

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

### ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ИЕРАРХИИ $K_2$

© 2020 г. Н. А. Кудряшов<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup> Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409 Россия

\*e-mail: nakudryashov@mephi.ru

Поступила в редакцию 15.07.2020 г.

После доработки 15.07.2020 г.

Принята к публикации 13.10.2020 г.

Рассматривается нелинейное уравнение четвертого порядка, которое является вторым членом иерархии уравнений  $K_2$ . Иерархия  $K_2$ , как и иерархия уравнений  $K_1$ , была введена всего лишь чуть более двадцати лет назад. Отличительной особенностью указанных иерархий является, то что все уравнения, принадлежащие этой иерархии, не имеют первых интегралов в полиномиальной форме и, по-видимому, как и шесть уравнений Пенлеве не имеют решений выраженных через классические функции. Уравнения иерархии  $K_2$  также как и уравнения первой и второй иерархий Пенлеве встречаются при описании физических процессов и в связи с этим их изучение представляет интерес. В данной работе показано, что уравнение четвертого порядка из иерархии  $K_2$  может быть представлено в виде специальной динамической системы, для которой может быть получено формальное представление общего решения.

**Ключевые слова:** Пенлеве уравнение, Пенлеве трансцендент, динамическая система, решение

**DOI:** 10.1134/S2304487X2006005X

#### 1. ВЕДЕНИЕ

Уравнения Пенлеве были открыты великим французским математиком и государственным деятелем Полем Пенлеве и его учениками более 120 лет назад [1–4]. После впечатляющего успеха Софьи Васильевны Ковалевской при решении задачи о вращении твердого тела с неподвижной точкой (задачи о волчке) французский математик Пикар высказал идею о необходимости анализа о необходимости исследования аналитических свойств одного из простых классов дифференциальных уравнений второго порядка

$$y_{zz} = F(y_z, y, z), \quad (1)$$

где зависимость  $F(y_z, y, z)$  является локально аналитической функцией от переменных  $y_z$ ,  $y$  и  $z$  [5].

Задача, которая решалась Пенлеве и его учениками была следующей: найти все канонические дифференциальные уравнения вида (1), с решениями не имеющими критических подвижных (зависимых от начальных условий) особых точек на комплексной плоскости.

В результате длительного исследования Пенлеве и его ученикам удалось провести классификацию нелинейных дифференциальных уравнений типа (1) и найти все уравнения с решениями представляемыми в виде мероморфных функций. Оказалось, что таких уравнений всего пятьдесят с

правой частью выраженной через рациональные функции. При этом 44 уравнения из класса Пенлеве выражаются через элементарные и специальные функции, а оставшиеся четыре уравнения, которые теперь называются уравнениями Пенлеве определяют новые специальные функции, называемые трансцендентами Пенлеве [6–8].

Таким образом, школе Пенлеве удалось не только провести классификацию уравнений (1), но и найти шесть новых нелинейных уравнений второго порядка, которые определяют новые специальные функции – трансценденты Пенлеве.

После открытия Пенлеве среди людей знакомых с аналитической теорией дифференциальных уравнений в течение долгого времени бытовало убеждение, что уравнения Пенлеве – пример интересных уравнений, но не нужных при описании процессов, происходящих в науке и в природе.

Ситуация принципиально изменилась в 60-х и 70-х годах прошлого столетия, когда оказалось, что уравнения Пенлеве возникают как редукции нелинейных уравнений в частных производных, задача Коши для которых решается методом обратной задачи рассеяния.

Кроме того в те же годы были найдены многочисленные примеры применения трансцендент Пенлеве для описания ряда физических задач. Это обстоятельство послужило мощным толчком

для многочисленных работ, в которых изучались самые разные аспекты уравнений Пенлеве.

