

О НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЛАЗМОСТАТИКИ

© 2021 г. О. Н. Ульянов^{1,*}, Л. И. Рубина^{1,**}

¹ Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, 620990, Россия

*e-mail: secretary@imm.uran.ru

**e-mail: rli@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 30.12.2020 г.

После доработки 23.01.2021 г.

Принята к публикации 26.01.2021 г.

Рассматривается система уравнений МГД-равновесия. Реализуемые авторами подходы к решению данной системы приводят к переопределенной системе нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Для решения переопределенной системы используются аналитические подходы, в основе которых лежит редукция систем уравнений в частных производных к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с последующим решением таких систем. При таких редукциях в качестве независимой переменной в системе ОДУ могут выбираться различные величины. Излагается алгоритм сведения полученной переопределенной системы уравнений к системам ОДУ, в которых независимая переменная ψ такова, что $\psi(x, y, z) = \text{const}$ есть поверхность уровня решений системы уравнений МГД-равновесия. Показано, что выбрать такую независимую переменную можно не единственным образом. Найдены точные решения исходной системы уравнений в случаях, если $\psi = x/(1 - my - nz)$ ($m = \text{const}$, $n = \text{const}$) и $\psi = x + my + nz + l$ ($m = \text{const}$, $n = \text{const}$, $l = \text{const}$). Полученные точные решения зависят от произвольных постоянных. Показано, что в случае $\psi = x + my + nz + l$ ($m = \text{const}$, $n = \text{const}$, $l = \text{const}$) найденное решение можно использовать для построения магнитного поля заданного направления. Выписано одно частное решение системы уравнений МГД-равновесия для безвихревого соленоидального магнитного поля. Отмечается, что указанные точные решения можно использовать в качестве тестов при численных расчетах.

Ключевые слова: система уравнений МГД-равновесия, нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными, точные решения

DOI: 10.1134/S2304487X20060103

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается одна из математических моделей плазмостатики [1, 2]. Исследования, связанные с изучением плазмы, ведутся достаточно давно [3]. Эти исследования находят все более широкое применение (см., например, [4–8]). Соответствующие уравнения в основном решаются численными методами (см. например, [9]), развиваются также аналитические подходы (см. например, [10]).

В данной работе проводится аналитическое рассмотрение одного варианта системы уравнений магнитной гидродинамики. Редукция системы МГД-плазмостатики [1] (баланс сил давления и силы Ампера [2])

методом, развиваемым авторами для систем уравнений в частных производных [11], сводит исходную систему к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (системам ОДУ), для которых выписываются решения.

Здесь $\mathbf{B}(x, y, z) = \{a, b, c\}$, – вектор напряженности магнитного поля, $\{x, y, z\}$ – пространственные переменные, p – давление. $\mathbf{J} = \{j_1, j_2, j_3\}$ – вектор плотности электрического тока, $\mathbf{J} = \text{rot} \mathbf{B}$. Возможные конфигурации плазмы, магнитного поля и электрического тока полностью характеризуются распределением в пространстве этих трех функций [1].

В разд. 1 система (0.1) сведена к системам ОДУ, для которых выписаны некоторые точные решения. В разделе 2 обсуждается вопрос об использовании частного точного решения МГД-плазмостатики для получения магнитного поля задан-

$$\text{grad} p = \frac{1}{4\pi} [\text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}] = 0, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (0.1)$$

ного направления. В разделе 3 рассматривается случай соленоидального безвихревого магнитного поля и выписывается частное решение системы (0.1) для такого поля.

1. СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ (0.1) К СИСТЕМАМ ОДУ

Перепишем систему уравнений (0.1) в виде

$$\begin{aligned}(a_z - c_x)c - (b_x - a_y)b &= 4\pi p_x, \\ (b_x - a_y)a - (c_y - b_z)c &= 4\pi p_y, \\ (c_y - b_z)b - (a_z - c_x)a &= 4\pi p_z, \quad a_x + b_y + c_z = 0.\end{aligned}\quad (1.1)$$

Здесь и далее нижние индексы обозначают дифференцирование по соответствующим независимым переменным. Потребовав равенства смешанных производных $p_{xy} = p_{yx}$, $p_{xz} = p_{zx}$, $p_{yz} = p_{zy}$, из (1.1) получаем систему

$$\begin{aligned}(a_{yz}c + a_zc_y) - (b_{xy} - a_{yy})b + a_yb_y - \\ - (b_{xx} - a_{yx})a - (b_x - a_y)a_x - b_{zx}c - b_zc_x = 0, \\ (a_{zz} - c_{xz})c + a_zc_z + a_{yz}b + a_yb_z - \\ - c_{xy}b - c_yb_x + (a_{xz} - c_{xx})a + (a_z - c_x)a_x = 0, \\ b_{xz}a + b_xa_z - (c_{yz} - b_{zz})c - (c_y - b_z)c_z - \\ - (c_{yy} - b_{zy})b - (c_y - b_z)b_y - c_{xy}a - c_xa_y = 0.\end{aligned}\quad (1.2)$$

