

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ШЕСТОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ОПТИЧЕСКИХ
ИМПУЛЬСОВ

© 2020 г. Д. В. Сафонова^{1,*}, Н. А. Кудряшов^{1,**}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409 Россия

*e-mail: safonovadashav@gmail.com

**e-mail: nakudryashov@mephi.ru

Поступила в редакцию 04.12.2020 г.

После доработки 04.12.2020 г.

Принята к публикации 22.12.2020 г.

Рассматривается дифференциальное уравнение в частных производных шестого порядка с нелокальными и степенными нелинейностями. Уравнение используется для описания импульсов в оптической среде. Задача Коши для этого уравнения не решается методом обратной задачи рассеяния, поэтому принимается во внимание редукция исследуемого уравнения к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ). Уравнение шестого порядка приводится к системе ОДУ, используя переменные бегущей волны. Для проверки интегрируемости полученной системы ОДУ применяется тест Пенлеве. Показано, что система ОДУ не проходит тест Пенлеве, поскольку имеются комплексные индексы Фукса. При проверке системы ОДУ на тест Пенлеве, найдены условия на параметры уравнения, при которых система ОДУ становится совместной. Принимая во внимание эти условия, получено одно ОДУ шестого порядка, из которого находится решение исходного уравнения. Для построения решений используется метод простейших уравнений. Найденные решения выражены через экспоненциальную функцию и эллиптическую функцию Якоби. Полученные решения имеют соответственно вид уединенных и периодических волн. Иллюстрируются волновые решения исследуемого уравнения при некоторых значениях параметров.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, точное решение, тест Пенлеве, оптические импульсы

DOI: 10.1134/S2304487X20060085

1. ВВЕДЕНИЕ

Оптические волокна являются неотъемлемой частью многих устройств, необходимых для промышленности и повседневной жизни. Поэтому в настоящее время существует большое количество моделей описания распространения оптических импульсов. В данной работе упомянем лишь некоторые известные уравнения используемые в нелинейной оптике: уравнение Радхакришнана–Кунду–Лаксманана [1–3], уравнение Кунду–Меркури–Наскара [4–6], уравнение Чена–Ли–Лу [7–9], уравнение Трики–Бисваса [10–12], уравнение Герджикова–Иванова [13–15], уравнение Бисваса–Аршеда [16–18], уравнение Фокаса–Ленелса [19–21] и другие [22–25]. При построении решений нелинейных дифференциальных уравнений очень важным вопросом является их интегрируемость. Распространенным подходом анализа существования общего решения обыкновенного дифференциального уравнения является применение теста Пенлеве [26–31].

В этой работе изучается дифференциальное уравнение шестого порядка со степенными и нелокальными нелинейностями, предложенное в статье [32]

$$iu_t + \alpha u_{xx} + i\beta u_{xxx} + \chi u_{xxxx} + i\delta u_{xxxxx} + u_{xxxxx} + \mu |u|^2 u + \nu |u|^4 u + \kappa |u|^6 u + \rho |u|^2 u_{xx} + i \frac{\delta \rho}{3} |u|^2 u_x = 0, \quad (1)$$

где i – мнимая единица ($i^2 = -1$), $u(x, t)$ – комплекснозначная функция, описывающая волновой профиль, $\alpha, \beta, \delta, \kappa, \mu, \nu, \rho, \chi$ – параметры уравнения (1). В соответствии с гипотезой Абловица–Рамани–Сегура задача Коши для уравнения в частных производных (УЧП) не решается методом обратной задачи рассеяния, если хоть одна его редукция к ОДУ не проходит тест Пенлеве. Поэтому, как простейшую редукцию к ОДУ, используем переменные бегущей волны

$$u(x, t) = y(z) \exp(i(\psi(z) - \omega t)), \quad z = x - C_0 t. \quad (2)$$

Подставляя в уравнение (1) $u(x, t)$ в виде (2) и используя обозначение $\psi_z = \phi$, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравне-

ний, составленную из мнимой и действительной части уравнения, путем приравнивания их нулю,

