

КОНЕЧНО-ОБЪЕМНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ЛОКАЛИЗАЦИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ НА ДВУМЕРНЫХ СЕТКАХ

© 2020 г. Н. А. Кудряшов¹, Р. В. Муратов¹, П. Н. Рябов^{1,*}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

*e-mail: pnryabov@mephi.ru

Поступила в редакцию 01.12.2020 г.

После доработки 15.12.2020 г.

Принята к публикации 22.12.2020 г.

Цель данной статьи — разработка эффективной конечно-объемной схемы для расчета процессов формирования полос адиабатического сдвига (ПАС). Формирование ПАС происходит при высокоскоростных деформациях упруго-пластичных материалов. Численное моделирование таких процессов с использованием лагранжевых методов сопряжено с рядом проблем, основной из которых является сильное искажение сетки при моделировании высоких деформаций. Сильное искажение расчетной сетки ухудшает точность решения, если не прибегать к таким дорогостоящим с вычислительной точки зрения операциям как перестроение сетки и переинтерполяция данных на новую сетку. Для избегания таких проблем в данной работе используется подход Эйлера для описания движения упруго-пластичного материала, при этом расчеты проводятся на фиксированной сетке. В работе рассматривается модификация хорошо известной гипопругой модели Вилкинса. В статье мы предлагаем численный метод для моделирования высокоскоростных сдвиговых деформаций на двумерных сетках. В основе численного метода лежит конечно-объемный подход, при этом для аппроксимации решения задачи Римана о распаде разрыва используется метод типа Куранта—Изаксона—Риса. Полученный численный метод тестируется на нескольких задачах, предложенных другими авторами.

Ключевые слова: полосы адиабатического сдвига, локализация деформаций, пластичность

DOI: 10.1134/S2304487X20060061

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование отказоустойчивости материалов при высоких нагрузках является важной областью материаловедения, основная задача которой, состоит в предсказании условий отказа материалов, что особенно важно для нужд промышленности (аэрокосмической, атомной, обрабатывающей и др.), где требование повышенной надежности от используемых материалов является одним из первостепенных.

Как известно процесс локализации пластических деформаций является одним из многих факторов, приводящих к отказу материала в процессе его эксплуатации. В силу его высокой практической значимости, данное явление привлекает исследователей в последние десятилетия. Одним из проявлений локализации пластической деформации является процесс образования полос адиабатического сдвига (ПАС), который в свою очередь, является характерным эффектом при высокоскоростных сдвиговых деформациях пластичных материалов. Такие деформации широко наблюда-

ются при шоковой нагрузке, обработке материалов, в баллистике и др. [1, 2].

Для изучения процессов формирования ПАС используются различные методы: экспериментальные, теоретические и численные. Феномен образования ПАС исследовался в теоретических работах [3, 4] и с использованием численного моделирования [5, 7]. ПАС представляют собой узкие области в материале, в которых деформации и температуры достигают больших значений в короткий промежуток времени. В экспериментальных работах ПАС были получены Нестеренко [7], в данных работах продемонстрирован также эффект самоорганизации ПАС. Характерное расстояние между полосами является интересным свойством данного процесса. Различные оценки данного параметра были получены в работах [3, 4].

В данной работе используется конечно-объемный подход, моделирование сдвига проводится на двумерных фиксированных сетках. Примером такого процесса является чистый сдвиг бесконечной пластины, при этом на границах используются периодические граничные условия. В работе

используется модификация модели Вилкинса, в которой предел текучести нелинейно зависит от скорости деформации, параметра упрочнения и температуры. В предыдущих работах [8, 9] самоорганизация ПАС исследовалась в одномерных задачах. Новый метод позволяет проводить исследования на двумерных сетках.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

В данной работе используется эйлерово описание движения сплошной среды, а при численном моделировании используются неподвижные двумерные сетки. Таким образом, параметры среды (плотность $\rho(\mathbf{x}, t)$, температура $T(\mathbf{x}, t)$, давление $p(\mathbf{x}, t)$, удельная внутренняя энергия $e(\mathbf{x}, t)$, скорость $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, тензор напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$) определяются в фиксированной точке пространства $\mathbf{x}$ в заданный момент времени t . Математическое описание движения упруго-пластичной среды начнем с записи базовых законов сохранения.

Закон сохранения массы (уравнение непрерывности):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.1)$$

Закон сохранения момента импульса (уравнение движения Коши):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma}) = 0. \quad (2.2)$$

Закон сохранения энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \operatorname{div}(\rho E \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} - k \operatorname{grad} T) &= 0, \\ E &= e(T) + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2, \quad e(T) = C_v T. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В последнем уравнении (2.3) введена удельная внутренняя энергия $e(T)$. Мы предполагаем, что e пропорциональна температуре T . Параметр C_v — теплоемкость при постоянном объеме, а k — коэффициент теплопроводности.

Также неявно используется закон сохранения момента импульса, который приводит к симметричности тензора Коши $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Тензор напряжений допускает разложение на две части: шаровую часть и девиатор напряжений $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{s}$, где p — давление, $\mathbf{I}$ — единичный тензор, а $\mathbf{s}$ — девиатор напряжений. В общем случае давление зависит от нескольких термодинамических переменных, мы будем предполагать более простую зависимость, при которой давление зависит только от плотности. Такая зависимость часто используется при рассмотрении высокоскоростных деформаций металлов

$$p(\rho) = B \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right), \quad (2.4)$$

где ρ_0 — референсная плотность, а B — объемный модуль упругости при референсной плотности.

Введем новые переменные: тензор скоростей деформации $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, девиатор скоростей деформации $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ и тензор вращения $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, которые задаются по формулам

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.5)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \operatorname{dev}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (2.6)$$

$$\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.7)$$

Мы используем линейную модель упруго-пластики и предполагаем, что девиатор деформаций можно представить в виде суммы упругой и пластичной компонент

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \quad (2.8)$$

Аналогичная формула справедлива и для тензора скоростей деформации. Запишем далее закон Гука для упругой части деформаций, после дифференцирования по времени получим следующую формулу

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} + \mathbf{s}\dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{s} = 2\mu\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e, \quad (2.9)$$

в которой используется объективная производная (производная Яуманна) девиатора напряжений. Используя аддитивную декомпозицию деформации данное выражение переписывается в виде [10]

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} + \mathbf{s}\dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{s} = 2\mu(\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p). \quad (2.10)$$

Далее введем эквивалентную деформацию $\bar{\epsilon}$, скорость деформации $\dot{\bar{\epsilon}}$ и эквивалентное напряжение $\bar{\sigma}$, которые являются скалярными характеристиками соответствующих величин и определяются на основе инвариантов девиаторов

$$(\dot{\bar{\epsilon}}^p)^2 = \frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \quad \bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}. \quad (2.11)$$

$$\frac{d\bar{\epsilon}}{dt} = \dot{\bar{\epsilon}}, \quad (2.12)$$

где последняя формула (2.12) определяет динамику эквивалентной деформации.