Полагаем, что $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\psi)$, $p = p(\psi)$, где $\psi = \psi(x, y, z)$ — поверхность уровня данных функций. Тогда

$$\begin{aligned}a_x &= a'\psi_x, \quad a_y = a'\psi_y, \\ a_z &= a'\psi_z, \quad a_{yz} = a''\psi_y\psi_z + a'\psi_{yz}, \\ a_{xy} &= a''\psi_y\psi_x + a'\psi_{yx}, \quad a_{yy} = a''\psi_y^2 + a'\psi_{yy}, \\ a_{zz} &= a''\psi_z^2 + a'\psi_{zz}, \quad a_{xz} = a''\psi_z\psi_x + a'\psi_{zx}, \\ b_x &= b'\psi_x, \quad b_y = b'\psi_y, \quad b_z = b'\psi_z, \\ b_{yz} &= b''\psi_y\psi_z + b'\psi_{yz}, \\ b_{xy} &= b''\psi_y\psi_x + b'\psi_{yx}, \quad b_{xx} = b''\psi_x^2 + b'\psi_{xx}, \\ b_{zz} &= b''\psi_z^2 + b'\psi_{zz}, \quad b_{xz} = b''\psi_z\psi_x + b'\psi_{zx}, \\ c_x &= c'\psi_x, \quad c_y = c'\psi_y, \quad c_z = c'\psi_z, \\ c_{yz} &= c''\psi_y\psi_z + c'\psi_{yz}, \\ c_{xy} &= c''\psi_y\psi_x + c'\psi_{yx}, \quad c_{xx} = c''\psi_x^2 + c'\psi_{xx}, \\ c_{yy} &= c''\psi_y^2 + c'\psi_{yy}, \quad c_{xz} = c''\psi_z\psi_x + c'\psi_{zx}.\end{aligned}$$

Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по ψ .

Подставив эти выражения в (1.2), получаем

$$\begin{aligned}(a''\psi_z\psi_y + a'\psi_{zy})c + a'c'\psi_y\psi_z - \\ - (b''\psi_x\psi_y + b'\psi_{xy})b + (a''\psi_y^2 + a'\psi_{yy})b + \\ + a'b'\psi_y^2 - (b''\psi_x^2 + b'\psi_{xx})a - (b')^2\psi_x\psi_y + \\ + (a''\psi_x\psi_y + a'\psi_{xy})a - b'a'\psi_x^2 + (a')^2\psi_x\psi_y - \\ - (b''\psi_x\psi_z + b'\psi_{xz})c - b'c'\psi_x\psi_z = 0, \\ (a''\psi_z^2 + a'\psi_{zz})c - (c''\psi_z\psi_x + c'\psi_{zx})c + \\ + (a''\psi_z\psi_y + a'\psi_{zy})b - (c''\psi_x\psi_y + c'\psi_{xy})b + \\ + (a''\psi_z\psi_x + a'\psi_{zx})a - (c''\psi_x^2 + c'\psi_{xx})a + \\ + a'c'\psi_z^2 + a'b'\psi_y\psi_z - b'c'\psi_x\psi_y - \\ - (c')^2\psi_x\psi_z + (a')^2\psi_x\psi_z - c'a'\psi_x^2 = 0, \\ (b''\psi_x\psi_z + b'\psi_{xz})a - (c''\psi_z\psi_y + c'\psi_{zy})c - \\ - (b''\psi_z^2 + b'\psi_{zz})c - (c''\psi_y^2 + c'\psi_{yy})b + \\ + (b''\psi_z\psi_y + b'\psi_{zy})b - (c''\psi_x\psi_y + c'\psi_{xy})a + \\ + b'a'\psi_x\psi_z + b'c'\psi_z^2 - b'c'\psi_y^2 + \\ + (b')^2\psi_y\psi_z - (c')^2\psi_y\psi_z - a'c'\psi_x\psi_y = 0.\end{aligned}\quad (1.3)$$

Перепишем систему (1.3), введя пока такие произвольные функции: $f(\psi)$, $g(\psi)$, $f_i(\psi)$, ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$)

