

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ЛЯПУНОВСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ РАЗНОСТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КУРАМОТО–СИВАШИНСКОГО

© 2020 г. С. Ф. Лаврова^{1,*}, Н. А. Кудряшов^{1,**}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409 Россия

*e-mail: infuriatedot@gmail.com

**e-mail: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию 10.12.2020 г.

После доработки 10.12.2020 г.

Принята к публикации 22.12.2020 г.

Обобщенное уравнение Курамото–Сивашинского используется для описания ряда нелинейных физических процессов. Целью данной работы является исследование влияния дисперсионного члена обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского на характер динамики системы при трех различных степенях нелинейности. Качественно определить режим динамики системы можно при помощи расчета старшего показателя Ляпунова. Если старший Ляпуновский показатель положителен, то близлежащие траектории экспоненциально расходятся и режим динамики является хаотическим. Для нахождения старшего показателя Ляпунова необходимо требуется количество раз возмущать траекторию динамической системы и находить расстояние между возмущенной и невозмущенной траекториями. Чтобы сделать это для уравнения в частных производных необходимо свести его к конечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В данной работе для уравнения Курамото–Сивашинского этот переход осуществлен при помощи аппроксимации пространственных производных на дискретной сетке. Граничные условия выбраны периодические. Для полученной системы ОДУ проведен расчет старшего Ляпуновского показателя как функции дисперсионного параметра при трех степенях нелинейности уравнения. Обнаружено, что увеличение бифуркационного параметра приводит к уменьшению старшего показателя Ляпунова, а следовательно и к подавлению хаотического движения. При помощи метода линий построены зависимости решения обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского от пространственной и временной переменных для нескольких значений дисперсионного параметра. Полученные графики иллюстрируют переход от хаотического режима к регулярному при увеличении бифуркационного параметра.

Ключевые слова: показатель Ляпунова, уравнения в частных производных, обобщенное уравнение Курамото–Сивашинского

DOI: 10.1134/S2304487X20060073

1. ВВЕДЕНИЕ

Обобщенное уравнение Курамото–Сивашинского имеет вид

$$u_t + u^m u_x + u_{xx} + \beta u_{xxx} + u_{xxxx} = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1.1) при $m = 1$ и $\beta = 0$ было независимо получено Курамото [1] для описания турбулентности в реакции Белоусова–Жаботинского и Сивашинским для моделирования термальных диффузионных неустойчивостей ламинарного фронта горения [2–4]. Также это уравнение возникает при описании ряда нелинейных физических процессов, таких как стекание жидкости с наклонных поверхностей [5] и вертикальных колонн [6].

При $m = 1$ уравнение (1.1) изучалось многими авторами с использованием как аналитических,

так и численных подходов. В работах [7–9] приведены некоторые аналитические решения (1.1). В работе [10] численно изучается сценарий перехода к хаосу в изучаемом уравнении при $\beta = 0$. В [11] аналитически исследуется нелинейная устойчивость решений задачи Коши уравнения (1.1). Работа [12, 13] содержит построение бифуркационных диаграмм и расчет старших показателей Ляпунова для обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского в переменных бегущей волны.

При $m \neq 1$ уравнение (1.1) также применяется для моделирования нелинейных физических процессов. В работе [14] оно было выведено для описания нелинейных длинных волн в вязко-эластичной трубе.

Данная работа посвящена исследованию влияния дисперсионного члена βu_{xxx} на динамические

