1} + nh_3 D_2 D_1^n; \\ P_{1,3} &= 2ng_1 D_1^{2n+1} + 2ng_2 D_1 D_2^{2n}; \\ P_{2,3} &= 2ng_4 D_2^{2n+1} + 2ng_3 D_2 D_1^{2n}; \\ P_{1,4} &= D_1(2\delta_1 k_1^3 + C_0/2k_1); \quad P_{2,4} = D_2(2\delta_2 k_2^3 + C_0/2k_2); \\ P_{1,5} &= n(4n-2)(g_2 D_1 D_2^{2n} + g_1 D_1^{2n+1}); \\ P_{2,5} &= n(4n-2)(g_3 D_2 D_1^{2n} + g_4 D_2^{2n+1}); \\ P_{1,6} &= n(n-1)(h_2 D_1 D_2^n + h_1 D_1^{n+1}); \\ P_{2,6} &= n(n-1)(h_3 D_2 D_1^n + h_4 D_1^{n+1}); \\ P_{1,7} &= D_1 \left(\delta_1 k_1^4 - \frac{k_1 C_0}{2} + s + \omega_1 \right); \\ P_{2,7} &= D_2 \left(\delta_2 k_2^4 - \frac{k_2 C_0}{2} + r + \omega_2 \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{1,8} &= a_2 D_1 D_2^n + a_1 D_1^{n+1}; \quad P_{2,8} = a_3 D_2 D_1^n + a_4 D_1^{n+1}; \\ P_{1,9} &= b_2 D_1 D_2^{2n} + b_1 D_1^{2n+1}; \\ P_{2,9} &= b_3 D_2 D_1^{2n} + b_4 D_2^{2n+1}; \\ P_{1,10} &= c_2 D_1 D_2^{3n} + c_1 D_1^{3n+1}; \\ P_{2,10} &= c_3 D_2 D_1^{3n} + c_4 D_2^{3n+1}; \\ P_{1,11} &= d_2 D_1 D_2^{4n} + d_1 D_1^{4n+1}; \\ P_{2,11} &= d_3 D_2 D_1^{4n} + d_4 D_2^{4n+1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Умножая первое уравнение на $P_{2,1}$, второе – на $P_{1,1}$ и вычитая из первого уравнения второе получаем следующее:

$$\begin{aligned} & Q_1 R^n R_{zz} + Q_2 R^{2n} R_{zz} + Q_3 R_{zz} + Q_4 R^{2n-1} R_z^2 + \\ & + Q_5 R^{n-1} R_z^2 + Q_6 R + Q_7 R^{n+1} + \\ & + Q_8 R^{2n+1} + Q_9 R^{3n+1} + Q_{10} R^{4n+1} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} Q_1 &= n[(\delta_2 h_1 - \delta_1 h_3)D_1^n + (\delta_2 h_2 - \delta_1 h_4)D_2^n]; \\ Q_2 &= 2n[(\delta_2 g_1 - \delta_1 g_3)D_1^{2n} + (\delta_2 g_2 - \delta_1 g_4)D_2^{2n}]; \\ Q_3 &= \frac{2}{k_1 k_2} \left(\delta_1 \delta_2 k_1^3 k_2 - \delta_1 k_1 \left(\delta_2 k_2^3 + \frac{C_0}{4} \right) + \frac{\delta_2 k_2 C_0}{4} \right); \\ Q_4 &= n(4n-2)[(\delta_2 g_1 - \delta_1 g_3)D_1^{2n} + (\delta_2 g_2 - \delta_1 g_4)D_2^{2n}]; \\ Q_5 &= n(n-1)[(\delta_2 h_1 - \delta_1 h_3)D_1^n + (\delta_2 h_2 - \delta_1 h_4)D_2^n]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_6 &= \delta_2 \left(s + \omega_1 - \frac{k_1 C_0}{2} \right) - \\
&- \delta_1 \left(\delta_2 (k_2^4 - k_1^4) + r + \omega_2 - \frac{k_2 C_0}{2} \right); \\
Q_7 &= (a_1 \delta_2 - a_3 \delta_1) D_1^n + (a_2 \delta_2 - a_4 \delta_1) D_2^n; \\
Q_8 &= (b_1 \delta_2 - b_3 \delta_1) D_1^{2n} + (b_2 \delta_2 - b_4 \delta_1) D_2^{2n}; \\
Q_9 &= (c_1 \delta_2 - c_3 \delta_1) D_1^{3n} + (c_2 \delta_2 - c_4 \delta_1) D_2^{3n}; \\
Q_{10} &= (d_1 \delta_2 - d_3 \delta_1) D_1^{4n} + (d_2 \delta_2 - d_4 \delta_1) D_2^{4n}. \quad (16)
\end{aligned}$$