$$\begin{aligned}(a''c + a'c')g(\psi)f(\psi) + [a''a - b''b + (a')^2 - \\ - (b')^2]f(\psi) + (a''b + a'b')f^2(\psi) - \\ - (b''a + a'b') - (b''c + b'c')g(\psi) + a'cf_1(\psi) - \\ - b'bf_2(\psi) + a'bf_3(\psi) - b'af_4(\psi) + \\ + a'af_2(\psi) - b'cf_5(\psi) = 0, \\ (a''c + a'c')g^2(\psi) + [a''a - c''c + (a')^2 - (b')^2] \times \\ \times g(\psi) + (a''b + a'b')f(\psi)g(\psi) - \\ - (c''b + c'b')f(\psi) - (c''a + c'a') + a'cf_6(\psi) - \\ - c'cf_5(\psi) + a'bf_1(\psi) - c'bf_2(\psi) + \\ + a'af_5(\psi) - c'af_4(\psi) = 0, \\ (b''a + a'b')g(\psi) + [-c''c - b''b + (b')^2 - (c')^2] \times \\ \times f(\psi)g(\psi) + (b''c + c'b')g^2(\psi) - \\ - (c''b + c'b')f^2(\psi) - (c''a + a'c')f(\psi) + \\ + a'af_5(\psi) + c'cf_1(\psi) + b'cf_6(\psi) + \\ + c'bf_3(\psi) + b'bf_1(\psi) - c'af_2(\psi) = 0.\end{aligned}\quad (1.4)$$

$$\begin{aligned}f(\psi) = \frac{\psi_y}{\psi_x}, \quad g(\psi) = \frac{\psi_z}{\psi_x}, \quad f_1(\psi) = \frac{\psi_{zy}}{\psi_x^2}, \\ f_2(\psi) = \frac{\psi_{xy}}{\psi_x^2}, \quad f_3(\psi) = \frac{\psi_{yy}}{\psi_x^2}, \quad f_4(\psi) = \frac{\psi_{xx}}{\psi_x^2}, \\ f_5(\psi) = \frac{\psi_{zx}}{\psi_x^2}, \quad f_6(\psi) = \frac{\psi_{zz}}{\psi_x^2}, \quad \psi_x \neq 0.\end{aligned}\quad (1.5)$$

Очевидно, (1.5) — переопределенная система уравнений в частных производных с неизвестными

ми функциями $\psi(x, y, z)$, $f(\psi)$, $g(\psi)$, $f_i(\psi)$, ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Получим условия, при которых эта система совместна.

Утверждение 1. Если $\psi = x/(1 - my - nz)$ или $\psi = x + my + nz + l$ ($m = \text{const}$, $n = \text{const}$, $l = \text{const}$), то система (1.5) совместна.

Доказательство. Первые два уравнения системы (1.5) имеют решение $\psi = x + f(\psi)y + g(\psi)z + l$, $l = \text{const}$, отсюда

$$\psi_x = 1/(1 - f'y - g'z), \quad \psi_{xx}/\psi_x^2 = f_4 = (f''y + g''z), \\ \psi = \psi(y, z), \quad \text{но} \quad \psi_x \neq 0.$$

Соотношение $\psi_{xx}/\psi_x^2 = f_4 = (f''y + g''z)$ выполняется при $\psi_x \neq 0$, если $f_4 = 0$, $f'' = 0$, $g'' = 0$. Следовательно, $\psi_{xx} = 0$. Тогда либо $\psi_x = 1/(1 - my - nz)$, и $\psi(x, y, z) = x/(1 - my - nz)$, если $f' = m = \text{const}$, $g' = n = \text{const}$, либо $\psi_x = 1$, если $f' = m = \text{const}$, $g' = n = \text{const}$ (см. (1.5)) и, как следствие, $\psi(x, y, z) = x + my + nz + l$, $l = \text{const}$. При таких $\psi = \psi(x, y, z)$ функции $f_i(\psi)$, ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) легко определяются. Что и требовалось доказать.

1.1. Случай $\psi = x/(1 - my - nz)$

Если $\psi = x/(1 - my - nz)$, то (см. (1.4), (1.5)) приходим к системе ОДУ

$$\begin{aligned} a' + \psi(b'm + c'n) &= 0, \\ (a''c + a'c')mn\psi^2 + [a''a - b''b + (a')^2 - (b')^2] \times \\ &\times m\psi + (a''b + a'b')m^2\psi^2 - \\ &- (b''a + a'b') - (b''c + b'c')m\psi + 2a'cmn\psi - \\ &- b'bm + 2a'bm^2\psi + a'am - b'cn = 0, \\ (a''c + a'c')n^2\psi^2 + [a''a - c''c + (a')^2 - (b')^2] \times \\ &\times n\psi + (a''b + a'b')mn\psi^2 - \\ &- (c''b + c'b')m\psi - (c''a + c'a') + 2a'cn^2\psi - \\ &- c'cn + 2a'bmn\psi - c'bm + a'an = 0, \\ (b''a + a'b')n\psi + [-c''c - b''b + (b')^2 - (c')^2] \times \\ &\times mn\psi^2 + (b''c + c'b')n^2\psi^2 - \\ &- (c''b + c'b')m^2\psi^2 - (c''a + a'c')m\psi + a'an + \\ &+ 2c'ctm\psi + 2b'cn^2\psi + 2c'bm^2\psi + \\ &+ 2b'bmn\psi - c'am = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Определитель при вторых производных в системе (1.6) равен нулю, поэтому, как следствие, для первых производных должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} a' + \psi(b'm + c'n) &= 0, \\ a &= \frac{-\psi(mc' - nb')(mb + nc)}{c'(m + n^2\psi) + b'mn\psi}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Соотношения (1.7), в частности, выполняются, если $a = 0$, $b = k\psi$, $c = -k\psi$, $k = \text{const}$. Отсюда следует, если $m = n = 1$, то давление $p = M^2 - (1/4\pi)[k^2x^2/(1 - y - z)^2]$, компоненты вектора плотности электрического тока $j_1 = -2k/(1 - y - z)^2$, $j_2 = k/(1 - y - z)$, $j_3 = k/(1 - y - z)$, $M^2 = \text{const}$.