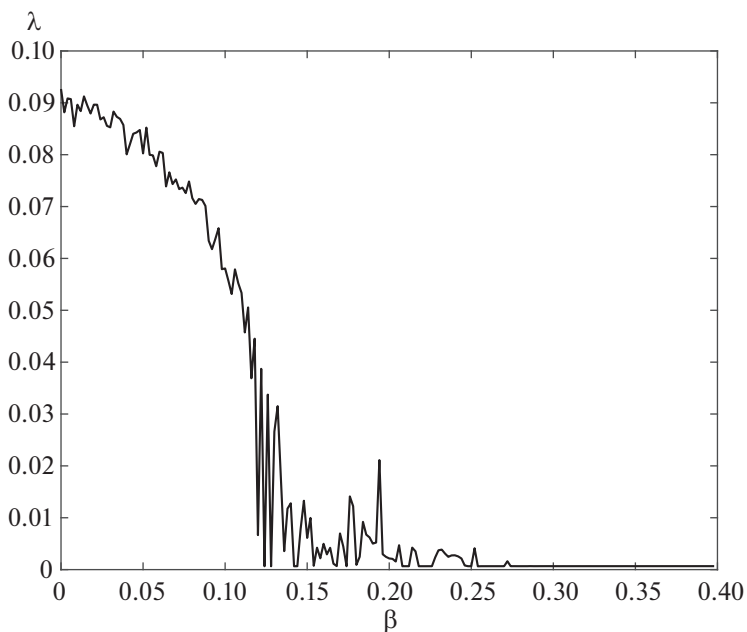
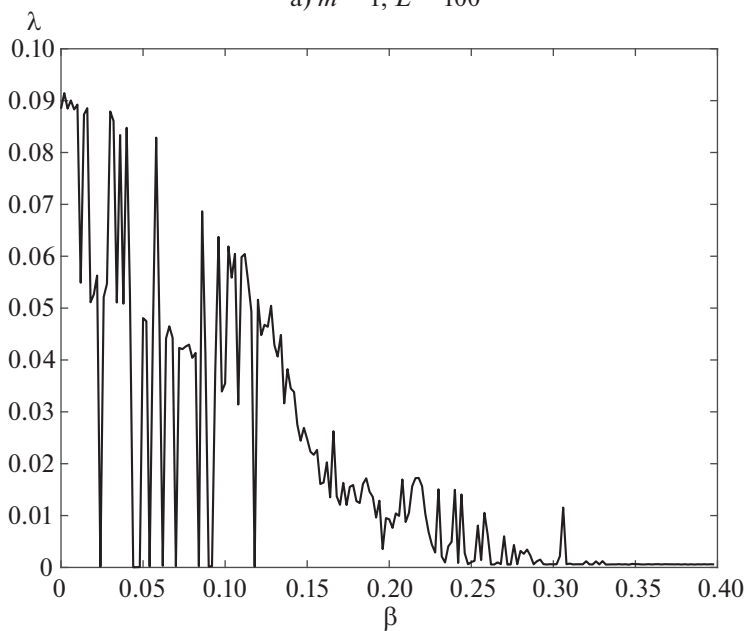
а) $m = 1, L = 100$ б) $m = 2, L = 100$

Рис. 1. Зависимость старшего ляпуновского показателя уравнения (1.1) от бифуркационного параметра β при различных степенях нелинейности m и размерах области L .

режимы уравнения (1.1). Изучаемое уравнение сведено к конечномерной динамической системе путем аппроксимации пространственных производных на пятиточечном шаблоне. Рассчитан старший Ляпуновский показатель полученной системы как функция дисперсионного параметра β . Построены графики решения задачи для уравнения (1.1), иллюстрирующие переход от хаотиче-

ской динамики к периодической при увеличении параметра β .

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Качественно определить характер движения динамической системы позволяет расчет старшего показателя Ляпунова (СПЛ). Если СПЛ положи-

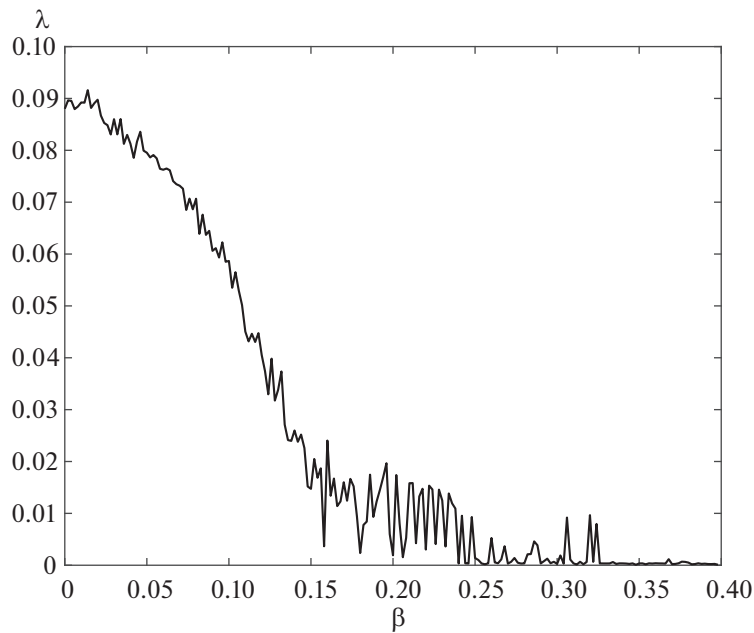
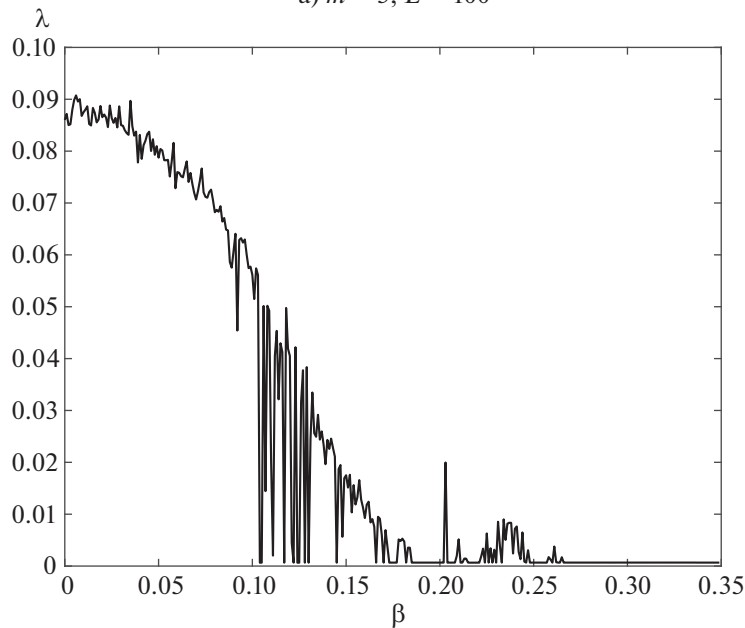
a) $m = 3, L = 100$ b) $m = 1, L = 85$