$$\begin{aligned} & \alpha u \phi_z - 15\delta y_z \phi_z^2 + \rho y^3 \phi_z - 90y_z \phi \phi_z^2 + 15y \phi^4 \phi_z - 20y_{zzz} \phi^3 + 2\alpha y_z \phi - 4\chi y_z \phi^3 - \\ & - 3\beta y_z \phi^2 + 5\delta y_z \phi^4 + 6y_{zzzz} \phi - y_z C_0 + 6y_z \phi^5 + 6y_z \phi_{zzzz} + 15y_{zzzz} \phi_z + \beta y_{zzz} + \\ & + \delta y_{zzzz} - 10\delta y \phi_z \phi_{zz} - 5\delta y \phi_{zzz} \phi - 20\delta y \phi_z \phi_{zz} \phi - 30y_{zz} \phi \phi_z - \\ & - 60y \phi_{zz} \phi \phi_z - 15y \phi_z^3 + \frac{1}{3} \delta \rho y^2 y_z + 15y_{zz} \phi_{zzz} + \chi y \phi_{zzz} + 4\chi y_z \phi_{zz} + \\ & + 20y_{zzz} \phi_{zz} + 6\chi y_{zz} \phi_z + 4\chi y_{zzz} \phi - 10\delta y_{zzz} \phi^2 + 2\rho y^2 y_z \phi - 15y \phi_{zzz} \phi^2 - \\ & - 60y_z \phi_{zz} \phi^2 - 90y_{zz} \phi^2 \phi_z + 10\delta y \phi^3 \phi_z - 3\beta y \phi_z \phi - 6\chi y \phi^2 \phi_z + y \phi_{zzzz} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \chi y_{zzzz} + \alpha y_{zz} - 10y \phi_{zz}^2 - 45y_{zz} \phi_x^2 - 3\beta y_x \phi_z - 3\chi y \phi_z^2 - \delta y \phi_{zzzz} - 5\delta y_z \phi_{zzz} - \\ & - \beta y \phi_{zz} + \rho y^2 y_{zz} + y_{zzzz} - 15y_{zzzz} \phi^2 + 15y_{zz} \phi^4 + y \phi C_0 - \delta y \phi^5 - \alpha y \phi^2 - \rho y^3 \phi^2 + \\ & + \beta y \phi^3 + \chi y \phi^4 + 60y_z \phi^3 \phi_z + 45y \phi_z^2 \phi^2 + y \omega + \kappa y^7 + \nu y^5 + \mu y^3 - y \phi^6 - 10\delta y_{zz} \phi_{zz} - \\ & - 4\chi y \phi_{zz} \phi + 10\delta y \phi_{zz} \phi^2 - 15y \phi_{zzz} \phi_z - 60y_z \phi_z \phi_{zz} - 10\delta y_{zzz} \phi_z - \\ & - 6y \phi_{zzzz} \phi - 30y_z \phi_{zzz} \phi + 20y \phi_{zz} \phi^3 - 6\chi y_{zz} \phi^2 - 3\beta y_{zz} \phi + 10\delta y_{zz} \phi^3 - \frac{1}{3} \delta \rho y^3 \phi - \\ & - 60y_{zz} \phi_{zz} \phi - 5\delta y_{zzzz} \phi - 12\chi y_z \phi_z \phi + 30\delta y_z \phi^2 \phi_z + 15\delta y \phi_z^2 \phi - 60y_{zzz} \phi_z \phi = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

Цель данной работы заключается в изучении интегрируемости системы уравнений (3), (4) и построении точных решений уравнения (1) в переменных бегущей волны.

Статья состоит из трех разделов. Раздел 2 посвящен изучению интегрируемости системы уравнений (3)–(4) с помощью теста Пенлеве. Раздел 3 посвящен построению точных решений уравнения (1) в переменных бегущей волны, используя метод простейших уравнений.

2. ТЕСТ ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (3)–(4)

Для исследования интегрируемости системы уравнений (3)–(4) воспользуемся тестом Пенлеве. Тест Пенлеве – эффективный инструмент изучения аналитических свойств ОДУ, прохождение теста является необходимым условием интегрируемости ОДУ. Для выполнения теста Пенлеве будем использовать модифицированный алгоритм Ковалевской [28–30]. Этот алгоритм состоит из трех шагов:

1. Определение ведущих членов уравнения и порядка полюса решения;
2. Нахождение индексов Фукса;
3. Поиск произвольных констант в разложении решения в ряд Лорана. Применим этот алгоритм к системе уравнений (3)–(4).

Шаг 1. Используя подстановки

$$y(z) = y_0(z - z_0)^{-p}, \quad \phi(z) = \phi_0(z - z_0)^{-q}, \quad (5)$$

находим ведущие члены для уравнений системы (3)–(4). Для этого в (3)–(4) подставляем $y(z)$, $\phi(z)$ в виде (5) и выбираем слагаемые, дающие минимальные показатели степеней при $(z - z_0)$.

Для системы уравнений (3)–(4) возможны два варианта ведущих членов. Если $p = 1$, а $q = 0$, то уравнения с ведущими слагаемыми будут следующие

$$\begin{cases} 6y_{zzzz} \phi + \delta y_{zzzz} = 0, \\ y_{zzzz} + \kappa y^7 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

При этом полученные значения $p = 1$ и $q = 0$ соответствуют полюсам функций $y(z)$ и $\phi(z)$. То есть в этом случае функция $y(z)$ имеет полюс первого порядка, а функция $\phi(z)$ не имеет полюсов. Из (5) и (6) находим y_0 и ϕ_0 , имеющие вид

$$y_0^6 = -\frac{720}{\kappa}, \quad \phi_0 = -\frac{\delta}{6}. \quad (7)$$

Так же возможен вариант, когда обе функции y_0 и ϕ_0 имеют полюса первого порядка. Это соответствует параметрам $p = 1$ и $q = 1$. При этом получаем следующие уравнения с ведущими членами

$$\begin{cases} -15y\phi_{zzz}\phi^2 - 60y_z\phi_{zz}\phi^2 - 90y_{zz}\phi^2\phi_z - 60y\phi_{zz}\phi\phi_z + 6y_{zzzz}\phi + y\phi_{zzzz} + 35y_{zz}\phi_{zz} + 15y_{zzz}\phi_z - 20y_{zzz}\phi^3 + \\ + 6y_z\phi_{zzz} - 15y\phi_z^3 + 6y_z\phi^5 + 15y\phi^4\phi_z - 90y_z\phi\phi_z^2 = 0, \\ 60y_z\phi^3\phi_z + 45y\phi_z^2\phi^2 - 15y_{zzz}\phi^2 + 15y_{zz}\phi^4 - 10y\phi_{zz}^2 - 45y_{zz}\phi_z^2 + \kappa y^7 - y\phi^6 + y_{zzzzz} - 60y_z\phi_z\phi_{zz} + 20y\phi_{zz}\phi^3 - \\ - 60y_{zz}^2\phi_{zz}\phi - 6y\phi_{zzzz}\phi - 15y\phi_{zzz}\phi_z - 60y_{zzz}\phi_z\phi - 30y_z\phi_{zzz}\phi = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Из (5) и (8) находим следующие параметры y_0 и ϕ_0