Из уравнений $Q_i = 0, i = \overline{1, 10}$ получаем ограничения на следующие параметры математической модели:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\delta_2} (a_3 \delta_1 - D_1^{-n} D_2^n (a_2 \delta_2 - a_4 \delta_1)); \\
b_1 &= \frac{1}{\delta_2} (b_3 \delta_1 - D_2^{2n} D_1^{-2n} (b_2 \delta_2 - b_4 \delta_1)); \\
c_1 &= \frac{1}{\delta_2} (c_3 \delta_1 - D_2^{3n} D_1^{-3n} (c_2 \delta_2 - c_4 \delta_1)); \\
d_1 &= \frac{1}{\delta_2} (d_3 \delta_1 - D_2^{4n} D_1^{-4n} (d_2 \delta_2 - d_4 \delta_1)); \\
g_1 &= \frac{1}{\delta_2} (g_3 \delta_1 - D_2^{2n} D_1^{-2n} (g_2 \delta_2 - g_4 \delta_1)); \\
h_1 &= \frac{1}{\delta_2} (h_3 \delta_1 - D_1^{-n} D_2^n (h_2 \delta_2 - h_4 \delta_1)); \quad (17) \\
C_0 &= \frac{4 \delta_1 \delta_2 k_1 k_2 (k_1^2 - k_2^2)}{\delta_1 k_1 - \delta_2 k_2}; \\
\omega_1 &= \frac{1}{\delta_2 (\delta_1 k_1 - \delta_2 k_2)} (\delta_1^2 k_1 (\delta_2 (3k_2^4 - k_1^4 - 2k_1^2 k_2^2) + r + \omega_2) - \delta_2 (\delta_2 (k_2^5 + 2k_1^2 k_2^3 - 3k_1^4 k_2) + k_1 s + k_2 (r + \omega_2)) + s \delta_2^2 k_2).
\end{aligned}$$

В этом случае можно решать одно из уравнений, соответствующих действительным частям (6) или (8), с помощью замены $R(z) = F(z)$, где $F(z)$ это решение уравнения [6]

$$F_z^2 n^2 - A F^{n+2}, \quad (18)$$

и имеет вид

$$F(z) = \left[\frac{4 E e^{(z-z_0)\sqrt{n^2 E}}}{A (1 + e^{(z-z_0)\sqrt{n^2 E}})^2} \right]^{1/n}. \quad (19)$$

Уравнение (13) при $i = 1$ в этом случае можно записать как следующее:

$$G_1 F^n + G_2 F^{2n} + G_3 F^{3n} + G_4 F^{4n} + G_5 = 0, \quad (20)$$

где коэффициенты представляются формулами:

$$\begin{aligned}
G_1 &= f_1 D_1^{n+1} (h_3 n^2 E + a_3) - \frac{D_1}{2} (-2 f_1 D_2^n (h_4 n^2 E + a_4) + \\
&+ \delta_2 A (n+2) - (\delta_2 k_2 (f_2 E + 2k_2^2) + \delta_1 k_1 (f_2 E + 2k_1^2))); \\
G_2 &= f_1 D_1^{2n+1} (4 g_3 n^2 E + b_3) + f_1 D_1 D_2^{2n} (4 g_4 n^2 E + b_4) + \\
&+ \frac{f_1 A}{4} (D_1 (\delta_2 A (n+1) (n+2) (3n+2) - \\
&- 6 h_4 n^2 D_2^n) - 6 h_3 n^2 D_1^{n+1}); \\
G_3 &= -f_1 (5 g_3 n^2 A D_1^{2n+1} - c_3 D_1^{3n+1} + \\
&+ D_1 (5 g_4 n^2 A D_2^{2n} - c_4 D_2^{3n})); \quad (21) \\
G_4 &= f_1 (d_4 D_1 D_2^{4n} + d_3 D_1^{4n+1}); \\
G_5 &= D_1 (-\delta_2^2 k_2 (k_2^2 + E)^2 + \delta_2 (3 \delta_1 k_1 k_2^4 - 2 \delta_1 k_1^3 k_2^2 - \\
&- k_2 (r + \omega_2) + \delta_1 k_1 E (2k_1^2 + E)) + \delta_1 k_1 (r + \omega_2)). \\
\text{В (21) введены следующие обозначения:} \\
f_1 &= \delta_1 k_1 - \delta_2 k_2; \quad f_2 = n^2 + 2n + 2. \\
\text{Из уравнений вида } G_i = 0, i = \overline{1, 5} \text{ получаем} \\
a_3 &= \frac{1}{2 f_1} ((-2 f_1 D_2^n (h_4 n^2 E + a_4) + \\
&+ \delta_2 A (n+2) (-k_2 \delta_2 (f_2 E + 2k_2^2) + \\
&+ \delta_1 k_1 (2k_1^2 + f_2 E))) D_1^{-n} - 2 h_3 f_1 n^2 E); \\
b_3 &= -((4 g_4 n^2 E + b_4) D_2^{2n} + \\
&+ \frac{3 A}{4} \left(\delta_2 (n+1) (n+2) \left(n + \frac{2}{3} \right) A - 2 h_4 n^2 D_2^n \right) D_1^{-2n}) + \\
&+ \frac{n^2}{2} (3 h_3 A D_1^{-n} - 8 g_3 E); \\
c_3 &= 5 g_4 n^2 A D_1^{-3n} D_2^{2n} + 5 g_3 n^2 A D_1^{-n} - c_4 D_1^{-3n} D_2^{3n}, \\
d_3 &= -d_4 D_2^{4n} D_1^{-4n}; \\
\omega_2 &= \frac{1}{f_1} (\delta_2^2 k_2 (k_2^2 + E)^2 + \delta_2 (2 \delta_1 k_1^3 k_2^2 - \\
&- 3 \delta_1 k_1 k_2^4 + r k_2 - \delta_1 k_1 E (2k_1^2 + E) - r \delta_1 k_1)).
\end{aligned}$$