Рис. 2. Зависимость старшего ляпуновского показателя уравнения (1.1) от бифуркационного параметра β при различных степенях нелинейности m и размерах области L .

телен, то малые возмущения траектории решения системы со временем экспоненциально возрастают и режим динамики является хаотическим.

Расчет старшего показателя Ляпунова производится путем многократного возмущения траектории решения системы и вычисления на каждом шаге расстояния между возмущенной и невозмущенной траекториями решения системы. Чтобы

найти СПЛ уравнения в частных производных необходимо сначала для фиксированного t превратить кривую $u(x, t)$ в вектор размерности L при помощи аппроксимации пространственных производных уравнения на дискретной сетке.

Сформулируем задачу динамики системы, описываемой обобщенным уравнением Курамо-

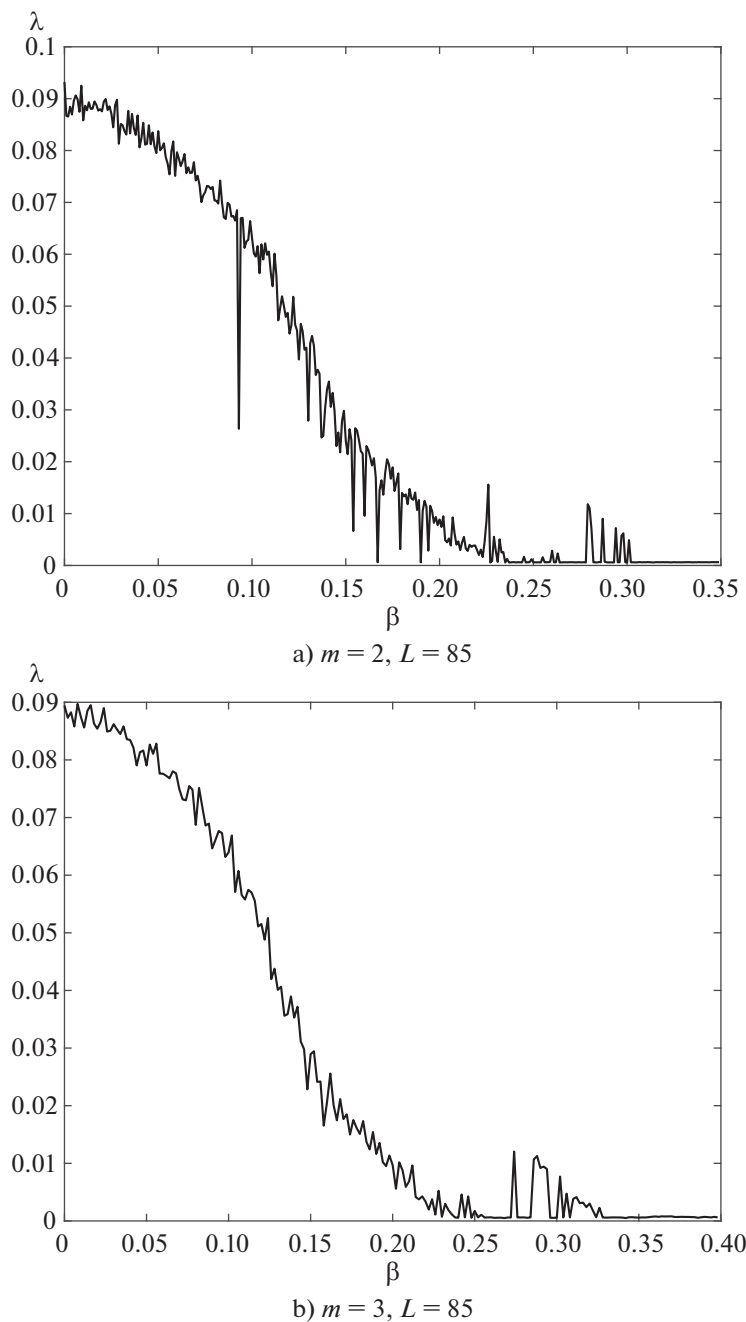


Рис. 3. Зависимость старшего ляпуновского показателя уравнения (1.1) от бифуркационного параметра β при различных степенях нелинейности m и размерах области L .

то—Сивашинского (1.1) на прямой $[0, L]$. Используем начальное условие в виде

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (2.1)$$

и периодические граничные условия

$$u(x, t) = u(x + L, t). \quad (2.2)$$

Периодические граничные условия позволяют представить уравнение в частных производных как бесконечномерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений на кольце. Численные методы позволяют сделать размерность системы конечной. В связи с этим сведем уравнение (1.1) к системе обыкновенных дифференци-

альных уравнений путем представления пространственных производных их разностными аппроксимациями на пятиточечном шаблоне дискретной сетки из N узлов [15]:

$$\begin{aligned} u_x &= (u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2})/12h, \\ u_{xx} &= (-u_{i-2} + 16u_{i-1} - 30u_i + 16u_{i+1} - u_{i+2})/12h^2, \\ u_{xxx} &= (-u_{i-2} + 2u_{i-1} - 2u_{i+1} + u_{i+2})/2h^3, \\ u_{xxxx} &= (u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2})/h^4, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $h = L/N$.