Итак, для системы (1.6) имеем точное решение

$$\begin{aligned} a &= 0, \quad b = k\psi, \quad c = -k\psi, \\ p &= M^2 - \frac{k^2x^2}{4\pi(1 - y - z)^2}, \quad M = \text{const}, \\ j_1 &= -\frac{2k}{(1 - y - z)^2}, \quad j_2 = \frac{k}{(1 - y - z)}, \\ j_3 &= \frac{k}{(1 - y - z)}, \quad k = \text{const}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

1.2. Случай $\psi(x, y, z) = x + my + nz + l$

Заметим, что такой вид независимой переменной для системы (0.1) известен. Если в качестве независимой переменной в системе ОДУ выберем $\psi(x, y, z) = x + my + nz + l$, то система (1.4) приводится к виду

$$\begin{aligned} mn(a'c') + m[(a'a)' - (b'b)'] + \\ + m^2(a'b)' - (b'a)' - n(b'c)' &= 0, \\ n^2(a'c') + n[(a'a)' - (c'c)'] + \\ + mn(a'b)' - m(c'b)' - (c'a)' &= 0, \\ n(b'a)' + mn[(b'b)' - (c'c)'] + \\ + n^2(b'c)' - m^2(c'b)' - m(c'a)' &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Из системы (1.9) имеем

$$\begin{aligned} mn(a'c) + m[(a'a) - (b'b)] + m^2(a'b) - \\ - (b'a) - n(b'c) &= C_1, \quad C_1 = \text{const}, \\ n^2(a'c) + n[(a'a) - (c'c)] + mn(a'b) - \\ - m(c'b) - (c'a) &= C_2, \quad C_2 = \text{const}, \\ n(b'a) + mn[(b'b) - (c'c)] + n^2(b'c) - \\ - m^2(c'b) - m(c'a) &= C_3, \quad C_3 = \text{const}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Перепишем систему (1.10), собрав коэффициенты при производных. Получим

$$\begin{aligned} ma'(a + mb + nc) - b'(a + mb + nc) &= C_1, \\ na'(a + mb + nc) - c'(a + mb + nc) &= C_2, \\ nb'(a + mb + nc) - mc'(a + mb + nc) &= C_3. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Из уравнения $\text{div} \mathbf{B} = 0$ (см. (0.1)) следует что $a'\psi_x + b'\psi_y + c'\psi_z = 0$. Тогда $a + mb + nc = k$, $k = \text{const}$, $k \neq 0$, $C_3 = mC_2 - nC_1$. Учитывая это, перепишем систему (1.11)

$$a' = \frac{mC_1 + nC_2}{k(1 + m^2 + n^2)}, \quad b' = \frac{mnC_2 - C_1(1 + n^2)}{k(1 + m^2 + n^2)},$$

$$c' = \frac{mnC_1 - C_2(1 + m^2)}{k(1 + m^2 + n^2)}.$$

Отсюда $a = \frac{mC_1 + nC_2}{k(1 + m^2 + n^2)}\psi + (k - mk_1 - nk_2),$ (1.12)

$$b = \frac{mnC_2 - C_1(1 + n^2)}{k(1 + m^2 + n^2)}\psi + k_1,$$

$$c = \frac{mnC_1 - C_2(1 + m^2)}{k(1 + m^2 + n^2)}\psi + k_2, \quad k_1 = \text{const},$$

$$k_2 = \text{const}, \quad \psi = x + my + nz + l$$

Подставляем (1.12) в систему (1.1) и учитывая, что $p_x = p'\psi_x$. В результате имеем

$$p' = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{2mnC_1C_2 - C_2^2(1 + m^2) - C_1^2(1 + n^2)}{k^2(1 + m^2 + n^2)}\psi + \right.$$

$$\left. + \frac{C_2k_2 + C_1k_1}{k} \right],$$

$$p = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{2mnC_1C_2 - C_2^2(1 + m^2) - C_1^2(1 + n^2)}{k^2(1 + m^2 + n^2)}\frac{\psi^2}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{C_2k_2 + C_1k_1}{k}\psi + C \right], \quad (1.13)$$

$$C = \text{const}, \quad \psi = x + my + nz + l.$$

Заметим, что если зададим $k_1 = k_2 = 0$, то на плоскости $\psi = 0$ давление достигает максимального значения

$$p' = 0, \quad p'' = -\frac{C_1^2 + C_2^2 + (mC_2 + nC_1)^2}{k^2(1 + m^2 + n^2)} < 0,$$

при этом $p = C$. Когда $C_1 = C_2 = 0$ (безвихревое магнитное поле), то давление постоянно ($p = C$).