$$y_0^6 = \frac{\phi_0^6 - 175\phi_0^4 + 1624\phi_0^2 - 720}{\kappa}, \quad (9)$$

$$\phi_0 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{70 \pm 2\sqrt{889}}.$$

В результате выполнения первого шага теста Пенлеве получились целые значения параметров p и q , поэтому переходим ко второму шагу: поиск индексов Фукса.

Шаг 2. Сначала рассмотрим случай $p = 1$ и $q = 0$. Индексы Фукса соответствуют номерам коэффициентов разложения решения в ряд Лорана, которые не определяются. Поэтому в уравнение (6) подставляем $y(z)$ и $\phi(z)$ в виде

$$y(z) = \frac{y_0}{\xi} + a_1 \xi^{j-1}, \quad \phi(z) = \phi_0 + a_2 \xi^j, \quad \xi = z - z_0, \quad (10)$$

и составляем матрицу из коэффициентов при первых степенях a_1 и a_2 . Получаем следующую систему уравнений для определения индексов Фукса

$$\begin{pmatrix} 0 & -720y_0\xi^{j-6} \\ \xi^{j-7}(7\kappa y_0^6 + j^6 - 21j^5 + 175j^4 - 735j^3 + 1624j^2 - 1764j + 720) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Приравнивая нулю определитель полученной матрицы, находим следующие индексы Фукса j

$$j_1 = -1, \quad j_2 = 8, \quad j_{3,4,5,6} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-23 \pm i24\sqrt{6}}. \quad (11)$$

Из выражения (11) следует, что два индекса целые, а четыре комплексные. При $p = 1$ и $q = 1$ вычисления дают аналогичные результаты. Наличие комплексных индексов Фукса указывает на то, что система уравнений (3)–(4) и следовательно исходное уравнение (1) не проходит тест Пенлеве. Поэтому, вообще говоря, нет необходимости проделывать следующий шаг теста. Однако, третий шаг теста Пенлеве часто подсказывает ограничения на параметры, при которых можно упростить исходную систему. Поэтому выполним третий шаг.

Шаг 3. Используем $y(z)$ и $\phi(z)$ в виде

$$\begin{aligned} y(z) &= \frac{y_0}{\xi} + y_1 + y_2\xi + y_3\xi^2 + y_4\xi^3 + \\ &+ y_5\xi^4 + y_6\xi^5 + y_7\xi^6 + y_8\xi^7, \\ \phi(z) &= \phi_0 + \phi_1\xi + \phi_2\xi^2 + \phi_3\xi^3 + \\ &+ \phi_4\xi^4 + \phi_5\xi^5 + \phi_6\xi^6 + \phi_7\xi^7 + \phi_8\xi^8, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\xi = z - z_0.$$

Подставляем (12) в систему уравнений (3)–(4) и собираем коэффициенты при различных степенях ξ . Приравнивая нулю выражения при степе-

нях ξ , находим коэффициенты разложения (12). При этом получаем, что все коэффициенты $\phi_i = 0$, кроме коэффициентов с номерами $i = 0, 2, 4$. Выбирая значения ϕ_2 и ϕ_4 равными нулю, помучаем значение скорости бегущей волны C_0 и параметра β в виде

$$C_0 = -\frac{1}{81}\delta^5 - \frac{1}{27}\chi\delta^3 - \frac{1}{3}\alpha\delta, \quad (13)$$

$$\beta = \frac{5}{27}\delta^3 + \frac{2}{3}\chi\delta.$$

При условии (13) получаем тривиальное решение $\phi(z) = \phi_0 = -\delta/6$. В этом случае исходная система уравнений становится совместной. Уравнение (3) тождественно выполняется, и задача сводится к решению уравнения (4), имеющего вид

$$\begin{aligned} y_{zzzzz} + \left(\frac{5}{12}\delta^2 + \chi\right)y_{zzzz} + \left(\frac{25}{432}\delta^4 + \frac{1}{6}\chi\delta^2 + \alpha\right)y_{zz} + \\ + \rho y^2 y_{zz} + \left(\frac{1}{36}\alpha\delta^2 + \frac{5}{1296}\chi\delta^4 + \omega + \frac{61}{46656}\delta^6\right)y + \\ + \left(\mu + \frac{1}{36}\delta^2\rho\right)y^3 + \nu y^5 + \kappa y^7 = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Это уравнение так же, как и система (3)–(4), не проходит тест Пенлеве. Поэтому оно не имеет общего решения с шестью произвольными постоянными, но может существовать решение с меньшим числом произвольных постоянных, так как при выполнении теста Пенлеве были получены два целых индекса Фукса. Следующий раздел по-

священ поиску точных решений уравнения (14) с произвольными постоянными.