В настоящее время, многие результаты относящиеся к уравнениям Пенлеве, уже хорошо известны. Первое важное свойство состоит в том, что решения уравнения Пенлеве имеют разложение в ряд Лорана вблизи полюсов на комплексной плоскости. Для всех уравнений Пенлеве найдены линейные системы уравнений условия совместности которых приводят к уравнениям Пенлеве, что фактически позволяет построить общее решение используя аналог метода обратной задачи рассеяния.

Для всех уравнений Пенлеве, кроме первого, были получены бирациональные преобразования, которые позволяют провести генерирование рациональных и специальных решений при некоторых фиксированных значениях параметров всех уравнений Пенлеве, кроме первого. Оказалось, что все уравнения Пенлеве несмотря на единственность их решений и возможность построения решения являются примером уравнений, которые не имеют первых интегралов в форме полиномов.

Очень важное обстоятельство характерное для уравнений Пенлеве связано с тем, что их решения зависят существенно трансцендентным образом от постоянных интегрирования и, как следствие этого, являются неклассическими функциями, решения которых не представимы через алгебраические операции.

После открытия Пенлеве и его учеников в течение долгого времени не было ясности: есть ли другие уравнения, обладающие свойствами аналогичными уравнениям Пенлеве. Этот вопрос был решен в 1997 году, когда в работе [9] были приведены две иерархии уравнений Пенлеве (иерархии первого и второго уравнений Пенлеве) с уравнениями, имеющими такие же замечательные свойства. Иерархия первого уравнения Пенлеве имеет вид [9–11]:

$$L_n[y] = z, \quad (2)$$

и иерархия второго уравнения Пенлеве может быть записана в виде:

$$\left(\frac{d}{dz} + y\right)L_n\left[y_z - \frac{1}{2}y^2\right] = zy + \alpha_n. \quad (3)$$

В иерархиях (2) и (3) оператор  $L_n[y]$  определяется следующим правилом

$$\frac{d}{dz}L_{n+1}[y] = \left(\frac{d^3}{dz^3} + 4y\frac{d}{dz} + 2\frac{dy}{dz}\right)L_n[y], \quad L_0 = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Кроме указанных двух иерархий в настоящее время известен целый ряд других иерархий нелинейных дифференциальных уравнений, свойства которых интенсивно изучаются в последние годы.

Эти иерархии можно найти в следующих работах [12–14].

Иерархии очень похожие на иерархии (2) и (3), но отличающиеся от них, были предложены в работах [12–14], которые были названы иерархиями  $K_1$  и  $K_2$ .

В данной работе рассматривается уравнение четвертого порядка из иерархии уравнений  $K_1$ . Уравнение имеет вид

$$y_{zzzz} - 18yy_{zz} + 9y_z^2 + 24y^3 = z. \quad (5)$$

Цель данной работы найти представление уравнения (5) в виде динамической системы, удобное для поиска формального решения уравнения (5).

## 2. ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ (5)

В работах [15–17] рассмотрено применение идей метода квазиклассического подхода для построения формального решения уравнений иерархии (2). Следуя указанным работам, применим этот подход для построения решений уравнения четвертого порядка иерархии  $K_1$ , имеющего вид (5). С этой целью введем следующую динамическую систему:

$$\frac{du_1}{dt} = 2v_1, \quad (6)$$

$$\frac{dv_1}{dt} = 2u_2 + 3u_1^2, \quad (7)$$

$$\frac{du_2}{dt} = 2v_2, \quad (8)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = 2t + \frac{39}{8}u_1u_2 - \frac{471}{64}u_1^3 + \frac{87}{16}v_1^2. \quad (9)$$

Покажем, что система уравнений (6)–(9) эквивалентна исходному уравнению четвертого порядка (5). Подставляя  $v_1(t)$  из уравнения (6) в уравнение (7) получаем уравнение

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} = 4u_2 + 6u_1^2. \quad (10)$$

Подставляя  $v_2(t)$  из уравнения (8) в уравнение (9), имеем дифференциальное уравнение в виде:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2u_2}{dt^2} = 2t + \frac{39}{8}u_1u_2 - \frac{471}{64}u_1^3 + \frac{87}{16}v_1^2. \quad (11)$$

Принимая во внимание уравнения (10) и (11), из (11) получаем уравнение четвертого порядка:

$$\frac{1}{8}\frac{d^4u_1}{dt^4} - 2t + \frac{9}{32}u_1\frac{d^2u_1}{dt^2} + \frac{9}{64}\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + \frac{3}{64}u_1^3, \quad (12)$$

которое после замены  $u_1(t) = 8y(t)$  приводится к уравнению (5). Следовательно, система уравнений (6)–(9) и уравнение (5) эквивалентны.