Далее согласно ассоциированному закону текучести ($d\epsilon^p = \lambda \times d\mathbf{s}$) мы получаем следующее соотношение, связывающее девиатор напряжений и скоростей деформации

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \begin{cases} 0, & \bar{\sigma} < \sigma_Y(\psi, \dot{\bar{\epsilon}}^p, T), \\ \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\bar{\sigma}} \mathbf{s}, & \bar{\sigma} = \sigma_Y(\psi, \dot{\bar{\epsilon}}^p, T). \end{cases} \quad (2.13)$$

где ψ — параметр деформационного упрочнения. Переменная ψ имеет физический смысл, аналогичный эквивалентной деформации $\bar{\epsilon}$, и ведет себя похожим образом. Функция $\sigma_Y(\psi, \dot{\bar{\epsilon}}, T)$ определяет поверхность текучести и описывает соотношение между пределом текучести, эквивалентной скоростью деформации и температурой. В работе используется функция текучести σ_Y в следующей форме

$$\sigma_Y(\psi, \dot{\bar{\epsilon}}, T) = \kappa(\psi)g(T) \left(1 + \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\dot{\epsilon}_y} \right)^m, \quad (2.14)$$

где $\dot{\epsilon}_y$ — референсная скорость деформации. При обращении данного выражения получаем

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \dot{\epsilon}_y \times \max \left(0, \left[\frac{\bar{\sigma}}{\kappa(\psi)g(T)} \right]^{\frac{1}{m}} - 1 \right). \quad (2.15)$$

Функция $\kappa(\psi)$ характеризует эффект деформационного упрочнения. Данный процесс и динамика переменной ψ описывается следующим уравнением

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\bar{\sigma} \times \dot{\bar{\epsilon}}}{\kappa(\psi)}. \quad (2.16)$$

В экспериментах, где эффект деформационного упрочнения не учитывается, используется $\kappa(\psi) = \sigma_0$, а уравнение (2.16) исключается из системы уравнений. В остальных случаях используется степенная зависимость

$$\kappa(\psi) = \sigma_0 \left[1 + \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^n \right], \quad (2.17)$$

где σ_0 — предел текучести при референсных значениях $\psi = \dot{\bar{\epsilon}} = T = 0$.

Зависимость $g(T)$ описывает температурное размягчение материала. Данная функция может иметь различные формы, в данной работе используется линейная или экспоненциальная зависимости

$$g(T) = 1 - aT, \quad g(T) = \exp(-aT). \quad (2.18)$$

Основное свойство данной функции состоит в том, что она стремится к нулю, когда температура стремится к точке плавления (или бесконечности для экспоненциальной зависимости). Таким образом, предел текучести (2.14) стремится к нулю с увеличением температуры, что необходимо для формирования ПАС.

В заключение выпишем формулы в двумерном случае. Список зависимых переменных: ρ , u , v , p , e , T , s_1 , s_2 , τ , $\dot{\epsilon}_1$, $\dot{\epsilon}_2$, $\dot{\gamma}$, ψ , $\bar{\epsilon}$ где ρ — плотность, u и v — компоненты скорости, p — давление, e — удельная внутренняя энергия, T — температура, s_1 , s_2 , τ — компоненты девиатора напряжений и $\dot{\epsilon}_1$,

$\dot{\epsilon}_2$, $\dot{\gamma}$ — компоненты пластической части девиатора скорости деформаций. Эквивалентные переменные определяются по формуле

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} = 3(s_1^2 + s_1s_2 + s_2^2 + \tau^2), \quad (2.19)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}}^2 = \frac{2}{3} \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon} = \frac{4}{3}(\epsilon_1^2 + \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2^2 + \gamma^2). \quad (2.20)$$

Законы сохранения в двумерном случае

$$(\rho)_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0, \quad (2.21)$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p - s_1)_x + (\rho uv - \tau)_y = 0, \quad (2.22)$$

$$(\rho v)_t + (\rho uv - \tau)_x + (\rho v^2 + p - s_2)_y = 0, \quad (2.23)$$

$$(\rho E)_t + (u(\rho E + p - s_1) - \tau v)_x + (v(\rho E + p - s_2) - \tau u)_y = -k\Delta T, \quad (2.24)$$

где $E = e + (u^2 + v^2)/2$, удельная внутренняя энергия зависит от температуры, а давление зависит от плотности

$$e(T) = C_v T, \quad p(\rho) = B \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right). \quad (2.25)$$

Соотношения между компонентами напряжения и скорости деформации

$$s_{1,t} + us_{1,x} + vs_{1,y} - \frac{2\mu}{3}(2u_x - v_y) = \tau(u_y - v_x) - 2\mu\dot{\epsilon}_1, \quad \dot{\epsilon}_1 = \frac{3s_1}{2\sigma} \sigma_Y^{-1}(\bar{\sigma}, \psi, T), \quad (2.26)$$

$$s_{2,t} + us_{2,x} + vs_{2,y} - \frac{2\mu}{3}(2v_y - u_x) = \tau(v_x - u_y) - 2\mu\dot{\epsilon}_2, \quad \dot{\epsilon}_2 = \frac{3s_2}{2\sigma} \sigma_Y^{-1}(\bar{\sigma}, \psi, T), \quad (2.27)$$

$$\tau_t + u\tau_x + v\tau_y - \mu(v_x + u_y) = \frac{1}{2}(s_1 - s_2)(v_x - u_y) - 2\mu\dot{\gamma}, \quad \dot{\gamma} = \frac{3\tau}{2\sigma} \sigma_Y^{-1}(\bar{\sigma}, \psi, T). \quad (2.28)$$

Вспомогательные переменные ψ и $\bar{\epsilon}$ удовлетворяют уравнениям

$$\psi_t + u\psi_x + v\psi_y = \frac{\bar{\sigma} \cdot \dot{\bar{\epsilon}}}{\kappa(\psi)}, \quad (2.29)$$

$$\bar{\epsilon}_t + u\bar{\epsilon}_x + v\bar{\epsilon}_y = \dot{\bar{\epsilon}}. \quad (2.30)$$

Уравнение (2.29) решается в том случае, если в задаче необходимо учитывать деформационное упрочнение.