Подстановка (2.3) в (1.1) превратит его в систему из N связанных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= -\frac{u_1}{12h}(u_{N-2} - 8u_{N-1} + 8u_2 - u_3) - \\ &- \frac{1}{12h^2}(-u_{N-2} + 16u_{N-1} - 30u_1 + 16u_2 - u_3) - \\ &- \frac{\beta}{2h^3}(-u_{N-2} + 2u_{N-1} - 2u_2 + u_3) - \\ &- \frac{1}{h^4}(u_{N-2} - 4u_{N-1} + 6u_1 - 4u_2 + u_3), \\ \frac{du_2}{dt} &= -\frac{u_2}{12h}(u_{N-1} - 8u_1 + 8u_3 - u_4) - \\ &- \frac{1}{12h^2}(-u_{N-1} + 16u_1 - 30u_2 + 16u_3 - u_4) - \\ &- \frac{\beta}{2h^3}(-u_{N-1} + 2u_1 - 2u_3 + u_4) - \\ &- \frac{1}{h^4}(u_{N-1} - 4u_1 + 6u_2 - 4u_3 + u_4), \\ \frac{du_i}{dt} &= -\frac{u_i}{12h}(u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2}) - \\ &- \frac{1}{12h^2}(-u_{i-2} + 16u_{i-1} - 30u_i + 16u_{i+1} - u_{i+2}) - \\ &- \frac{\beta}{2h^3}(-u_{i-2} + 2u_{i-1} - 2u_{i+1} + u_{i+2}) - \\ &- \frac{1}{h^4}(u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}), \quad i = \overline{3, N-3}, \\ \frac{du_{N-2}}{dt} &= -\frac{u_{N-2}}{12h}(u_{N-4} - 8u_{N-3} + 8u_{N-1} - u_1) - \\ &- \frac{1}{12h^2}(-u_{N-4} + 16u_{N-3} - 30u_{N-2} + 16u_{N-1} - u_1) - \\ &- \frac{\beta}{2h^3}(-u_{i-2} + 2u_{i-1} - 2u_{i+1} + u_{i+2}) - \\ &- \frac{1}{h^4}(u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{du_{N-1}}{dt} &= -\frac{u_{N-1}}{12h}(u_{N-3} - 8u_{N-2} + 8u_1 - u_2) - \\ &- \frac{1}{12h^2}(-u_{N-3} + 16u_{N-2} - 30u_{N-1} + 16u_1 - u_2) - \\ &- \frac{\beta}{2h^3}(-u_{N-3} + 2u_{N-2} - 2u_1 + u_2) - \\ &- \frac{1}{h^4}(u_{N-3} - 4u_{N-2} + 6u_{N-1} - 4u_1 + u_2), \\ \frac{du_N}{dt} &= -\frac{u_N}{12h}(u_{N-2} - 8u_{N-1} + 8u_2 - u_3) - \\ &- \frac{1}{12h^2}(-u_{N-2} + 16u_{N-1} - 30u_1 + 16u_2 - u_3) - \\ &- \frac{\beta}{2h^3}(-u_{N-2} + 2u_{N-1} - 2u_2 + u_3) - \\ &- \frac{1}{h^4}(u_{N-2} - 4u_{N-1} + 6u_1 - 4u_2 + u_3), \end{aligned} \quad (2.4)$$