Выписываем компоненты вектора $\mathbf{J}$ — плотности электрического тока [1]

$$j_1 = \frac{nC_1 - mC_2}{k}, \quad j_2 = \frac{C_2}{k}, \quad j_3 = -\frac{C_1}{k}.$$

2. О ВЫБОРЕ НАПРАВЛЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Полученные компоненты вектора $\mathbf{B}$ зависят от произвольных постоянных (см. (1.12)), эти посто-

янные $\{C_1, C_2, m, n, l, k, k_1, k_2\}$ можно выбирать так, чтобы вектор $\mathbf{B}$ имел в каждой точке пространства нужное направление. Если задана некоторая поверхность, то этот вектор можно направить по касательной к ней в каждой точке, обеспечив нужное направление соответствующим подбором произвольных постоянных. Покажем это.

Пусть задана поверхность $z + \alpha(x, y) = 0$. В точке $x = x_0, y = y_0, z_0 = -\alpha(x_0, y_0)$ нормаль к заданной поверхности имеет компоненты $\{\alpha_x(x_0, y_0), \alpha_y(x_0, y_0), 1\}$. Вектор $\mathbf{B}$ направлен по касательной к заданной поверхности в этой точке, если

$$a(x_0, y_0, z_0)\alpha_x(x_0, y_0) + b(x_0, y_0, z_0)\alpha_y(x_0, y_0) + c(x_0, y_0, z_0) = 0. \quad (2.1)$$

Условие (2.1) выполнено, если

$$\alpha_x(x_0, y_0) \left[\frac{mC_1 + nC_2}{k(1 + m^2 + n^2)}\psi + (k - mk_1 - nk_2) \right] +$$

$$+ \alpha_y(x_0, y_0) \left[\frac{mnC_2 - C_1(1 + n^2)}{k(1 + m^2 + n^2)}\psi + k_1 \right] +$$

$$+ \left[\frac{mnC_1 - C_2(1 + m^2)}{k(1 + m^2 + n^2)}\psi + k_2 \right] = 0,$$

$$\psi = x_0 + my_0 - n\alpha(x_0, y_0) + l.$$

Отсюда получаем

$$k_2(x_0, y_0) = \frac{\alpha_x(x_0, y_0)}{n\alpha_x(x_0, y_0) - 1} \times$$

$$\times \left[\frac{mC_1 + nC_2}{k(1 + m^2 + n^2)}\psi + (k - mk_1) \right] +$$

$$+ \frac{\alpha_y(x_0, y_0)}{n\alpha_x(x_0, y_0) - 1} \left[\frac{mnC_2 - C_1(1 + n^2)}{k(1 + m^2 + n^2)}\psi + k_1 \right] +$$

$$+ \frac{mnC_1 - C_2(1 + m^2)}{k(1 + m^2 + n^2)[n\alpha_x(x_0, y_0) - 1]}\psi, \quad (2.3)$$

где $\psi = x_0 + my_0 - n\alpha(x_0, y_0) + l, [n\alpha_x(x_0, y_0) - 1] \neq 0$.

Если $k_1 = k_2 = 0, \alpha_x(x_0, y_0) \neq 0$, то в точках рассматриваемой поверхности вместо (2.3) выбираем

$$k(x_0, y_0) = \pm \sqrt{\frac{C_1[m\alpha_x - \alpha_y(1 + n^2) + mn] + C_2[n\alpha_x + mn\alpha_y - (1 + m^2)]}{\alpha_x(1 + m^2 + n^2)}}. \quad (2.4)$$

Условие (2.3) или (2.4) обеспечивают положение вектора $\mathbf{B}$ в касательной плоскости к рас-

сматриваемой поверхности $z + \alpha(x, y) = 0$ в фиксированной точке $\{x_0, y_0, z_0\}$. Чтобы обеспечить

заданное направление этого вектора на касательной плоскости, на поверхности $z + \alpha(x, y) = 0$ нужно задать линию $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z(s) = -\alpha(x(s), y(s))$ и направить вектор $\mathbf{B}$ по касательной к ней.