3. ПОИСК ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ (14)

В разделе 2 установлено, что уравнение (14) не проходит тест Пенлеве, следовательно для него не существует общего решения. Поэтому будем искать решения с числом произвольных констант меньшим, чем порядок уравнения. Для построения точных решений применим метод простейших уравнений [33, 34]. Суть этого метода заключается в поиске решения исходного уравнения через известное решение другого уравнения.

В качестве простейшего используем уравнение для эллиптической функции Якоби

$$Y_z^2(z) - aY^4(z) - cY^2(z) - d = 0. \tag{15}$$

В общем случае решение уравнения (15) выражается через одну из эллиптических функций Якоби или эллиптическую функцию Вейерштрасса. Покажем, как получить решение уравнения (15), используя эллиптическую функцию Якоби.

Рассмотрим алгебраическое уравнение: $aY^4 + cY^2 + d = 0$. И пусть x_1, x_2, x_3, x_4 его корни. Так как это уравнение инвариантно относительно замены $Y = -Y$, получаем, что $x_3 = -x_1, x_4 = -x_2$. Принимая это во внимание перепишем уравнение (15) следующим образом

$$\begin{aligned} Y_z^2 &= aY^4 + cY^2 + d = a(Y - x_1)(Y + x_1) \times \\ &\quad \times (Y - x_2)(Y + x_2) = \\ &= a(Y^2 - x_1^2)(Y^2 - x_2^2) = ax_1^2x_2^2 \times \\ &\quad \times \left(1 - \left(\frac{Y}{x_1}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{Y}{x_2}\right)^2\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Из (16) видим, что решение уравнения (15) можно выразить через эллиптический синус

$$\begin{aligned} Y(z) &= \pm x_1 \operatorname{sn} \left(\sqrt{ax_2}(z - z_0), \frac{x_1}{x_2} \right), \\ x_2 &= \sqrt{\frac{\sqrt{c^2 - 4ad} - c}{2a}}, \quad x_1 = \sqrt{\frac{-\sqrt{c^2 - 4ad} - c}{2a}}. \end{aligned} \tag{17}$$

Применим метод простейших уравнений для поиска решений уравнения (14). В разделе 2 было получено, что решение уравнения (14) имеет полюс первого порядка. Решение уравнения (15) так же имеет полюс первого порядка. Поэтому ищем решение уравнения (14) в виде

$$y(z) = AY(z), \tag{18}$$

где $Y(z)$ — это решение уравнения (15), A — неизвестная постоянная.

Дифференцируя выражение (15) по z , получаем уравнения

$$\begin{aligned} Y_{zz} &= 2aY^3 + cY, \\ Y_{zzz} &= 6aY^2Y_z + cY_z, \\ Y_{zzzz} &= 6aY^2Y_{zz} + 12aYY_z^2 + cY_{zz}, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} Y_{zzzzz} &= 6aY^2Y_{zzz} + 36aYY_zY_{zz} + 12aY_z^3 + cY_{zzz}, \\ Y_{zzzzzz} &= 6aY^2Y_{zzzz} + 48aYY_zY_{zzz} + \\ &\quad + 36aYY_z^2 + 72aY_z^2Y_{zz} + cY_{zzzz}. \end{aligned}$$

Используя (18) и (19), получаем выражения для производных функции $y(z)$. Выпишем только четные производные, так как только они встречаются в уравнении (14). Таким образом получаем

$$\begin{aligned} y_{zz} &= 2aAY^3 + cAY, \\ y_{zzzz} &= 24a^2AY^5 + 20acAY^3 + 12aAdY + c^2AY, \tag{20} \\ y_{zzzzz} &= 720Aa^3Y^7 + 840Aa^2cY^5 + \\ &\quad + 504Aa^2dY^3 + 182Aac^2Y^3 + 132AacdY + Ac^3Y. \end{aligned}$$

Подставляя (18), (20) в (14) получаем алгебраическое уравнение. Собирая коэффициенты при степенях $Y(z)$ и приравнявая их нулю, находим условия при которых (18) будет решением уравнения (14)

$$\begin{aligned} A^6 &= -720 \frac{a^3}{\kappa}, \quad c = -\frac{1}{840} \frac{A^4 v}{a^2} - \frac{1}{420} \frac{A^2 \rho}{a} - \frac{1}{84} \delta^2 - \frac{1}{35} \chi, \\ d &= -\frac{1}{18144} \frac{\rho \delta^2 A^2}{a^2} - \frac{25}{108864} \frac{\delta^4}{a} - \frac{1}{504} \frac{\rho A^2 c}{a^2} - \frac{25}{1512} \times \\ &\quad \times \frac{\delta^2 c}{a} - \frac{1}{1512} \frac{\delta^2 \chi}{a} - \frac{1}{504} \frac{\mu A^2}{a^2} - \frac{13c^2}{36a} - \frac{5}{126} \frac{\chi c}{a} - \frac{1}{252} \frac{\alpha}{a}, \\ \omega &= -\frac{61}{46656} \delta^6 - \frac{25}{432} \delta^4 c - \frac{5}{1296} \chi \delta^4 - 5\delta^2 da - \frac{5}{12} \delta^2 c^2 - \\ &\quad - \frac{1}{6} \chi \delta^2 c - 132dac - 12\chi da - \frac{1}{36} \alpha \delta^2 - c^3 - \chi c^2 - \alpha c. \end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом получаем решение уравнения (14) в виде

$$\begin{aligned} y(z) &= \pm A \frac{\sqrt{-a(\chi + 4c)}}{2a} \operatorname{sn} \left(\frac{\sqrt{\chi}}{2}(z - z_0), K \right), \tag{22} \\ \chi &= 2\sqrt{c^2 - 4ad} - 2c, \quad K = \frac{4\sqrt{ad}}{\chi}, \end{aligned}$$

где z_0 и a — произвольные постоянные, параметры A, c, d берем из (21). Принимая во внимание условия (13), (21), и используя $\psi_z(z) = \phi(z) = -\delta/6$ и $y(z)$ в виде (22), можно сконструировать решение исходного уравнения (1) в виде бегущей волны (2).