Тогда, с учетом (19), решение системы (6)–(9) представляется в виде:

$$\begin{aligned}
y_1(z) &= \left[\frac{4 E D_1 e^{(z-z_0)\sqrt{n^2 E}}}{A (1 + e^{(z-z_0)\sqrt{n^2 E}})^2} \right]^{1/n}, \\
y_2(z) &= \left[\frac{4 E D_2 e^{(z-z_0)\sqrt{n^2 E}}}{A (1 + e^{(z-z_0)\sqrt{n^2 E}})^2} \right]^{1/n}. \quad (22)
\end{aligned}$$

Решение системы уравнений (3)–(4) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left[\frac{4ED_1 e^{(x-C_0t-z_0)\sqrt{n^2 E}}}{A(1 + e^{(x-C_0t-z_0)\sqrt{n^2 E}})^2} \right]^{1/n} e^{i(kx-\omega t)}, \\ v(x, t) &= \left[\frac{4ED_2 e^{(x-C_0t-z_0)\sqrt{n^2 E}}}{A(1 + e^{(x-C_0t-z_0)\sqrt{n^2 E}})^2} \right]^{1/n} e^{i(kx-\omega t)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Ниже приведены графики уединенных волн $y_1(z)$ и $y_2(z)$ и действительных частей $u(x, t)$ и $v(x, t)$ как функции от z и x , соответственно.

Из графиков видно, что наибольшее влияние на решение оказывают параметры n , A и E . При этом параметр n существенно влияет на значение амплитуды волны, а параметры A и E определяют значение минимума графиков уединенных волн $y_1(z)$ и $y_2(z)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривается система двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка, описывающая распространение двух волн в оптической среде. Используя переменные бегущей волны, уравнения в частных производных можно свести к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Определены условия совместности исследуемой системы уравнений. С учетом ограничений на параметры найдены точные решения системы дифференциальных уравнений (3)–(4). Построены и проанализированы графики уединенных волн $y_1(z)$ и $y_2(z)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Biswas Anjan et al. Cubic-quartic optical solitons in Kerr and power law media // Optik. 2017. V. 144. P. 357–362.
2. Hosseini K. et al. New optical solitons of cubic-quartic nonlinear Schrödinger equation // Optik. 2018. V. 157. P. 1101–1105.
3. Кудряшов Н.А., Кутуков А.А. Автоматизация построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений // Вестник Национального исследовательского ядерного университета МИФИ. 2019. Т. 8. № 6. С. 533–539.
4. Kudryashov N.A. Highly dispersive optical solitons of equation with various polynomial nonlinearity law // Chaos, Solitons & Fractals. 2020. V. 140. P. 110202.
5. Kudryashov N.A. Highly dispersive optical solitons of equation with arbitrary refractive index // Regular and Chaotic Dynamics. 2020.
6. Kudryashov N.A. Optical solitons of mathematical model with arbitrary refractive index // Optik. 2020. P. 165391.
7. Kudryashov N.A. On traveling wave solutions of the Kundu–Eckhaus equation // Optik. 2020. V. 224. P. 165500.
8. Kudryashov N.A. First integrals and general solution of the complex Ginzburg–Landau equation // Applied Mathematics and Computation. 2020. V. 386. P. 125407.
9. Das A., Biswas A., Ekici M., Zhou Q., Alshomrani A.S., Belic M.R. Optical solitons with complex Ginzburg–Landau equation for two nonlinear forms using F-expansion // Chinese Journal of Physics. 2019. V. 61. P. 255–261.
10. Biswas Anjan, Milovic D. Bright and dark solitons of the generalized nonlinear Schrödinger’s equation // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2010. V. 15. № 6. P. 1473–1484.
11. Sturdevant Benjamin. Topological 1-soliton solution of the Biswas–Milovic equation with power law nonlinearity // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2010. V. 11. № 4. P. 2871–2874.
12. Biswas Anjan, Saima Arshed. Optical solitons in presence of higher order dispersions and absence of self-phase modulation // Optik. 2018. V. 174. P. 452–459.
13. Ekici Mehmet, Abdullah Sonmezoglu. Optical solitons with Biswas–Arshed equation by extended trial function method // Optik. 2019. V. 177. P. 13–20.
14. Yildirim Yakup et al. Cubic-quartic optical solitons in birefringent fibers with four forms of nonlinear refractive index by exp-function expansion // Results in Physics. 2020. V. 16. P. 102913.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 5, pp. 449–454