Чтобы вектор $\mathbf{B}$ касался заданной линии, должны выполняться условия $a = x_s$, $b = y_s$, $c = z_s$ в каждой фиксированной точке на заданной линии $x(s_0) = x_0$, $y(s_0) = y_0$, $z(s_0) = z_0$. Покажем, что соответствующим выбором произвольных постоянных выполнение этих условий можно обеспечить. Действительно

$$\begin{aligned} a &= \frac{mC_1 + nC_2}{k(1 + m^2 + n^2)}\psi + (k - mk_1 - nk_2) = x_s, \\ b &= \frac{mnC_2 - C_1(1 + n^2)}{k(1 + m^2 + n^2)}\psi + k_1 = y_s, \\ c &= \frac{mnC_1 - C_2(1 + m^2)}{k(1 + m^2 + n^2)}\psi + k_2 = z_s, \\ k_1 &= \text{const}, \quad k_2 = \text{const}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\psi = x_0 + my_0 + nz_0 + l$. Задаем $m = n = k_1 = k_2 = 0$, тогда $\psi = x_0 + l$. Полагая $C_2 = -kz_s/(x_0 + l)$, $C_1 = -ky_s/(x_0 + l)$, $k = x_s$, обеспечиваем выполнение требуемых условий (2.5).

Например, пусть $z = \pm\sqrt{R^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - r)^2}$ (тор). Пусть на торе задана линия $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$

$$\begin{aligned} z &= \pm s, \quad x = \left(r \pm \sqrt{R^2 - s^2}\right) \cos \varphi, \\ y &= \left(r \pm \sqrt{R^2 - s^2}\right) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Тогда в (2.5) подставляем

$$x_s = \mp \frac{s \cos \varphi}{\sqrt{R^2 - s^2}}, \quad y_s = \mp \frac{s \sin \varphi}{\sqrt{R^2 - s^2}}, \quad z_s = \pm 1$$

и получаем условия касания вектором $\mathbf{B}$ заданной линии.

Если требуется направить магнитное поле в фиксированной точке $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ перпендикулярно заданной поверхности $\alpha(x, y, z) = 0$, то потребуем, чтобы

$$\begin{aligned} a &= \frac{mC_1 + nC_2}{k(1 + m^2 + n^2)}\psi + \\ &+ (k - mk_1 - nk_2) = \alpha_x(x_0, y_0, z_0), \\ b &= \frac{mnC_2 - C_1(1 + n^2)}{k(1 + m^2 + n^2)}\psi + k_1 = \alpha_y(x_0, y_0, z_0), \\ c &= \frac{mnC_1 - C_2(1 + m^2)}{k(1 + m^2 + n^2)}\psi + k_2 = \\ &= \alpha_z(x_0, y_0, z_0), \quad \psi = x_0 + my_0 + nz_0 + l. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Условие (2.6) будет выполнено, если

$$\begin{aligned} k_1 &= \alpha_y(x_0, y_0, z_0) - \frac{mnC_2 - C_1(1 + n^2)}{k(1 + m^2 + n^2)}\psi, \\ k_2 &= \alpha_z(x_0, y_0, z_0) - \frac{mnC_1 - C_2(1 + m^2)}{k(1 + m^2 + n^2)}\psi, \\ k &= \alpha_x(x_0, y_0, z_0) + mk_1 + nk_2 - \\ &- \frac{mC_1 + nC_2}{k(1 + m^2 + n^2)}\psi, \quad \psi = x_0 + my_0 + nz_0 + l. \end{aligned}$$

3. О БЕЗВИХРЕВОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ И РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ (0.1)

Если в решении (1.12) $C_1 = C_2 = 0$, то $\text{rot} \mathbf{B} = 0$ (безвихревое магнитное поле). Если $\mathbf{B} = [\alpha(x, y, z) \times \beta(x, y, z)]$, то при любых заданных $\alpha = \alpha(x, y, z)$, $\beta = \beta(x, y, z)$ имеем $\text{div} \mathbf{B} = 0$. Если выполняются оба перечисленные условия для вектора $\mathbf{B}$, то такой вектор $\mathbf{B}$ удовлетворяет системе (0.1) и после подстановки в (0.1) дает $p = C$, где $C = \text{const}$ — сколь угодно большое. Необходимое и достаточное условие существования безвихревого магнитного поля [12] — $a = Q_x$, $b = Q_y$, $c = Q_z$, $Q = Q(x, y, z)$. Следовательно, для такого решения системы (0.1) должны выполняться зависимости $\text{grad} Q = [\alpha(x, y, z) \times \beta(x, y, z)]$.

$$\text{grad} Q = [\alpha(x, y, z) \times \beta(x, y, z)],$$

$$\text{если} \quad Q_x = \alpha_y \beta_z - \alpha_z \beta_y,$$

$$Q_y = \alpha_z \beta_x - \alpha_x \beta_z, \quad Q_z = \alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x.$$

Пусть, например, $\alpha(x, y, z) = mx^2 + ny^2 + kz^2 - 1$, $\beta(x, y, z) = gx^2 + hy^2 + lz^2 - 1$, $m = \text{const}$, $n = \text{const}$, $k = \text{const}$, $g = \text{const}$, $h = \text{const}$, $l = \text{const}$, тогда $Q_x = 2yz(nl - kh)$, $Q_y = 2xz(kg - ml)$, $Q_z = 2xy(mh - ng)$.