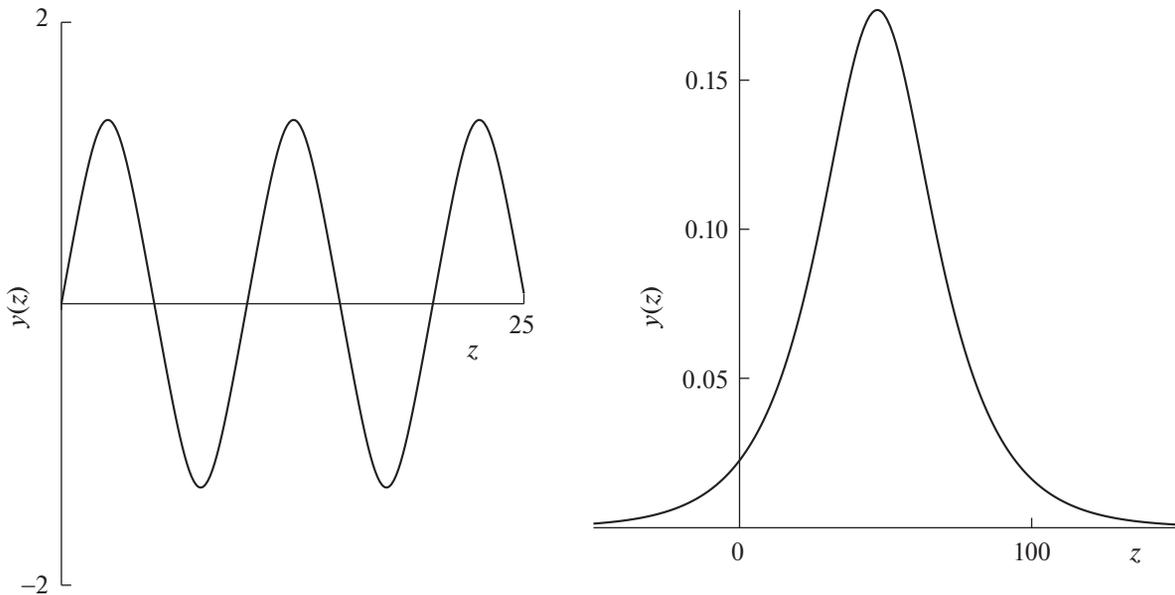


Рис. 1. Решение (22) при условиях (21) и параметрах $a = -1, \alpha = 1, v = 1, \mu = -3, \kappa = 1, \rho = 1, \chi = 1, \delta = 1, z_0 = 0$ (слева); Решение (24) при условиях (23) и параметрах $a = -1, \alpha = 1, v = 1, \mu = 300, \kappa = 1, \chi = 1000000, \delta = -1, z_0 = 10$ (справа).

Решение (22) при условиях (21) и параметрах: $a = -1, \alpha = 1, v = 1, \mu = -3, \kappa = 1, \chi = 1, \rho = 1, \delta = 1, z_0 = 0$ показано на рис. 1.

Рассмотрим частный случай, когда $y(z)$ принимает вид уединенной волны. В (15) выберем параметр d равным нулю, тогда решение уравнения (15) будет иметь вид уединенной волны. Далее подставляем (18) и (20) в (14), учитывая при этом условие $d = 0$. Таким образом, получаем алгебраическое уравнение, приравнивая в нем нулю коэффициенты при различных степенях $Y(z)$, получаем следующие условия на параметры

$$\begin{aligned}
 A^6 &= -720 \frac{a^3}{\kappa}, \quad c = -\frac{1}{840} \frac{A^4 v}{a^2} - \frac{1}{420} \frac{A^2 \rho}{a} - \frac{1}{84} \delta^2 - \frac{1}{35} \chi, \\
 \omega &= -\frac{61}{46656} \delta^6 - \frac{25}{432} \delta^4 c - \frac{5}{1296} \chi \delta^4 - \frac{5}{12} \delta^2 c^2 - \\
 &\quad - \frac{1}{6} \chi \delta^2 c - \frac{1}{36} \alpha \delta^2 - c^3 - \chi c^2 - \alpha c, \\
 \rho &= -\frac{A^2 v}{17a} + \frac{40 a \delta^2}{17 A^2} - \frac{324 a \chi}{17 A^2} \pm \frac{5}{102 A^2 a} \times \\
 &\quad \times (81 A^8 v^2 - 1584 A^4 a^2 \delta^2 v - 2592 A^4 a^2 \chi v + \\
 &\quad + 15360 a^4 \delta^4 - 43200 a^4 \chi \delta^2 + 308448 A^2 a^3 \mu + \\
 &\quad + 20736 a^4 \chi^2 + 616896 a^4 \alpha)^{1/2}.
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

При условиях (23) решение уравнения (14) принимает вид

$$y(z) = \pm A \frac{4c e^{\sqrt{c}(z-z_0)}}{e^{2\sqrt{c}(z-z_0)} - 4ac}, \tag{24}$$

где z_0, a – произвольные постоянные, A, c – удовлетворяют условиям (23).