в которой периодические граничные условия (2.2) учтены как $u_N = u_1$, $u_0 = u_{N-1}$, $u_{N+1} = u_2$, $u_{N+2} = u_3$.

3. РАСЧЕТ СТАРШИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА

Для конечномерной системы уравнений обыкновенных дифференциальных уравнений (2.4) с заданными начальными и граничным условиями проведем расчет СПЛ по алгоритму Бенеттина [16]. Количество узлов аппроксимации N выберем равное $2L$. Время пересчета в алгоритме $T = 2$. Количество временных шагов, используемое при проведении расчетов $M = 5000$.

Старшие ляпуновские показатели системы (2.4) как функции от параметра β в случае размеров области $L = 85$ и $L = 100$ представлены на рис. 1–3. Из приведенных графиков видно, что при уменьшении значения параметра β характер динамики системы постепенно становится менее хаотическим, то есть уменьшается расходимость близлежащих траекторий, так как старший ляпуновский показатель убывает. Зависимость решения u от временной и пространственной переменных приведена на рис. 4, 5. На рис. а) показан хаотический режим классического уравнения Курамото–Сивашинского, на рис. б) – переход от хаоса к структуре бегущей волны, на рис. с) иллюстрируется структура бегущей волны. Решение уравнения в частных производных проводилось в среде MATLAB методом линий [17].