$Q_{xy} = Q_{yx}$, $Q_{xz} = Q_{zx}$, $Q_{yz} = Q_{zy}$, если $(nl - kh) = (kg - ml)$, $(nl - kh) = (mh - ng)$. Эти условия выполняются, когда $k = -(m + n)$, $l = -(g + h)$. Тогда при $mh - gn \neq 0$ и $m > 0$, $n > 0$, $g > 0$, $h > 0$, поверхности $\alpha(x, y, z) = 0$ и $\beta(x, y, z) = 0$ — однополостные гиперболоиды. По линии их пересечения проходит вектор $\mathbf{B}$ безвихревого соленоидального поля ($\text{rot} \mathbf{B} = 0$, $\text{div} \mathbf{B} = 0$) с компонентами

$$\begin{aligned} a &= 2yz(nl - kh), \quad b = 2xz(kg - ml), \\ c &= 2xy(mh - ng), \quad (\text{решение системы (0.1)}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задачи плазмостатики могут возникать как составная часть программы управления термоядер-

ным синтезом [13]. В настоящей работе рассматривается одна из систем уравнений плазмостатики (см. (0.1)). Для данной системы выписаны две системы ОДУ (см. (1.6), (1.9)). Получены точные решения системы (см. (0.1)), зависящие от произвольных постоянных (см. (1.8), (1.12), (1.13)). Показано, как полученное частное решение можно использовать для построения магнитного поля заданного направления. Отдельно рассмотрен случай безвихревого соленоидального магнитного поля. Выписаны компоненты вектора магнитной напряженности (частное решение) для такого поля (см. (3.1)). Точные решения можно использовать в качестве тестов при численных расчетах. Решая систему ОДУ (1.6), можно получать и другие решения исходной системы уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брушлинский К.В. Математические модели плазмы в проектах Морозова // Физика плазмы. 2019. Т. 45. № 1. С. 37–50.
2. Сорокина Е.А., Ильгисонис В.И. Уравнения равновесия плазмы в магнитном поле с трехмерными магнитными поверхностями // Физика плазмы. 2019. Т. 45. № 17. С. 1065–1071.
3. Tonks L., Langmuir I. Oscillations in ionized gases // Phys. Rev. 1929. V. 33. № 2. P. 195–210.
4. Скоруход Е.П., Киселев А.Г. Радиационная плазмостатика, неравновесность двухтемпературной плазмы, обусловленная диссоциативной рекомбинацией // Матем. моделирование. 2001. Т. 13. № 7. С. 17–20.
5. Калиткин Н.Н., Костомаров Д.П. Математическое моделирование плазмы // Матем. моделирование. 2006. Т. 18. № 11. С. 67–94.
6. Иванов А.А., Мартынов А.А., Медведев С.Ю., Пошехонов Ю.Ю., Коновалов С.В., Хайрутдинов Р.Р. Вычислительный код SPIDER. Математическое моделирование равновесия и эволюции плазмы токамака // ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез. 2014. Т. 37. Вып. 1. С. 80–96.
7. Брушлинский К.В., Степин Е.В. Математические модели равновесных конфигураций плазмы, окружающей проводники с током // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 7. С. 901–909.
8. Марусов Н.А., Сорокина Е.А., Ильгисонис В.И. О дрейфовом движении заряженных частиц в неоднородных магнитном и сильном электрическом полях // Физика плазмы. 2020. Т. 46. № 7. С. 658–666.
9. Брушлинский К.В., Гольдич А.С. Краевые задачи вычислительной плазмостатики // Вестник НИЯУ МИФИ. 2013. Т. 2. № 3. С. 292–304.
10. Перепелкин Е.Е., Ренникова Н.П., Иноземцева Н.Г. Точное решение задачи пространственного заряда для движения сферически симметричного пучка в однородном электрическом поле // Матем. заметки. 2015. Т. 98. Вып. 3. С. 386–392.
11. Рубина Л.И., Ульянов О.Н. Об одном методе решения систем нелинейных уравнений в частных производных // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 238–246.
12. Эйхенвальд А.А. Теоретическая физика. Москва; Ленинград: Государственное издательство, 1926. Ч. 1. Теория поля. 271 с.
13. Памяти Виталия Дмитриевича Шафранова // Физика плазмы. Т. 40. № 9. С. 871–872.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2021, vol. 10, no. 1, pp. 12–18

On Some Solutions of Plasmastatic Equations

O. N. Ul'yanov^{a, #} and L. I. Rubina^{a, ##}^a Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch, Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia[#]e-mail: secretary@imm.uran.ru^{##}e-mail: rli@imm.uran.ru