3. КОНЕЧНО-ОБЪЕМНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Для аппроксимации системы уравнений (2.21)–(2.28) будем использовать метод конечных объе-

мов. Сперва, выделим источниковые члены в системе уравнений и перепишем ее в виде

$$\rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y = H_1, \quad (3.1)$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p - s_1)_x + (\rho uv - \tau)_y = H_2, \quad (3.2)$$

$$(\rho v)_t + (\rho uv - \tau)_x + (\rho v^2 + p - s_2)_y = H_3, \quad (3.3)$$

$$(\rho E)_t + (u(\rho E + p - s_1) - \tau v)_x + (v(\rho E + p - s_2) - \tau u)_y = H_4, \quad (3.4)$$

$$s_{1,t} + us_{1,x} + vs_{1,y} - \frac{2\mu}{3}(2u_x - v_y) = H_5, \quad (3.5)$$

$$s_{2,t} + us_{2,x} + vs_{2,y} - \frac{2\mu}{3}(2v_y - u_x) = H_6, \quad (3.6)$$

$$\tau_t + u\tau_x + v\tau_y - \mu(v_x + u_y) = H_7. \quad (3.7)$$

Система уравнений выше является гиперболической, вектор источников $\mathbf{H}$ состоит из трех частей

$$\mathbf{H} = (H_1, H_2, \dots, H_7)^T = \mathbf{H}_T + \mathbf{H}_J + \mathbf{H}_p, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{H}_T = (0, 0, 0, k \operatorname{div} T, 0, 0, 0)^T, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{H}_p = -2\mu(0, 0, 0, 0, \dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\gamma})^T, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{H}_J = \left(0, 0, 0, \tau(u_y - v_x), \tau(v_x - u_y), \frac{1}{2}(s_1 - s_2)(v_x - u_y) \right)^T, \quad (3.11)$$

вектор $\mathbf{H}_T$ отвечает за теплопроводность, вектор $\mathbf{H}_p$ характеризует пластичность и в $\mathbf{H}_J$ отнесена производная Яуманна.

3.1. Аппроксимация гиперболической подсистемы

Для аппроксимации гиперболической подсистемы используется метод типа Годунова. Перепишем систему в виде

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + B^x \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + B^y \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial y} = 0, \quad (3.12)$$

где $\mathbf{q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E, s_1, s_2, \tau)^T$ — вектор состояния в консервативном виде. Конечно-объемная аппроксимация системы

$$\mathbf{q}_\alpha^* = \mathbf{q}_\alpha^n - \frac{\Delta t}{V_\alpha} \sum_{\beta \in \nu(\alpha)} R_{\alpha\beta}^{-1} \mathbf{F}_{\alpha\beta}^* S_{\alpha\beta}, \quad (3.13)$$

где α и β — индексы ячеек, $\nu(\alpha)$ — индексы ячеек, смежных с α , V_α — объем ячейки α , $S_{\alpha\beta}$ — площадь грани между смежными ячейками α и β , $\mathbf{n}^{\alpha\beta}$ — внешняя нормаль грани $\alpha\beta$. $R_{\alpha\beta}$ это матрица поворота в локальный базис, связанный с нормалью $\mathbf{n}^{\alpha\beta}$. Вектор состояния в локальном базисе вычисляется по формуле $\mathbf{Q} = R\mathbf{q}$.

Вектор $\mathbf{F}_{\alpha\beta}^*$ равен численному потоку через грань для локально-одномерной задачи:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + B \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0.$$

Для аппроксимации потока мы используем вариацию метода типа КИР [11]

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{2} B_{\alpha\beta} \times (\mathbf{Q}_\beta - \mathbf{Q}_\alpha) + \mathbf{F}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} |A_{\alpha\beta}| (\mathbf{Q}_\beta - \mathbf{Q}_\alpha), \quad (3.14)$$

$$|A| = \Omega_R |\Lambda| \Omega_L, \quad A = \Omega_R \Lambda \Omega_L = B + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}}.$$

В случае, когда давление зависит только от плотности, можно получить полный набор собственных значений и собственных векторов якобиана аналитически. Собственные числа матрицы A являются вещественными числами

$$\Lambda = \operatorname{diag}(u - c_p, u - c_s, u, u, u, u + c_s, u + c_p), \quad (3.15)$$

где c_p и c_s — скорости продольных и поперечных упругих волн в материале соответственно.

$$c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad c_p^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{4\mu}{3\rho}. \quad (3.16)$$

Ортогональную систему собственных векторов также можно вычислить аналитически. Зная матрицы Ω_L , Ω_R и Λ , можно без труда посчитать численный поток $\mathbf{F}^*$ по формуле (3.14). После суммирования потоков мы получаем значение вектора состояния $\mathbf{q}^*$ на промежуточном шаге. Схема имеет первый порядок по времени и координате и является устойчивой при выполнении условия Куранта. Поскольку $c_p > c_s$, условие устойчивости имеет вид

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{\max(|u + c_p|, |u - c_p|)}. \quad (3.17)$$

Чтобы учесть деформационное упрочнение материала, необходимо также посчитать значение переменных ψ и $\bar{\epsilon}$. Данные величины являются решениями уравнений (2.29) и (2.30). Перепишем данные уравнения в консервативной форме

$$(\rho\psi) + \operatorname{div}(\mathbf{v}\rho\psi) = \rho \frac{\bar{\sigma} \times \dot{\bar{\epsilon}}}{\kappa(\psi)}, \quad (3.18)$$

$$(\rho\bar{\epsilon}) + \operatorname{div}(\mathbf{v}\rho\bar{\epsilon}) = \rho\bar{\epsilon}, \quad (3.19)$$

а затем используем аналогичную схему типа КИР для аппроксимации конвективных слагаемых

$$(\rho\psi)_\alpha^* = (\rho\psi)_\alpha^n - \frac{\Delta t}{V_\alpha} \sum_{\beta \in \nu(\alpha)} [u_n^+ (\rho\psi)_\alpha^n + u_n^- (\rho\psi)_\beta^n] S_{\alpha\beta}, \quad (3.20)$$

$$(\rho\bar{\epsilon})_\alpha^* = (\rho\bar{\epsilon})_\alpha^n - \frac{\Delta t}{V_\alpha} \sum_{\beta \in \nu(\alpha)} [u_n^+ (\rho\bar{\epsilon})_\alpha^n + u_n^- (\rho\bar{\epsilon})_\beta^n] S_{\alpha\beta}, \quad (3.21)$$

где

$$u_n^+ = \max(0, u_n), \quad u_n^- = \min(0, u_n), \quad u_n = (\mathbf{v}, \mathbf{n}_{\alpha\beta}). \quad (3.22)$$

В результате мы получили двумерный аналог схемы с разностями против потоков для вычисления промежуточных значений ψ и $\dot{\epsilon}$.

3.2. Аппроксимация источников

После суммирования потоков мы получили промежуточный вектор состояния $\mathbf{q}^*$, далее необходимо добавить к нему вклад от источников. Первые три уравнения (2.21–2.23) не содержат источников, поэтому чтобы получить плотность и скорости на новом слое, необходимо просто перейти от консервативных переменных к примитивным

$$\rho_{\alpha}^{n+1} = \rho_{\alpha}^*, \quad u_{\alpha}^{n+1} = \frac{\mathbf{q}_{2,\alpha}^*}{\mathbf{q}_{1,\alpha}^*}, \quad v_{\alpha}^{n+1} = \frac{\mathbf{q}_{3,\alpha}^*}{\mathbf{q}_{1,\alpha}^*}, \quad (3.23)$$