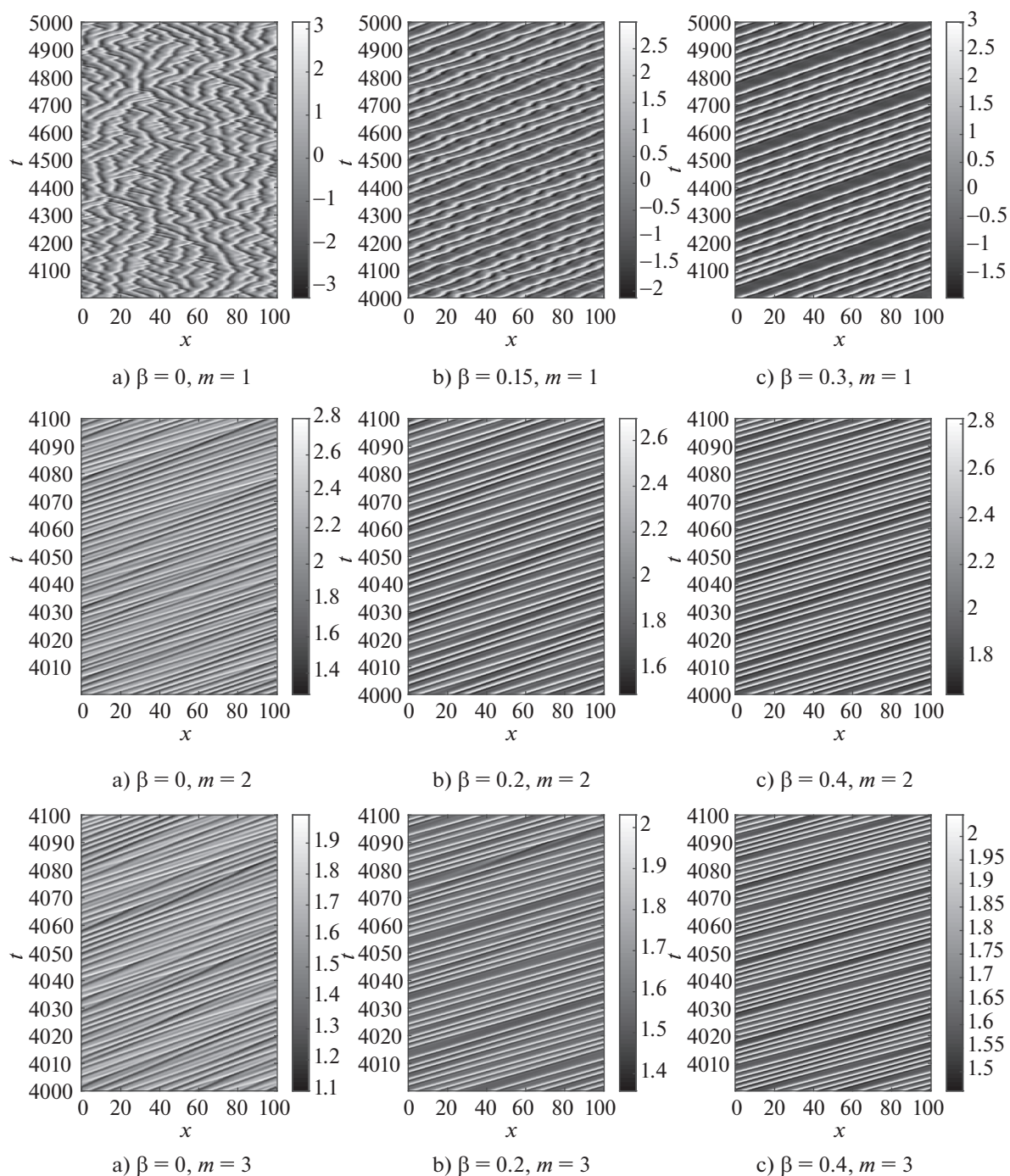


Рис. 4. Зависимость решения уравнения (1.1) от переменных x и t при различных значениях параметров m и β при $L = 100$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнено исследование динамических режимов обобщенного уравнения Курамoto–Сивашинского. Проведен расчет старшего Ляпуновского показателя аппроксимации исследуемого уравнения на пятиточечном шаблоне как функ-

ции дисперсионного параметра. Установлено, что при выбранных граничных и начальных условиях старший показатель Ляпунова является убывающей функцией бифуркационного параметра. Полученный результат говорит о том, что с ростом β динамика системы переходит от хаотической