Решение (24) при условиях (23) и параметрах: $a = -1, \alpha = 1, v = 1, \mu = 300, \kappa = 1, \chi = 1000000, \delta = 1, z_0 = 10$, показано на рис. 1.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучено дифференциальное уравнение в частных производных (УЧП) шестого порядка с нелокальными и степенными нелинейностями, которое используется для описания распространения оптических импульсов. Из исходного УЧП, используя переменные бегущей волны, получена система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Для построенной системы ОДУ выполнен тест Пенлеве. Показано, что система ОДУ не проходит тест Пенлеве, так как на втором шаге теста Пенлеве получаются комплексные индексы Фукса. В результате выполнения третьего шага теста Пенлеве, найдены условия на параметры исходного уравнения, при которых система ОДУ становится совместной. При этих условиях от системы остается только одно уравнение шестого порядка. Применяя метод простейших уравнений для полученного ОДУ (14), построены точные решения. Эти решения имеют вид уединенных и периодических волн и выражаются соответственно через экспоненциальную функцию и эллиптическую функцию Якоби. Построенные точные решения имеют две произвольные постоянные. Полученные решения иллюстрируются при некоторых заданных значениях параметров.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10039) и Министерства науки и высшего образования РФ (проект государственного задания № 0723-2020-0036).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biswas A.* 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan–Kundu–Laksmanan equation // *Physics Letters A.* 2009. V. 373. P. 2546–2548.
2. *Zhang J., Li S., Geng H.* Bifurcations of exact travelling wave solutions for the generalized R–K–L equation // *Journal of Applied Analysis and Computation.* 2016. V. 6. Is. 4. P. 1205–1210.
3. *Kudryashov N.A., Safonova D.V., Biswas A.* Painlevé analysis and solution to the traveling wave reduction of Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2019. V. 24. № 6. P. 607–614.
4. *Kundu A., Mukherjee A., Naskar T.* Modeling rogue waves through exact dynamical lumps soliton controlled by ocean currents // *Proc. R. Soc. A.* 2014. V. 470. 20130576.
5. *Ekici M., Sonmezoglu A., Biswas A., Belie M.R.* Optical solitons in (2+1)-dimension with Kundu–Mukherjee–Naskar equation by extended trial function scheme // *Chinese Journal of Physics.* 2019. V. 57. P. 72–77.
6. *Kudryashov N.A.* General solution of traveling wave reduction for the Kundu–Mukherjee–Naskar equation // *Optik.* 2019. V. 186. P. 22–27.
7. *Biswas A.* Chirp-free bright optical soliton perturbation with Chen–Lee–Liu equation by traveling wave hypothesis and semi-inverse variational principle // *Optik.* 2018. V. 172. P. 772–776.
8. *Kudryashov N.A.* General solution of the traveling wave reduction for the perturbed Chen–Lee–Liu equation // *Optik.* 2019. V. 186. P. 339–349.
9. *Bansal A., Biswas A., Zhou Q., Arshed S., Alzahrani A.K., Belie M.R.* Optical solitons with Chen–Lee–Liu equation by Lie symmetry // *Optik.* 2020. V. 384. 126202.
10. *Triki H., Biswas A.* Sub pico-second chirped envelope solitons and conservation laws in monomode optical fibers for a new derivative nonlinear Schrödinger's model // *Optics.* 2018. V. 173. P. 235–241.
11. *Zhou Q., Ekici M., Sonmezoglu A.* Exact chirped singular soliton solutions of Triki–Biswas equation // *Optik.* 2019. V. 181. P. 338–342.
12. *Kudryashov N.A.* First integral and general solution of traveling wave reduction for the Triki–Biswas equation // *Optik.* 2019. V. 185. P. 275–281.
13. *Gerdjikov V.S., Ivanov M.I.* Expansions over the 'squared' solutions and the inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation // *Inverse Problems.* 1992. V. 8. P. 831–847.
14. *Das A., Biswas A., Ekici M., Zhou Q., Alshomrant A., Belic M.R.* Optical solitons with complex Ginzburg–Landau equation for two nonlinear forms using F-expansion // *Chinese Journal of Physics.* 2019. V. 61. P. 255–261.
15. *Kudryashov N.A.* Traveling wave solutions of the generalized Gerdjikov–Ivanov equation // *Optics.* 2020. V. 219. 165193.
16. *Kudryashov N.A.* Periodic and solitary waves of the Biswas–Arshed equation // *Optik.* 2020. V. 200. 163442.
17. *Aouadi S., Bouzida A., Daoui A.K., Triki H., Zhou Q., Liu S.* W-shaped, bright and dark solitons of Biswas–Arshed equation // *Optik.* 2019. V. 182. P. 227–232.
18. *Ekici M., Sonmezoglu A.* Optical solitons with Biswas–Arshed equation by extended trial function method // *Optik.* 2019. V. 177. P. 13–20.
19. *Lenells J., Fokas A.S.* An integrable generalization of the nonlinear Schrödinger equation on the half-line and solitons // *Inverse Problems.* 2009. V. 25. Is. 11. 115006.
20. *Kudryashov N.A.* A re-visitation of the results on Fokas–Lenells equation by Mahak and Akram // *Optik.* 2020. V. 209. 164522.
21. *Al-Ghafri K.S., Krishnan E.V., Biswas A.* Chirped optical soliton perturbation of Fokas–Lenells equation with full nonlinearity // *Advances in Difference Equations.* 2020. V. 2020. Is. 1. P. 191.
22. *Kudryashov N.A.* On traveling wave solutions of the Kundu–Eckhaus equation // *Optik.* 2020. V. 224. 165500.
23. *Kundu A., Mukherjee A.* Novel integrable higher-dimensional nonlinear Schrödinger equation: properties, solutions, applications, 2013.
24. *Kudryashov N.A.* Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with cubic-quintic nonlinearity // *Optik.* 2019. V. 188. P. 27–35.
25. *Kudryashov N.A.* Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with anti-cubic nonlinearity // *Optik.* 2019. V. 185. P. 665–671.
26. *Kudryashov N.A., Safonova D.V.* Nonautonomous first integrals and general solutions of the KdV–Burgers and mKdV–Burgers equations with the source // *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* 2019. V. 42. № 13. P. 4627–4636.
27. *Кудряшов Н.А., Сафонова Д.В.* Точные решения уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргера с источником // *Вестник НИЯУ МИФИ,* 2019. Т. 8. № 2. С. 124–131.
28. *Ablowitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons nonlinear evolution equations and inverse scattering. Cambridge University Press, 1991.
29. *Ablowitz M.J., Segur H.* Exact linearization of a painleve transcendent // *Phys. Rev. Lett.* 1977. V. 38. 1103–6.
30. *Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H.* A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of p -type. I // *J. Math. Phys.* 1980. V. 21. P. 715–721.
31. *Кудряшов Н.А., Сафонова Д.В.* Точные решения нелинейного дифференциального уравнения для описания оптических импульсов с нелинейностью третьей и пятой степени // *Вестник НИЯУ МИФИ.* 2020. Т. 9. № 1. С. 25–31.
32. *Kudryashov N.A.* Construction of nonlinear equations for description of propagation pulses in optical fiber // *Optik.* 2019. V. 192. 162964.
33. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // *Chaos Soliton Fractals.* 2005. V. 24. P. 1217–1231.
34. *Kudryashov N.A.* Exact solitary waves of the Fisher equations // *Physics Letters A.* 2005. V. 342. P. 99–106.