Optical Solitons Described by a System of the Fourth Order Nonlinear Differential Equations with Nonlocal Nonlinearity

K. V. Kan^{a, #} and N. A. Kudryashov^{a, ##}

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

#e-mail: kan_13@mail.ru

##e-mail: nakudr@gmail.com

Received September 23, 2020; revised September 23, 2020; accepted November 24, 2020

Abstract—A system of nonlinear partial differential equations of the fourth order with nonlocal nonlinearity is investigated. The system of equations describes the propagation of two waves in an optical fiber. The Cau-

chy problem for the considered system is unsolvable by the inverse scattering method. Traveling wave variables are used to transform the system of partial differential equations to a system of ordinary differential equations of the fourth order. The simplest equation method is applied to seek exact solutions in the form of solitary waves. The transformed system of ordinary differential equations consists of four equations, corresponding to the real and imaginary parts of the initial system. Constraints on the parameters of the initial model are found. The system of differential equations corresponding to the real parts is considered together with the determined constraints. Compatibility conditions for the system are found. One of the equations corresponding to the real part is studied taking into account the constraints for the parameters obtained from compatibility conditions. Exact solutions in the form of solitary waves are found. Graphs of the solutions obtained at different parameter values of the initial system of equations with the determined constraints are constructed. The influence of the mathematical model parameters on the behavior of solutions is analyzed.

Keywords: solitary waves, nonlinear differential equations, pulse propagation, optical fiber

DOI: 10.1134/S2304487X20050053

REFERENCES

1. Biswas Anjan, et al., Cubic–quartic optical solitons in Kerr and power law media, *Optik*, 2017, vol. 144, pp. 357–362.
2. Hosseini K. et al., New optical solitons of cubic-quartic nonlinear Schrödinger equation, *Optik*, 2018, vol. 157, pp. 1101–1105.
3. Kudryashov N.A., Kutukov A.A., Avtomatizatsiya Postroyeniya tochnykh resheniy nelineynykh differentsialnykh uravneniy, *Vestnik Natsionalnogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta MIFI*, 2019, vol. 8, no. 6, pp. 533–539.
4. Kudryashov N.A., Highly dispersive optical solitons of equation with various polynomial nonlinearity law, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2020, vol. 140, p. 110202.
5. Kudryashov N.A., Highly dispersive optical solitons of equation with arbitrary refractive index, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2020.
6. Kudryashov N.A., Optical solitons of mathematical model with arbitrary refractive index, *Optik*, 2020, p. 165391.
7. Kudryashov N.A., On traveling wave solutions of the Kundu–Eckhaus equation, *Optik*, 2020, vol. 224, p. 165500.
8. Kudryashov N.A., First integrals and general solution of the complex Ginzburg–Landau equation, *Applied Mathematics and Computation*, 2020, vol. 386, p. 125407.
9. Das A., Biswas A., Ekici M., Zhou Q., Alshomrani A.S., Belic M.R., Optical solitons with complex Ginzburg–Landau equation for two nonlinear forms using F-expansion, *Chinese Journal of Physics*, 2019, vol. 61, pp. 255–261.
10. Biswas Anjan, Daniela Milovic, Bright and dark solitons of the generalized nonlinear Schrödinger's equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, vol. 15, no. 6, pp. 1473–1484.
11. Sturdevant Benjamin, Topological 1-soliton solution of the Biswas–Milovic equation with power law nonlinearity, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2010, vol. 11, no. 4, pp. 2871–2874.
12. Biswas Anjan, Saima Arshed, Optical solitons in presence of higher order dispersions and absence of self-phase modulation, *Optik*, 2018, vol. 174, pp. 452–459.
13. Ekici Mehmet, Abdullah Sonmezoglu, Optical solitons with Biswas–Arshed equation by extended trial function method, *Optik*, 2019, vol. 177, pp. 13–20.
14. Yildirim Yakup et al., Cubic-quartic optical solitons in birefringent fibers with four forms of nonlinear refractive index by exp-function expansion, *Results in Physics*, 2020, vol. 16, p. 102913.