Далее мы используем явные формулы для вычисления производной Яуманна и учета теплопроводности. Предполагается, что данные слагаемые вносят небольшой вклад и поэтому существенно не влияют на устойчивость схемы. Вектор состояния на новом временном шаге определяется по формуле

$$\mathbf{q}_{\alpha}^{n+1} = \mathbf{q}_{\alpha}^* + \Delta t \left(\mathbf{H}_{T,\alpha}^n + \mathbf{H}_{J,\alpha}^n + \frac{1}{2} (\mathbf{H}_{P,\alpha}^n + \mathbf{H}_{P,\alpha}^{n+1}) \right). \quad (3.24)$$

Для аппроксимации дивергенции используется теорема Остроградского, следовательно внутренняя энергия и температура на новом временном слое вычисляется по формулам

$$e_{\alpha}^{n+1} = e_{\alpha}^* + \frac{\Delta t k}{V_{\alpha}} \sum_{\beta \in \nu(\alpha)} \frac{T_{\beta}^n - T_{\alpha}^n}{|\mathbf{x}_{\beta} - \mathbf{x}_{\alpha}|} S_{\alpha\beta}, \quad (3.25)$$

$$T_{\alpha}^{n+1} = \frac{e_{\alpha}^{n+1}}{C_v \rho_{\alpha}^{n+1}}, \quad (3.26)$$

где $\mathbf{x}_{\alpha}$ и $\mathbf{x}_{\beta}$ – центры ячеек. Для компонент тензора напряжений мы получаем неявную схему

$$\begin{aligned} s_1^{n+1} &= s_1^* + \Delta t [-\tau^n (v_x^n - u_y^n) - \mu(\dot{\epsilon}_1^n + \dot{\epsilon}_1^{n+1})], \\ s_2^{n+1} &= s_2^* + \Delta t [-\tau^n (u_y^n - v_x^n) - \mu(\dot{\epsilon}_2^n + \dot{\epsilon}_2^{n+1})], \\ \tau^{n+1} &= \tau^* + \Delta t \left[-\frac{1}{2} (s_1^n - s_2^n) (u_y^n - v_x^n) - \mu(\dot{\gamma}^n + \dot{\gamma}^{n+1}) \right], \end{aligned} \quad (3.27)$$

где $u_x^n, u_y^n, v_x^n, v_y^n$ означают градиенты скоростей, вычисленные по значениям на n -м временном шаге (используется метод наименьших квадратов). Далее обозначим все слагаемые с n -го слоя как $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{\tau}$. Данные переменные вычисляются явно как

$$\begin{aligned} s_1 &= s_1^* + \Delta t [-\tau^n (v_x^n - u_y^n) - \mu \dot{\epsilon}_1^n], \\ s_2 &= s_2^* + \Delta t [-\tau^n (u_y^n - v_x^n) - \mu \dot{\epsilon}_2^n], \\ \tilde{\tau} &= \tau^* + \Delta t \left[-\frac{1}{2} (s_1^n - s_2^n) (u_y^n - v_x^n) - \mu \dot{\gamma}^n \right]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Используя данные обозначения перепишем систему

$$\begin{aligned} s_1^{n+1} &= \tilde{s}_1 - \Delta t \mu \dot{\epsilon}_1^{n+1}, \quad \dot{\epsilon}_1^{n+1} = \frac{3s_1^{n+1}}{2\bar{\sigma}^{n+1}} \sigma_Y^{-1}(\bar{\sigma}^{n+1}, \psi^n, T^{n+1}), \\ s_2^{n+1} &= \tilde{s}_2 - \Delta t \mu \dot{\epsilon}_2^{n+1}, \quad \dot{\epsilon}_2^{n+1} = \frac{3s_2^{n+1}}{2\bar{\sigma}^{n+1}} \sigma_Y^{-1}(\bar{\sigma}^{n+1}, \psi^n, T^{n+1}), \\ \tau^{n+1} &= \tilde{\tau} - \Delta t \mu \dot{\gamma}^{n+1}, \quad \dot{\gamma}^{n+1} = \frac{3\tau^{n+1}}{2\bar{\sigma}^{n+1}} \sigma_Y^{-1}(\bar{\sigma}^{n+1}, \psi^n, T^{n+1}). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Данную систему из трех нелинейных уравнений можно свести к одному уравнению на эквивалентное напряжение

$$\bar{\sigma}^{n+1} = \tilde{\bar{\sigma}} - 3\Delta t \mu \sigma_Y^{-1}(\bar{\sigma}^{n+1}, \psi^n, T^{n+1}), \quad (3.30)$$

где $\tilde{\bar{\sigma}}$ – эквивалентное напряжение, соответствующее девиатору с компонентами $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{\tau}$. Используя итерационный метод Ньютона, находим решение $\bar{\sigma}^{n+1}$ нелинейного уравнения (3.30). Затем можно вычислить эквивалентную скорость деформации $\dot{\epsilon}^{n+1} = \sigma_Y^{-1}(\bar{\sigma}^{n+1}, \psi^n, T^{n+1})$ и компоненты девиаторов по формулам

$$s^{n+1} = \tilde{s} / \left(1 + \Delta t \mu \frac{3\dot{\epsilon}^{n+1}}{2\bar{\sigma}^{n+1}} \right), \quad \dot{\epsilon}^{n+1} = \frac{3s^{n+1}}{2\bar{\sigma}^{n+1}} \dot{\epsilon}^{n+1}.$$

На заключительном этапе вычисляем переменные $\bar{\epsilon}$ и ψ по формулам

$$\psi^{n+1} = \psi^* + \Delta t \frac{(\bar{\sigma} \times \dot{\epsilon})^n + (\bar{\sigma} \times \dot{\epsilon})^{n+1}}{2\kappa(\psi^*)} \quad (3.31)$$

$$\bar{\epsilon}^{n+1} = \bar{\epsilon}^* + \Delta t \frac{\dot{\epsilon}^n + \dot{\epsilon}^{n+1}}{2}. \quad (3.32)$$

4. ТЕСТИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЫ

Для тестирования предложенной двумерной модели и численной схемы мы воспроизведем решение трех задач, рассмотренных ранее другими авторами. Во всех задачах рассматривается сдвиговая деформация стали марки НУ-100. Гидродинамические параметры стали приведены в табл. 1. Данные параметры совпадают для всех тестовых задач. Поскольку при чистом сдвиге объем не ме-

Таблица 1. Гидродинамические параметры стали НУ-100

C_v , Дж/(кг К)	k , Вт/(м К)	ρ_0 , кг/м ³	B , ГПа	μ , ГПа
473	49.22	7800	128	80

Таблица 2. Параметры закона текучести для различных тестов

	σ_0 , МПа	a , 1/К	$\dot{\epsilon}_y$, 1/с	m	ψ_0	n
Тест 4.1	1040	6.43×10^{-4}	1.15×10^{-4}	0.025	0.0139	0.107
Тест 4.2	333	0.0222	0.1	0.025	—	—

няется, объемный модуль упругости не влияет на решение одномерных задач, данный параметр не встречается в статьях, где рассматриваются одномерные сдвиговые деформации. Следующий набор параметров описывает закон текучести материала, различные наборы используются в различных работах. Все варианты приведены в табл. 2.

Как и в других статьях, введем номинальную деформацию $\epsilon_{\text{ном}} = \dot{\epsilon}_0 t$, которая используется в качестве безразмерного времени.