Exact Solution of Sixth Order Nonlinear Differential Equations for Description of Optical Pulses

D. V. Safonova^{a,#} and N. A. Kudryashov^{a,##}

^a National Research Nuclear University MEPHI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: safonovadashav@gmail.com

^{##}e-mail: nakudryashov@mephi.ru

Received December 4, 2020; revised December 4, 2020; accepted December 22, 2020

Abstract—A sixth order partial differential equation with nonlocal and power nonlinearities has been discussed. The equation is used to describe optical pulses. Since the Cauchy problem for this partial differential equation cannot be solved by the method of the inverse scattering transform, the traveling wave reduction of this equation has been considered. The use of the traveling wave variables separates the imaginary and real parts of the equation; as a result, a system of ordinary differential equations (ODEs) has been obtained. The Painlevé test is used to check the integrability of this system. The system of ODEs does not pass the Painlevé test, since complex Fuchs indices exist. Conditions for some parameters of the equation, under which the system of ODEs becomes consistent, have been obtained. Taking into account these conditions, one ODE of the sixth order has been evaluated. The method of the simplest equations has been used to construct solutions. The constructed solutions have been expressed in terms of the exponential function and the Jacobi elliptic function and have the form of solitary and periodic waves. The found wave solutions of the equation have been illustrated for some values of the parameters.

Keywords: nonlinear differential equation, exact solution, Painlevé test, optical pulses