Система уравнений (6)–(9) соответствующая нелинейному уравнению (5) также проходит тест Пенлеве и, как можно видеть с точностью до значений коэффициентов совпадает с ситемой рассмотренной в работах [15–17] для построения инстантонных решений. Естественно полагать, что уравнение (5) имеет также решения типа инстантонов.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Эта работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект номер 18-29-10025) и государственным заданием министерства высшей школы и науки Российской Федерации № 0723 2020-0036.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Painlevé P.* Sur les equations differentielles du second ordre et d'ordre superieur dont l'integrale generale est uniforme // *Acta Math.* 1902. V. 25. P. 1–85.
2. *Gambier B.* Sur les équations différentielles dont l'integrale générale est uniforme // *C.R. Acad. Sci. Paris.* 1906. V. 142. P. 266–269, 1403–1406, 1497–1500.
3. *Borisov A.V., Kudryashov N.A.* Paul Painlevé and His Contribution to Science // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2014. V. 19. № 1. P. 1–19.
4. *Kudryashov N.A.* Higher Painlevé transcendents as Special Solutions of Some Nonlinear Integrable Hierarchies // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2014. V. 19. № 1. P. 48–63.
5. *Conte R.* The Painleve property, one century later, CRM series in mathematical physics. New York: Springer–Verlag, 1999. P. 77–180.
6. *Drazin P.G., Johnson R.S.* Solitons: an introduction. Cambridge University Press, 1989.
7. *Drazin P.G.* Nonlinear systems. Cambridge University Press, 1992.
8. *Ablowitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge University Press, 1991.
9. *Kudryashov N.A.* The first and second Painlevé equations of higher order and some relations between them // *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics.* 1997. V. 224. № 6. P. 353–360.
10. *Kudryashov N.A.* On new transcendents defined by nonlinear ordinary differential equations // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* 1998. V. 31. № 6. P. L129–L137, cited by 32.
11. *Kudryashov N.A.* Transcendents defined by nonlinear fourth-order ordinary differential equations // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* 1999. V. 32. № 6. P. 999–1013, cited by 31.
12. *Kudryashov N.A.* Special polynomials associated with some hierarchies // *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics.* 2008. V. 372. № 12. P. 1945–1956.
13. *Kudryashov N.A.* One generalization of the second Painlevé hierarchy // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* 2002. V. 35. № 1. P. 93–99.
14. *Kudryashov N.A.* Amalgamations of the Painlevé equations // *Journal of Mathematical Physics.* 2003. V. 44. № 12. P. 6160–6178.
15. *Kawai T., Koike T., Nishikawa Y., Takei Y.* On the Stokes geometry of higher order Painlevé equations // *Analyse complexe, systemes dynamiques, sommabilite des series divergentes et theories galoisiennes. II* *Astrisque* 2004. № 297. P. 117–166.
16. *Shimomura S.* Poles and  $\alpha$ -poles of meromorphic Solutions of the First Painlevé Hierarchy // *Bull. RIMS, Kyoto Univ.* 2004. V. 40. P. 471–485.
17. *Aoki T.* Multiple-Scale Analysis for Higher-order Painlevé Equations // *RIMS Kokyuroke Bessatsu B.* 2008. V. 5. P. 89–98.