4.1. Тест 1: Локализация единичной ПАС в одномерной задаче

Данная задача рассматривается в работах Уолтера [6] и Чжоу [12], рассматривается формирование единичной ПАС. Оригинальная задача является одномерной, мы будем моделировать ее на двумерной сетке. Рассматривается чистый сдвиг бесконечного слоя толщины $H = 6.94$ мм, нижняя поверхность фиксируется, а верхняя сдвигается с постоянной скоростью $v_0 = \dot{\epsilon}_0 H$, где скорость деформации $\dot{\epsilon}_0 = 750$ 1/с. Закон пластической текучести имеет вид

$$\sigma_Y(\dot{\epsilon}, T) = \sigma_0(1 - aT) \left(1 + \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_y} \right)^m, \quad (4.1)$$

параметры приведены в табл. 2. Деформационное упрочнение не учитывается, то есть переменная ψ не рассматривается. Скорость в начальный мо-

мент имеет линейное распределение, температура имеет форму гауссиана:

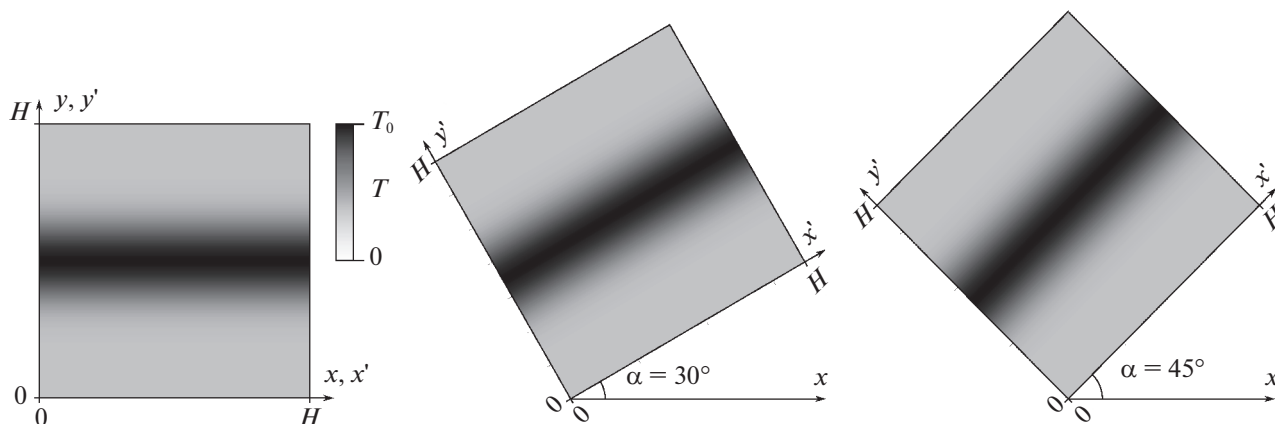
$$T(y, 0) = 16.2(1 - 4(\tilde{y} - 0.5)^2)^9 \exp(-20(\tilde{y} - 0.5)^2), \quad (4.2)$$

$$u(y, 0) = \dot{\epsilon}_0 y, \quad \tau(y, 0) = 0, \quad \dot{\epsilon}(y, 0) = \dot{\epsilon}_0, \quad (4.3)$$

где $\tilde{y}$ — безразмерная координата $\tilde{y} = y/H$. Температурная неоднородность приводит к локализации ПАС в центре слоя. Для сравнения результатов используются безразмерные переменные, напряжение делится на $600\sqrt{3}$ МПа, температура на 162 К.

Исходная задача одномерная, мы воспользуемся данным фактом для тестирования двумерного кода. Для этих целей мы моделируем задачу на трех различных двумерных сетках. Введем дополнительную систему координат x', y' , полученную вращением исходной системы координат на угол α . Мы рассматриваем задачи, которые имеют начальные условия 1 в координатах (x', y') , при этом моделирование производится в координатах (x, y) . Это возможно, поскольку предложенный численный метод не зависит от структуры сетки, а формула (3.13) справедлива на произвольных сетках.

Моделирование проводится в квадратной области $(x', y') \in [0, H]^2$, вдоль оси x используются периодические условия. Сетки с разным углом (0° , 30° и 45°) имеют одинаковые размеры (300×300 ячеек). Результаты моделирования на трех сетках совпадают. Стадии формирования

**Рис. 1.** Начальная температура на различных сетках.

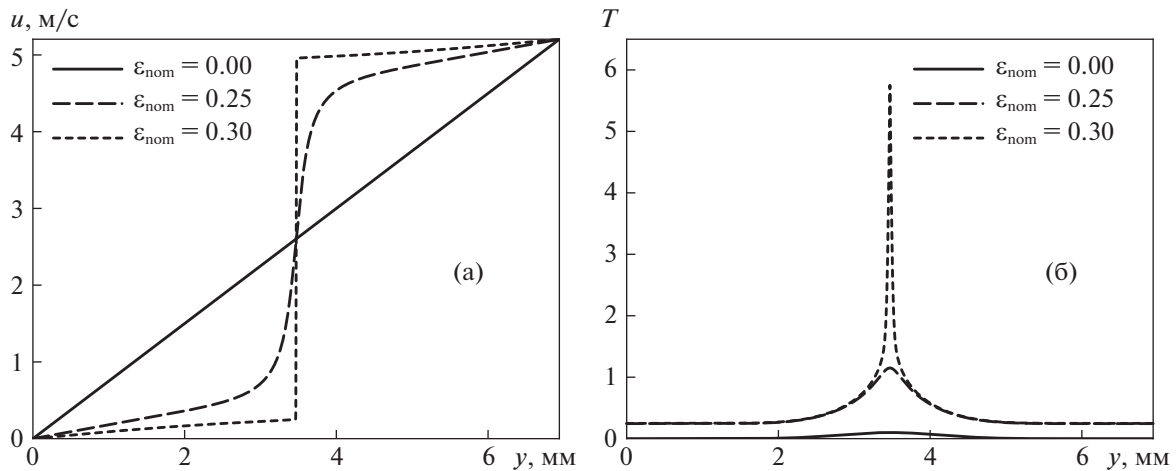


Рис. 2. Стадии формирования ПАС. Распределение скорости (а) и температуры (б) вдоль линии поперечного сечения.