DOI: 10.1134/S2304487X20060085

REFERENCES

1. Biswas A. 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan–Kundu–Laksmanan equation. *Physics Letters A*, 2009, vol. 373, pp. 2546–2548.
2. Zhang J., Li S., Geng H. Bifurcations of exact travelling wave solutions for the generalized R–K–L equation. *Journal of Applied Analysis and Computation*, 2016. V. 6, Is. 4, P. 1205–1210.
3. Kudryashov N.A., Safonova D.V., Biswas A. Painlevé analysis and solution to the traveling wave reduction of Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, vol. 24, no. 6, pp. 607–614.
4. Kundu A., Mukherjee A., Naskar T. Modeling rogue waves through exact dynamical lamps soliton controlled by ocean currents, *Proc. R. Soc. A*, 2014. 470, 20130576.
5. Ekici M., Sonmezoglu A., Biswas A., Belic M.R. Optical solitons in (2+1)-dimension with Kundu–Mukherjee–Naskar equation by extended trial function scheme. *Chinese Journal of Physics*, 2019. V. 57. P. 72–77.
6. Kudryashov N.A. General solution of traveling wave reduction for the Kundu–Mukherjee–Naskar equation. *Optik*, 2019, vol. 186, pp. 22–27.
7. Biswas A. Chirp-free bright optical soliton perturbation with Chen–Lee–Liu equation by traveling wave hypothesis and semi-inverse variational principle. *Optik*, 2018, vol. 172, pp. 772–776.
8. Kudryashov N.A. General solution of the traveling wave reduction for the perturbed Chen–Lee–Liu equation. *Optik*, 2019, vol. 186, pp. 339–349.
9. Bansal A., Biswas A., Zhou Q., Arshed S., Alzahrani A.K., Belic M.R. Optical solitons with Chen–Lee–Liu equation by Lie symmetry. *Optik*, 2020, vol. 384, 126202.
10. Triki H., Biswas A. Sub pico-second chirped envelope solitons and conservation laws in monomode optical fibers for a new derivative nonlinear Schrödinger's model. *Optik*, 2018. V. 173. P. 235–241.
11. Zhou Q., Ekici M., Sonmezoglu A. Exact chirped singular soliton solutions of Triki–Biswas equation, *Optik*, 2019. V. 181. P. 338–342.
12. Kudryashov N.A. First integral and general solution of traveling wave reduction for the Triki–Biswas equation. *Optik*, 2019, vol. 185, pp. 275–281.
13. Gerdjikov V.S., Ivanov M.I. Expansions over the 'squared' solutions and the inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation. *Inverse Problems*, 1992. V. 8. P. 831–847.
14. Das A., Biswas A., Ekici M., Zhou Q., Alshomrant A., Belic M.R. Optical solitons with complex Ginzburg–Landau equation for two nonlinear forms using F-ex-

- pansion, *Chinese Journal of Physics*, 2019. V. 61. P. 255–261.
15. Kudryashov N.A. Traveling wave solutions of the generalized Gerdjikov–Ivanov equation. *Optik*, 2020. V. 219, 165193.
 16. Kudryashov N.A. Periodic and solitary waves of the Biswas–Arshed equation. *Optik*, 2020. V. 200, 163442.
 17. Aouadi S., Bouzida A., Daoui A.K., Triki H., Zhou Q., Liu S. W-shaped, bright and dark solitons of Biswas–Arshed equation. *Optik*, 2019. V. 182. P. 227–232.
 18. Ekici M., Sonmezoglu A. Optical solitons with Biswas–Arshed equation by extended trial function method. *Optik*, 2019. V. 177. P. 13–20.
 19. Lenells J., Fokas A.S., An integrable generalization of the nonlinear Schrödinger equation on the half-line and solitons, *Inverse Problems*, 2009. V. 25, Is. 11, 115006.
 20. Kudryashov N.A. A re-visitation of the results on Fokas–Lenells equation by Mahak and Akram. *Optik*, 2020. V. 209, 164522.
 21. Al-Ghafri K.S., Krishnan E.V., Biswas A. Chirped optical soliton perturbation of Fokas–Lenells equation with full nonlinearity. *Advances in Difference Equations*, 2020. V. 2020, Is. 1, p. 191.
 22. Kudryashov N.A. On traveling wave solutions of the Kundu–Eckhaus equation. *Optik*, 2020. V. 224, 165500.
 23. Kundu, A., Mukherjee, A. *Novel integrable higher-dimensional nonlinear Schrödinger equation: properties, solutions, applications*, 2013.
 24. Kudryashov N.A. Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with cubic–quintic nonlinearity. *Optik*, 2019, vol. 188, pp. 27–35.
 25. Kudryashov N.A. Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with anti-cubic nonlinearity. *Optik*, 2019, vol. 185, pp. 665–671.
 26. Kudryashov N.A., Safonova D.V. Nonautonomous first integrals and general solutions of the KdV–Burgers and mKdV–Burgers equations with the source. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2019, vol. 42, no. 13, pp. 4627–4636.
 27. Kudryashov N.A., Safonova D.V. Tochniye resheniya uravneniya Kortewega–de Vriisa–Burgersa s istochnikom. [Exact Solutions of the Korteweg–de Vries–Burgers Equation with a Source]. *Vestnik Natsional'no-go issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI"*, 2019, vol. 8, no. 2, pp. 124–131. (in Russian)
 28. Ablowitz M.J., Clarkson P.A. Solitons nonlinear evolution equations and inverse scattering. *Cambridge university press*, 1991.
 29. Ablowitz M.J., Segur H. Exact linearization of a painleve transcendent. *Phys. Rev. Lett.*, 1977, vol. 38, pp. 1103–6.
 30. Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of p-type. I, *J. Math. Phys.*, 1980, vol. 21, pp. 715–721.
 31. Kudryashov N.A., Safonova D.V. Tochniye resheniya nelineynogo differentsialnogo uravneniya dlya opisaniya opticheskikh impulsov s nelineynostyu tret'ey i pyatoy stepeni. [Exact Solutions of a Nonlinear Differential Equation with Third and Fifth Degree Nonlinearities for Description of Optical Pulses]. *Vestnik Natsional'no-go issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI"*, 2020, vol. 9, no. 1, pp. 25–31. (in Russian)
 32. Kudryashov N.A. Construction of nonlinear equations for description of propagation pulses in optical fiber. *Optik*, 2019, vol. 192, 162964.
 33. Kudryashov N.A. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. *Chaos Soliton Fractals*, 2005, vol. 24, pp. 1217–1231.
 34. Kudryashov N.A. Exact solitary waves of the Fisher equations. *Physics Letters A*, 2005, vol. 342, pp. 99–106.