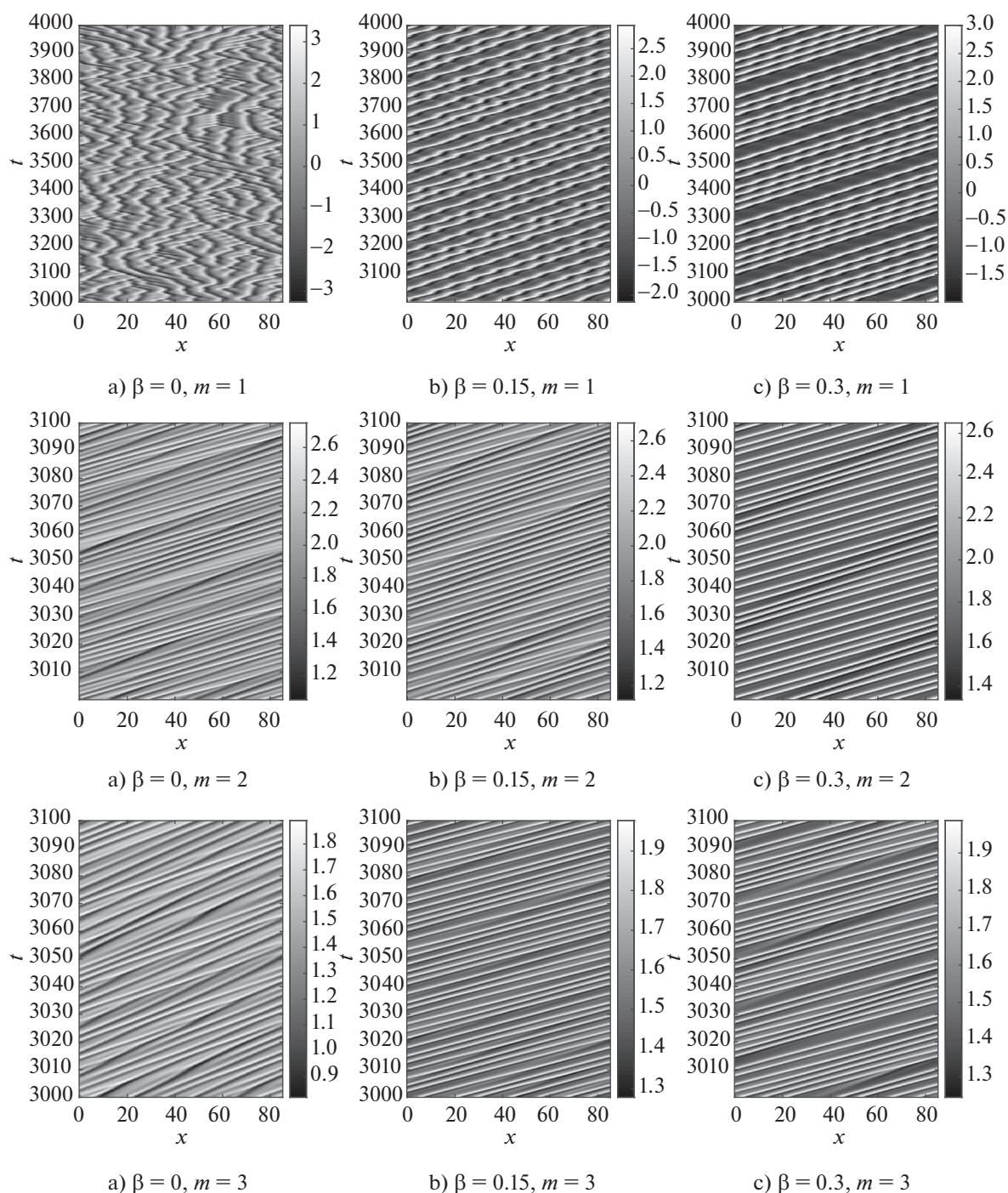


Рис. 5. Зависимость решения уравнения (1.1) от переменных x и t при различных значениях параметров m и β при $L = 85$.

к регулярной. Построены графики зависимости решения рассматриваемого УЧП от временной и пространственной переменных, иллюстрирующие изменение динамики обобщенного уравнения Курамoto—Сивашинского с тремя различными степенями нелинейности.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект государственного задания № 0723-2020-0036) и Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) (проект 18-29-10025).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kuramoto Yoshiki, Toshio Tsuzuki. Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium // Progress of Theoretical Physics. 1976. V. 55. № 2. P. 356–369.
2. Sivashinsky G.I. Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames. I. Derivation of basic equations // Acta Astronautica. 1977. V. 4. № 11. P. 1177–1206.
3. Michelson D.M., Sivashinsky G.I. Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames. II. Numerical experiments // Acta astronautica. 1977. V. 4. № 11–12. P. 1207–1221.
4. Sivashinsky G.I. On flame propagation under conditions of stoichiometry // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1980. V. 39. № 1. P. 67–82.
5. Tsvetodub O.Yu. Stationary travelling waves on a film flowing down an inclined plane // Fluid Dynamics. 1980. V. 15. № 4. P. 591–594.
6. Shlang T., Sivashinsky G.I. Irregular flow of a liquid film down a vertical column. 1982.
7. Kudryashov N.A. Exact solutions of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation // Physics Letters A. 1990. V. 147. № 5–6. P. 287–291.
8. Michelson D. Steady solutions of the Kuramoto–Sivashinsky equation // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1986. V. 19. № 1. P. 89–111.
9. Kudryashov N.A. Exact solutions and integrability of the Duffing–Van der Pol equation // Regular and Chaotic Dynamics. 2018. V. 23. № 4. P. 471–479.
10. Hyman J.M., Nicolaenko B. The Kuramoto–Sivashinsky equation: a bridge between PDE’s and dynamical systems // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1986. V. 18. № 1–3. P. 113–126.
11. Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R. Some global dynamical properties of the Kuramoto–Sivashinsky equations: nonlinear stability and attractors // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1985. V. 16. № 2. P. 155–183.
12. Кудряшов Н.А., Лаврова С.Ф. Нелинейные динамические процессы, описываемые обобщенным уравнением Курамото–Сивашинского в переменных бегущей волны // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2020. Т. 9. № 2. С. 284–289.
13. Kudryashov N.A., Lavrova S.F. Dynamical features of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation // Chaos, Solitons & Fractals. 2020. P. 110502.
14. Kudryashov N.A., Sinel’shchikov D.I., Chernyavsky I.L. Nonlinear evolution equations for description of perturbations in a viscoelastic tube // Nelineinaya Dinamika [Russian Journal of Nonlinear Dynamics]. 2008. V. 4. № 1. P. 69–86.
15. Abramowitz M., Stegun I.A. Herausgeber. Handbook of Mathematical Functions. 1970.
16. Benettin Giancarlo et al. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory // Meccanica. 1980. V. 15. № 1. P. 9–20.
17. Schiesser W.E. The numerical method of lines: integration of partial differential equations. Elsevier, 2012.