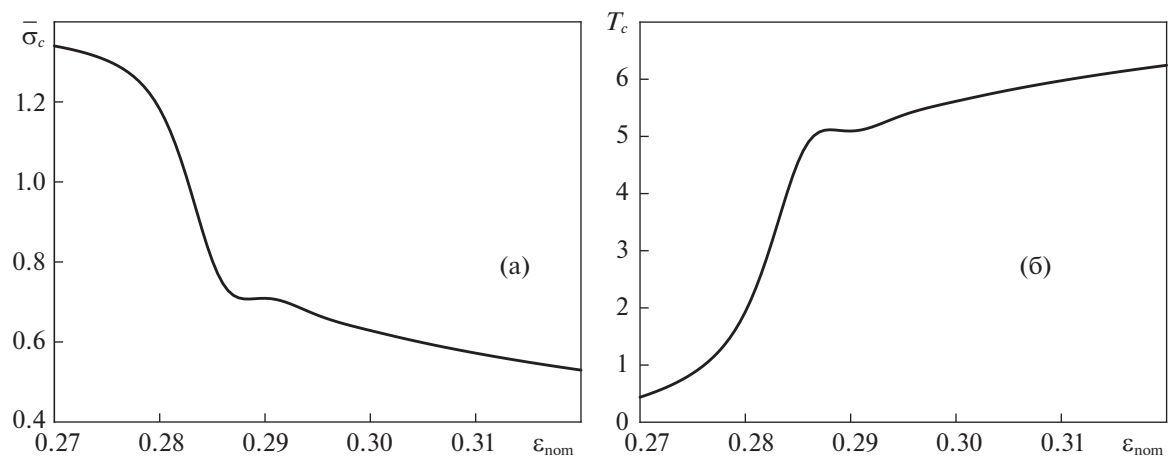


Рис. 3. Зависимости эквивалентного напряжения (а) и температуры (б) в центре образца от времени.

ПАС показаны на рис. 2. Для каждой сетки мы получили визуально неотличимые результаты. Конечно, это справедливо только для скалярных величин, таких как эквивалентное напряжение или температура. Тензорные величины (s , ϵ) и векторные поля (v) различны на разных сетках. К примеру, касательная компонента τ равна нулю при моделировании на сетке с углом 45° , в то же время это единственная ненулевая компонента девиатора при моделировании на исходной сетке. Зависимости центральных величин ($x' = H/2$, $y' = H/2$) от времени также совпадают на всех

сетках 3. Все результаты совпадают с результатами других авторов.

Далее мы проверим сохранение симметрии более аккуратно. Сначала проверим симметрию переноса вдоль оси x' . Поскольку исходная задача одномерная, для любой компоненты $f(x', y', t)$, верно следующее $f(x', y', t) = f(x' + T, y', t)$. В численном эксперименте это выполняется с некоторой точностью. Наибольшие градиенты параметров наблюдаются в центре пластины, поэтому срез $y' = H/2$ лучше всего подходит для проверки асимметрии. Введем следующую метрику асимметрии переноса

$$\delta f(\epsilon_{nom}) = \frac{\max_{x'} f(x', 0.5H, \epsilon_{nom}) - \min_{x'} f(x', 0.5H, \epsilon_{nom})}{\max_{x'} f(x', 0.5H, \epsilon_{nom})}, \quad (4.4)$$

величина характеризует разброс параметра f вдоль линии $y' = 0.5H$. Наиболее интересными являются параметры асимметрии для эквивалентного напряжения и скорости деформации,

они приведены на рис. 4. Можно увидеть, что симметрия сохраняется до начала локализации $\epsilon_{nom} = 0.3$, после асимметрия резко возрастает, но все равно остается достаточно небольшой:

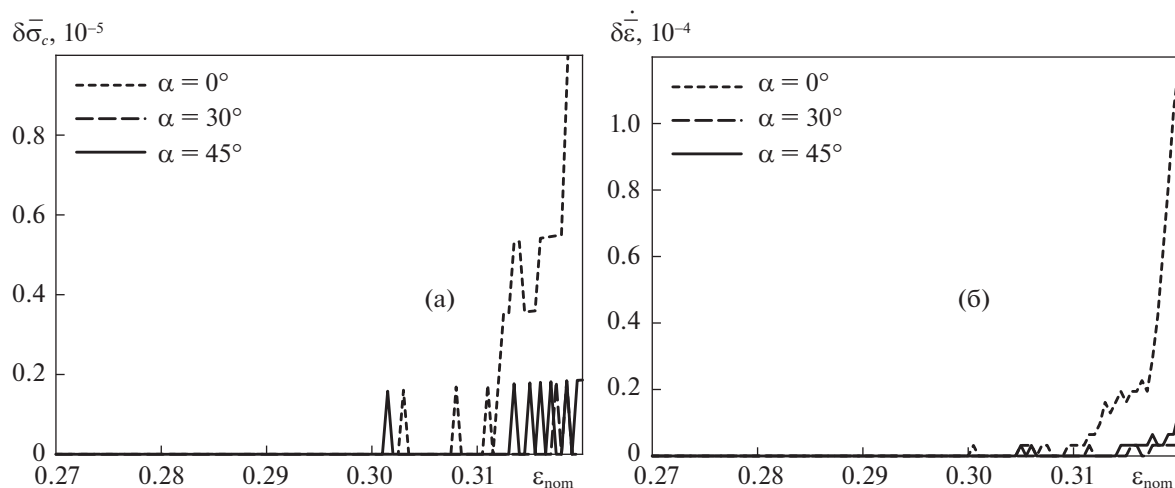


Рис. 4. Зависимость асимметрии переноса от времени.

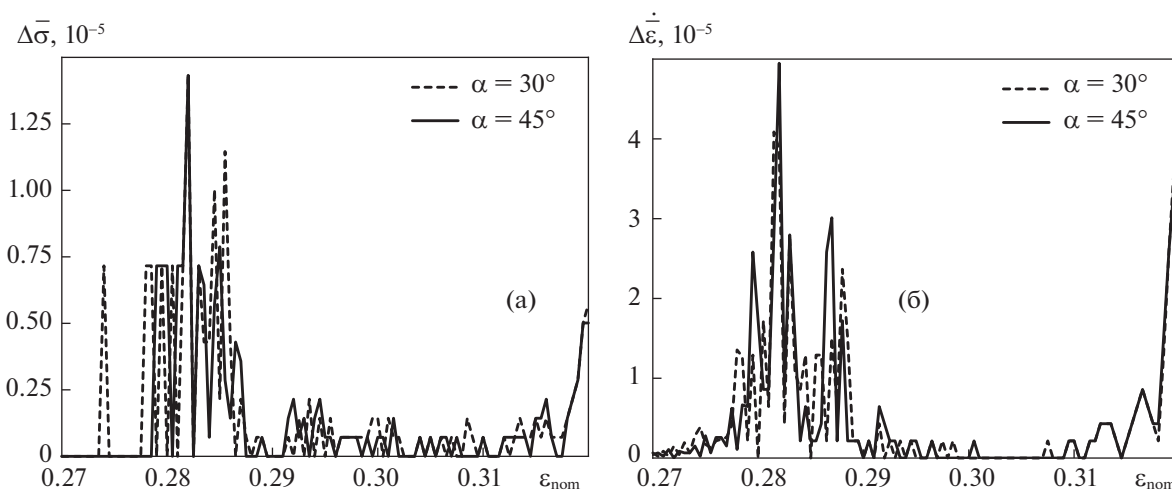


Рис. 5. Зависимость асимметрии вращения от времени.

на уровне около 10^{-4} . Также интересным является факт, что максимальная асимметрия наблюдается в расчете на исходной сетке без вращения.