---

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 6, pp. 517–520

---

## Dynamical System for the Nonlinear Fourth-Order Differential Equation from the $K_2$ Hierarchy

N. A. Kudryashov<sup>a, #</sup>

<sup>a</sup> National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

<sup>#</sup>e-mail: nakudryashov@mephi.ru

Received July 15, 2020; revised July 15, 2020; accepted October 13, 2020

**Abstract**—A fourth-order nonlinear equation, which is the second member of the  $K_2$  hierarchy equations, has been considered. The  $K_2$  hierarchy, as well as the  $K_1$  hierarchy of equations, was introduced more than twenty years ago. A distinctive feature of these hierarchies is that all the equations belonging to this hierarchy do not have any first integrals in a polynomial form and, apparently, as well as the six Painlevé equations, they do not have solutions expressed in terms of classical functions. The equations of the  $K_2$  hierarchy, as well as the equations of the first and second Painlevé hierarchies, are used to describe physical processes, and their investigation is of interest

in this regard. It has been shown that this fourth-order equation from the  $K_2$  hierarchy can be represented as a special dynamical system for which a formal representation of the general solution can be obtained.

**Keywords:** Painlevé equation, Painlevé transcendent, dynamical system, solution

DOI: 10.1134/S2304487X2006005X

## REFERENCES

1. Painlevé P. Sur les equations differentielles du second ordre et d'ordre superieur dont l'integrale generale est uniforme. *Acta Math.*, 1902, vol. 25, pp. 1–85.
2. Gambier B. Sur les equations differentielles dont l'integrale generale est uniforme. *C.R. Acad. Sc. Paris*, 1906, vol. 142, pp. 266–269, 1403–1406, 1497–1500.
3. Borisov A.V., Kudryashov N. A. Paul Painlevé and His Contribution to Science. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2004, vol. 19, № 1, pp. 1–19.
4. Kudryashov N. A. Higher Painlevé transcendents as Special Solutions of Some Nonlinear Integrable Hierarchies. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2014, vol. 19, № 1, pp. 48–43.
5. Conte R. *The Painlevé property, one century later*, CRM series in mathematical physics, New York: Springer – Verlag, 1999, pp. 77–180.
6. Drazin P.G., Johnson R.S. *Solitons: an introduction*. Cambridge University press, 1989.
7. Drazin P.G. *Nonlinear systems*. Cambridge University press, 1992.
8. Ablowitz M. J. and Clarkson P. A. *Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. Cambridge University press, 1991.
9. Kudryashov N. A. The first and second Painlevé equations of higher order and some relations between them. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 1997, vol. 224, № 6, pp. 353–360.
10. Kudryashov N.A. On new transcendents defined by nonlinear ordinary differential equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1998, vol. 31, № 6, L129–L137, cited By 32.
11. Kudryashov N.A. Transcendents defined by nonlinear fourth–order ordinary differential equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1999, vol. 32, № 6, pp. 999–1013, cited By 31.
12. Kudryashov N.A. Special polynomials associated with some hierarchies. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2008, vol. 372, № 12, pp. 1945–1956.
13. Kudryashov N.A. One generalization of the second Painlevé hierarchy. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2002, vol. 35, № 1, pp. 93–99.
14. Kudryashov N.A. Amalgamations of the Painlevé equations. *Journal of Mathematical Physics*, 2003, vol. 44, № 12, pp. 6160–6178.
15. Kawai T., Koike T., Nishikawa Y., Takei Y. On the Stokes geometry of higher order Painlevé equations. *Analyse complexe, systemes dynamiques, sommabilite des series divergentes et theories galoisiennes. II Astrisque*, 2004, № 297, pp. 117–166.
16. Shimomura S. Poles and  $\alpha$ -poles of meromorphic Solutions of the First Painlevé Hierarchy. *Bull. RIMS, Kyoto Univ.*, 2004, vol. 40, pp. 471–485.
17. Aoki T. Multiple-Scale Analysis for Higher-order Painlevé Equations. *RIMS Kokyuroke Bessatsu B*, 2008, vol. 5, pp. 89–98.