Received December 30, 2020; revised January 23, 2021; accepted January 26, 2021

Abstract—A system of MHD equilibrium equations is considered. Approaches used to solve this system lead to an overdetermined system of nonlinear partial differential equations. The overdetermined system is solved with analytical approaches based on the reduction of systems of partial differential equations to systems of ordinary differential equations with the subsequent solution of such systems. With such reductions, various quantities can be selected as an independent variable in the system of ordinary differential equations. An algorithm is described to reduce the overdetermined system of equations to systems of ordinary differential equations in which the independent variable ψ is such that $\psi(x, y, z) = \text{const}$ is the level surface for solutions of the system of MHD equilibrium equations. It is shown that there is more than one way to choose such an independent variable. Exact solutions of the original system are obtained in the cases $\psi = x/(1 - my - nz)$ ($m = \text{const}, n = \text{const}$) and $\psi = x + my + nz + l$ ($m = \text{const}, n = \text{const}, l = \text{const}$). The exact solutions obtained depend on arbitrary constants. It is shown that the solution in the $\psi = x + my + nz + l$ ($m = \text{const}, n = \text{const}, l = \text{const}$) can be used to construct a magnetic field of a given direction. One particular solution of the system

of MHD equilibrium equations is presented for a vortex-free solenoidal magnetic field. It is noted that these exact solutions can be used as tests in numerical calculations.

Keywords: MHD-equilibrium equations, nonlinear partial differential equations, exact solutions

DOI: 10.1134/S2304487X20060103

REFERENCES

1. Brushlinskii K.V. Mathematical models of plasma in Morozov's projects. *Plasma Phys. Rep.*, 2019, vol. 45, no. 1, pp. 33–45.
2. Sorokina E.A., Ilgisonis V.I. Equations of plasma equilibrium in a magnetic field with three-dimensional magnetic surfaces. *Plasma Phys. Rep.*, 2019, vol. 45, no. 12, pp. 1093–1098.
3. Tonks L., Langmuir I. Oscillations in ionized gases. *Phys. Rev.*, 1929, vol. 33, no. 2, pp. 195–210.
4. Skorokhod E.P., Kiselev A.G. Radiatsionnaya plazmostatika. Neravnovesnost' dvukhtemperaturnoy plazmy, obuslovlennaya dissosiativnoy rekombinatsiyey [Radiative plasmatronics. Non-equilibrium of two-temperature plasma caused by dissociative recombination]. *Mat. Model.*, 2001, vol. 13, no. 7, pp. 17–20. (in Russian)
5. Kalitkin N.N., Kostomarov D.P. Matematicheskiye modeli fiziki plazmy [Mathematical models of plasma physics (a survey)]. *Mat. Model.*, 2006, vol. 18, no. 11, pp. 67–94. (in Russian)
6. Ivanov A.A., Martynov A.A., Medvedev S.Yu., Poshkhonov Yu.Yu., Konovalov S.V., Khayrutdinov R.R. Vychislitel'nyy kod SPIDER. Matematicheskoye modelirovaniye ravnovesiya i evolyutsii plazmy tokamaka [The SPIDER code. Mathematical modeling of tokamak plasma equilibrium and evolution]. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki, seriya Termoyadernyy sintez*, 2014, vol. 37, no. 1, pp. 80–96. (in Russian)
7. Brushlinskii K.V., Stepin E.V. Mathematical models of equilibrium configurations of plasma surrounding current-carrying conductors. *Diff. equat.*, 2020, vol. 56, no. 7, pp. 872–881.
8. Marusov N.A., Sorokina E.A., Ilgisonis V.I. Drift motion of charged particles in inhomogeneous magnetic and strong electric fields. *Plasma Phys. Rep.*, 2020, vol. 46, no. 7, pp. 724–731.
9. Brushlinskii K.V., Gol'dich, A.S. Krayevyye zadachi vychislitel'noy plazmostatiki [Boundary-value problems of computational plasmastatics]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2013, vol. 2, no. 3, pp. 292–304. (in Russian)
10. Perepelkin E.E., Repnikova N.P., Inozemtseva N.G. An exact solution of the space charge problem for the motion of a spherically symmetric beam in a homogeneous electric field. *Math. Notes*, 2015, vol. 98, no. 3, pp. 448–453.
11. Rubina L.I., Ulyanov O.N. One method for solving systems of nonlinear partial differential equations. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl. 1)*, 2015, vol. 288, pp. 180–188.
12. Jejhenvald A.A. *Teoreticheskaya fizika, Chast 1. Teoriya polya* [Theoretical physics. Pt. 1, Field theory]. 1926, 272 p.
13. In memory of Vitaly Dmitrievich Shafranov (December 1, 1929–June 9, 2014). *Plasma Phys. Rep.*, 2014, vol. 40, no. 9, pp. 767–768.