Далее мы сравним расчеты на различных сетках друг с другом. В этих целях введем новую метрику, которая характеризует относительное различие расчетов на различных сетках

$$\Delta f^{(\alpha)}(\epsilon_{\text{nom}}) = \frac{\max_{x,y} |f^{(\alpha)}(x'_\alpha(x,y), y'_\alpha(x,y), \epsilon_{\text{nom}}) - f^{(0)}(x'_\alpha(x,y), y'_\alpha(x,y), \epsilon_{\text{nom}})|}{\max_{x,y} |f^{(0)}(x,y, \epsilon_{\text{nom}})|}. \quad (4.5)$$

Величина $\Delta f^{(\alpha)}(\epsilon_{\text{nom}})$ определяет относительное отличие решения на сетке с наклоном α от решения на исходной сетке с $\alpha = 0^\circ$. В формуле выше $x'_\alpha(x,y)$ и $y'_\alpha(x,y)$ являются координатами, полученными вращением точки (x,y) на угол α . Как и ранее рассмотрим ошибки для эквивалент-

ных величин, они показаны на рис. 5. В данном тесте максимальная асимметрия также имеет порядок 10^{-4} , но она не зависит от времени. Данный тест показывает, что предложенная численная схема позволяет моделировать одномерные задачи на двумерных сетках.

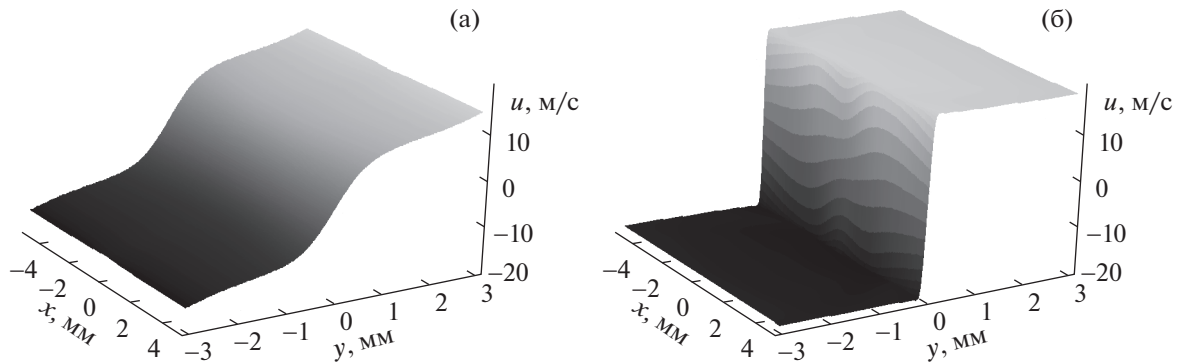


Рис. 6. Распределение скорости в различные моменты времени.

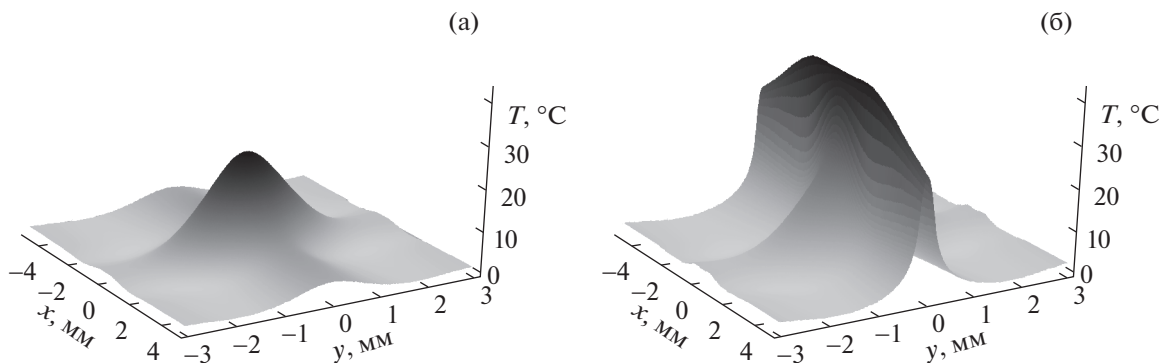


Рис. 7. Распределение температуры в различные моменты времени.

4.2. Тест 2: Локализация единичной ПАС в двумерной задаче

Данная тестовая задача рассматривается в статье Батры [5]. Изучается формирование единичной ПАС в квадратном блоке $|x| < 2H$, $|y| < H$ под действием сдвиговой деформации. В оригинальном эксперименте [5] используется лагранжево описание и подвижная сетка, исходная форма блока – квадрат $2H \times 2H$. Мы расширяем вычислительную область вдоль оси x и используем периодические граничные условия на границах $x = \pm 2H$. Нижняя и верхняя границы теплоизолированы и сдвигаются в различные стороны, скорость деформации $\dot{\epsilon}_0$ равна $5 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$, граничные условия

$$u(x, \pm H) = \pm \dot{\epsilon}_0 H, \quad T_y(x, \pm H) = 0. \quad (4.6)$$

Скорость в начальный момент u распределена линейно, температура имеет возмущение в центре образца, другие величины равны нулю

$$u(x, y) = \dot{\epsilon}_0 y, \quad (4.7)$$

$$T(x, y) = 18(1 - r^2)^9 \exp(-5r^2), \quad (4.8)$$

$$r^2 = (x^2 + y^2)/H^2. \quad (4.9)$$

Параметры стали приведены в табл. 1 и 2. Все параметры совпадают с предложенными в работе [5].

Данные параметры соответствуют стали НУ-100, за исключением коэффициента температурного разупрочнения a . Данный параметр повышен для сокращения вычислительного времени, по этой причине точка плавления стали становится равна 45°C . Данное предположение было использовано Батрой, это влияет только на скорость возникновения ПАС.

Начальная неоднородность температуры приводит к локализации единичной ПАС в центре блока. Динамика формирования ПАС показана на рисунках 6–8. Отличительные характеристики процесса: появление разрыва на графике скорости, повышение температуры до точки плавления, существенное уменьшение эквивалентного напряжения в силу температурного разупрочнения материала. В момент $\epsilon_{\text{ном}} = 0.090$ температурный пик в центре образца достигает температуры плавления (рис. 7б), а на графике скорости появляется скачок (рис. 6б). Полученные результаты соответствуют результатам из работы Батры [5].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном исследовании был рассмотрен процесс формирования ПАС в двумерном случае. Была предложена математическая модель для описания данного процесса. Также была разрабо-

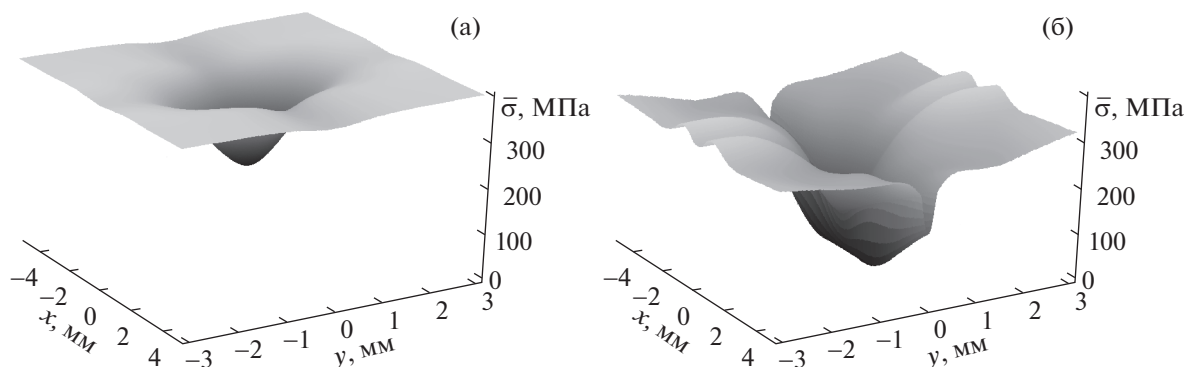


Рис. 8. Распределение напряжения в различные моменты времени.