Vestnik Nacional’nogo Issledovatel’skogo Yadernogo Universiteta “MIFI”, 2020, vol. 9, no. 6, pp. 529–537

Lyapunov Exponents of the Finite-Difference Approximation of the Generalized Kuramoto–Sivashinsky Equation

S. F. Lavrova^{a, #} and N. A. Kudryashov^{a, ##}

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: infuriatedot@gmail.com

^{##}e-mail: nakudr@gmail.com

Received December 10, 2020; revised December 10, 2020; accepted December 22, 2020

Abstract—The generalized Kuramoto–Sivashinsky equation is used to describe a number of nonlinear physical processes. The aim of this work is to study the influence of the dispersion term of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation on the nature of the dynamics of the system at three different degrees of nonlinearity. The system dynamical regime can be qualitatively determined by calculating the largest Lyapunov exponent. If the largest Lyapunov exponent is positive, then the nearby trajectories diverge exponentially and the behavior of the system is chaotic. To find the largest Lyapunov exponent, one needs to repeatedly perturb the trajectory of the dynamical system and find the distance between the perturbed and unperturbed trajectories. To do this for a partial differential equation, it is necessary to transform it into the finite-dimensional system of ordinary differential equations. In this work, for the Kuramoto–Sivashinsky equation, this transition is carried out using the approximation of spatial derivatives on a discrete grid. The boundary conditions are chosen to be periodic. For the resulting system of ordinary differential equations, the largest Lyapunov exponent has been calculated as a function of the dispersion parameter for three degrees of nonlinearity of the equation. It has been found that an increase in the bifurcation parameter leads to a decrease in the largest Lyapunov exponent, and, consequently, to the suppression of chaotic motion. Using the method of lines, the dependences of the solution of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation on the spatial and time vari-

ables for several values of the dispersion parameter are constructed. The resulting plots illustrate the transition from a chaotic to a regular regime with an increase in the bifurcation parameter.

Keywords: Lyapunov exponent, partial differential equations, generalized Kuramoto–Sivashinsky equation

DOI: 10.1134/S2304487X20060073

REFERENCES

1. Kuramoto Yoshiki and Toshio Tsuzuki, Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium, *Progress of Theoretical Physics*, 1976, vol. 55, no. 2, pp. 356–369.
2. Sivashinsky G. I., Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames—I. Derivation of basic equations, *Acta Astronautica*, 1977, vol. 4, no. 11, pp. 1177–1206.
3. Michelson D.M. and Sivashinsky G.I., Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames—II. Numerical experiments, *Acta astronautica*, 1977, vol. 4, no. 11–12, pp. 1207–1221.
4. Sivashinsky G.I., On flame propagation under conditions of stoichiometry, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1980, vol. 39, no. 1, pp. 67–82.
5. Tselodub O.Yu., Stationary travelling waves on a film flowing down an inclined plane, *Fluid Dynamics*, 1980, vol. 15, no. 4, pp. 591–594.
6. Shlang T. and Sivashinsky G.I., *Irregular flow of a liquid film down a vertical column*, 1982.
7. Kudryashov N.A., Exact solutions of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation, *Physics Letters A*, 1990, vol. 147, no. 5–6, pp. 287–291.
8. Michelson D., Steady solutions of the Kuramoto–Sivashinsky equation, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1986, vol. 19, no. 1, pp. 89–111.
9. Kudryashov N.A., Exact solutions and integrability of the Duffing–Van der Pol equation, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, no. 4, pp. 471–479.
10. Hyman J.M. and Nicolaenko B., The Kuramoto–Sivashinsky equation: a bridge between PDE’s and dynamical systems, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1986, vol. 18, no. 1–3, pp. 113–126.
11. Nicolaenko B., Scheurer B., and Temam R., Some global dynamical properties of the Kuramoto–Sivashinsky equations: nonlinear stability and attractors, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1985, vol. 16, no. 2, pp. 155–183.
12. Kudryashov N.A., Lavrova S.F., Nelinejnye dinamicheskie processy, opisyvaemye obobshchennym uravneniem Kuramoto–Sivashinskogo v peremennyyh begushchej volny [Nonlinear dynamical processes described by the traveling wave reduction of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation], *Vestnik NIYAU MEPhI*, 2019, vol. 9, no. 2, pp. 284–289. (in Russia)
13. Kudryashov N.A. and Lavrova S.F., Dynamical features of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2020, p. 110502.
14. Kudryashov N.A., Sinel’shchikov D.I., and Chernyavsky I.L., Nonlinear evolution equations for description of perturbations in a viscoelastic tube, *Nelineinaya Dinamika [Russian Journal of Nonlinear Dynamics]*, 2008, vol. 4, no. 1, pp. 69–86.
15. Abramowitz M. and Stegun I.A., Herausgeber. *Handbook of Mathematical Functions*, 1970.
16. Benettin Giancarlo, et al., Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory, *Meccanica*, 1980, vol. 15, no. 1, pp. 9–20.
17. Schiesser W.E., *The numerical method of lines: integration of partial differential equations*, Elsevier, 2012.