тана численная схема для решения поставленной задачи, была показана эффективность предложенного алгоритма. Модель и численная схема были протестированы на трех задачах, предложенных другими авторами, в тестах были получены хорошие результаты. Также была решена двумерная задача о формировании множественных ПАС, которая является обобщением одномерной задачи.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект государственного задания № 0723-2020-0036).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schneider J., Nunes J.A. Characterization of plastic flow and resulting microtextures in a friction stir weld // *Metallurgical and materials transactions B*. 2004. V. 35. P. 777–783.
2. Seidel T., Reynolds A. Visualization of the material flow in aa2195 friction stir welds using a marker insert technique // *Metallurgical and materials transactions*. 2001. V. 32A. P. 2879–2884.
3. Wright T.W., Ockendon H. A scaling law for the effect of inertia on the formation of adiabatic shear bands // *International Journal of Plasticity*. 1996. V. 12. P. 927–934.
4. Molinari A. Collective behaviour and spacing of adiabatic shear bands // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1997. V. 45. P. 1551–1575.
5. Batra R.C., Liu D. The formation of multiple adiabatic shear bands // *Journal Applied Mechanics*. 1989. V. 56. P. 527.
6. Walter J.W. Numerical experiments on adiabatic shear band formation in one dimension // *International Journal of Plasticity*. 1992. V. 8. P. 657–693.
7. Nesterenko V.F., Meyers M.A., Wright T.W. Self-organization in the initiation of adiabatic shear bands // *Acta Materialia*. 1998. V. 46. P. 327–340.
8. Kudryashov N.A., Ryabov P.N., Zakharchenko A.S. Self-organization of adiabatic shear bands in OFHC copper and HY-100 steel // *Journal Mechanics and Physics of Solids*. 2015. V. 76. P. 180–192.
9. Kudryashov N.A., Muratov R.V., Ryabov P.N. The collective behavior of shear strain localization in dipolar materials // *Applied Mathematics and Computation*. 2018. V. 338. P. 164–174.
10. Dobrev V.A., Kolev T.V., Rieben R.N. High order curvilinear finite elements for elastic-plastic lagrangian dynamics // *Journal of Computational Physics*. 2014. V. 257. P. 1062–1080.
11. Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Y. Mathematical aspects of numerical solution of hyperbolic systems. Chapman and Hall/CRC, 2001, 560 p.
12. Zhou F., Wright T.W., Ramesh K.T. The formation of multiple adiabatic shear bands // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. V. 54. P. 1376–1400.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 6, pp. 543–553

Finite-Volume Method for Numerical Simulation of Plastic Strain Localization Processes on Two-Dimensional Grids

N. A. Kudryashov^a, R. V. Muratov^a, and P. N. Ryabov^{a, #}

^a National Research Nuclear University MEPHI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: pnryabov@mephi.ru

Received December 1, 2020; revised December 15, 2020; accepted December 22, 2020

Abstract—An efficient finite-volumetric scheme has been developed to calculate the processes of formation of adiabatic shear bands. The formation of adiabatic shear bands occurs at high-rate deformations of elastic—

plastic materials. Numerical simulation of such processes using Lagrangian methods is associated with a number of problems, the main of which is a strong distortion of the grid when simulating high deformations. Large mesh distortions are decrease accuracy of finite element methods. To keep accuracy it is necessary to make operations, such as re-meshing and re-interpolation of data, which are expensive in terms of performance. To avoid this problem we use Euler's description of motion of an elastic-plastic material. A modification of the well-known hypoelastic Wilkins model has been considered. In this article, we propose a numerical method for modeling high-speed shear deformations on two-dimensional grids. The method is based on a finite-volume, while the Courant–Isaacson–Rees method is used to approximate the solution of the Riemann problem. Then, this method is tested on several test problems suggested by other authors.

Keywords: adiabatic shear bands, strain localization, plasticity

DOI: 10.1134/S2304487X20060061

REFERENCES

1. Schneider J., Nunes J.A. Characterization of plastic flow and resulting microtextures in a friction stir weld. *Metallurgical and materials transactions B*. 2004. V. 35. P. 777–783.
2. Seidel T., Reynolds A. Visualization of the material flow in aa2195 friction stir welds using a marker insert technique. *Metallurgical and materials transactions*. 2001. V. 32A. P. 2879–2884.
3. Wright T.W., Ockendon H. A scaling law for the effect of inertia on the formation of adiabatic shear bands. *International Journal of Plasticity*. 1996. V. 12. P. 927–934.
4. Molinari A. Collective behaviour and spacing of adiabatic shear bands. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1997. V. 45. P. 1551–1575.
5. Batra R.C., Liu D. The formation of multiple adiabatic shear bands. *Journal of the Applied Mechanics*. 1989. V. 56. P. 527.
6. Walter J.W. Numerical experiments on adiabatic shear band formation in one dimension. *International Journal of Plasticity*. 1992. V. 8. P. 657–693.
7. Nesterenko V.F., Meyers M.A., Wright T.W. Self-organization in the initiation of adiabatic shear bands. *Acta Materialia*. 1998. V. 46. P. 327–340.
8. Kudryashov N.A., Ryabov P.N., Zakharchenko A.S. Self-organization of adiabatic shear bands in ofhc copper and hy-100 steel. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2015. V. 76. P. 180–192.
9. Kudryashov N.A., Muratov R.V., Ryabov P.N. The collective behavior of shear strain localization in dipolar materials. *Applied Mathematics and Computation*. 2018. V. 338. P. 164–174.
10. Dobrev V.A., Kolev T.V., Rieben R.N. High order curvilinear finite elements for elastic-plastic lagrangian dynamics. *Journal of Computational Physics*. 2014. V. 257. P. 1062–1080.
11. Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Y. Mathematical aspects of numerical solution of hyperbolic systems. Chapman and Hall/CRC, 2001, 560 p.
12. Zhou F., Wright T.W., Ramesh K.T. The formation of multiple adiabatic shear bands. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. V. 54. P. 1376–1400.