

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ ОБОБЩЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

© 2021 г. Е. В. Антонова^{1,*}, Н. А. Кудряшов^{1,**}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия

*e-mail: EVAntonova@mephi.ru

**e-mail: NAKudryashov@mephi.ru

Поступила в редакцию 19.02.2021 г.

После доработки 19.02.2021 г.

Принята к публикации 09.03.2021 г.

Рассматривается обобщенное нелинейное уравнение Шрёдингера с учетом производной третьего порядка, которое может использоваться при описании распространения импульсов в оптическом волокне. Задача Коши для этого уравнения не решается методом обратной задачи рассеяния, поэтому решение уравнения ищется в переменных бегущей волны. Принимая во внимание эти переменные, получена система дифференциальных уравнений для мнимой и действительной части. Определены условия существования решения переопределенной системы дифференциальных уравнений. Найдены аналитические решения, выраженные через экспоненциальную функцию и эллиптическую функцию Якоби. Решения обобщенного нелинейного уравнения Шрёдингера являются периодическими и уединенными волнами при определенных ограничениях на коэффициенты. Представлены графики решений.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шрёдингера, точное решение, уединенная волна, периодическая волна, функция Якоби

DOI: 10.1134/S2304487X2101003X

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается обобщенное нелинейное уравнение Шрёдингера с учетом производной третьего порядка. В настоящее время известен ряд дифференциальных уравнений, которые используются при описании распространения импульса в оптическом волокне. Например, хорошо известное нелинейное уравнение Шрёдингера, имеющее вид [2, 3]

$$iq_t + \alpha q_{xx} + b|q|^2 q = 0. \quad (1)$$

Известны также обобщения уравнения Шрёдингера, которые изучались в работах [4–6]. Популярное уравнение Кунду–Экхауза, рассмотренно в работе [5]

$$iq_t + q_{xx} - b|q|^4 q - c(|q|^2)_x q = 0. \quad (2)$$

В работе [6] исследовано решение уравнения в виде

$$iq_t + i\beta q_x + \alpha q_{xx} + (b|q|^{2n} + c|q|^n + g|q|^{-n} + h|q|^{-2n})q = 0 \quad (3)$$

Следующее обобщение нелинейного дифференциального уравнения Шрёдингера второго порядка представлено в работе [4]

$$iq_t + \alpha q_{xx} + a|q|^n + b|q|^{2n} + d(|q|^n)_{xx} q = 0. \quad (4)$$

Вопрос о нахождении решений для ряда других обобщений нелинейного уравнения Шрёдингера рассматривался также в работах (см. [7–16]).

В данной работе рассматривается обобщенное нелинейное уравнение Шрёдингера с производной третьего порядка, имеющее вид

$$q_t + ib_1 q_{xx} + ib_2 q|q|^2 + b_3 q_{xxx} + b_4 (q|q|^2)_x + b_5 q(|q|^2)_x = 0, \quad (5)$$

где $q(x, t)$ — комплексная функция характеризующая огибающую волнового пакета, $(b_n, n = 1–5)$ — параметры уравнения, связанные с групповой скоростью, фазовой самомодуляцией, дисперсией третьего порядка и собственным частотным сдвигом, x — координата, t — время.

Целью данной работы является поиск решений обобщенного нелинейного уравнения Шрёдингера (5) в виде периодических и уединенных волн.

1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ (5)

Уравнение (5) допускает группу преобразований сдвига по x и t . Поэтому ищем решение этого уравнения используя переменные бегущей волны в виде

$$q(x, t) = y(z)e^{i(kx - \omega t)}, \quad (6)$$

где $y(z)$ — функция характеризующая огибающую волнового пакета, $z = x - C_0 t$. Вычислим производные функции $q(x, t)$

$$q_t = -C_0 y_z e^{i(kx - \omega t)} - i\omega y e^{i(kx - \omega t)}, \quad (7)$$

$$q_x = y_z e^{i(kx - \omega t)} + i y e^{i(kx - \omega t)}, \quad (8)$$

$$q_{xx} = y_{zz} e^{i(kx - \omega t)} + 2i k y_z e^{i(kx - \omega t)} - y k^2 e^{i(kx - \omega t)}, \quad (9)$$

$$q_{xxx} = y_{zzz} e^{i(kx - \omega t)} + 3i k y_{zz} e^{i(kx - \omega t)} - 3k^2 y_z e^{i(kx - \omega t)} - i k^3 y e^{i(kx - \omega t)}. \quad (10)$$

Подставляя (6)–(10) в уравнение (5), получим систему уравнений для мнимой и действительной части

$$3b_3 k y_{zz} + b_1 y_{zz} + b_4 k y^3 + b_2 y^3 - b_3 k^3 y - b_1 k^2 y - \omega y = 0 \quad (11a)$$

$$b_3 y_{zzz} + 3b_4 y^2 y_z + 2b_5 y^2 y_z - 3b_3 k^2 y_z - 2b_1 k y_z - C_0 y_z = 0. \quad (11b)$$

Второе уравнение системы (11b) после интегрирования по z можно привести к виду

$$b_3 y_{zz} - C_0 y - 2b_1 k y - 3b_3 k^2 y + b_4 y^3 + \frac{2b_5}{3} y^3 - C_1 = 0, \quad (12)$$

где C_1 — константа интегрирования. В системе уравнений (11a) и (12) оба эти уравнения являются уравнениями второго порядка.

Видно, что уравнение (11a) и уравнение (12) имеют похожую структуру при $C_1 = 0$. Система уравнений является переопределенной и следует сделать ее совместной. Это достигается при одинаковых коэффициентах при y^3 и y , если записать систему (11a) и (12) в виде

$$y_{zz} + \frac{b_4 k + b_2}{3b_3 k + b_1} y^3 + \frac{-b_3 k^3 - b_1 k^2 - \omega}{3b_3 k + b_1} y = 0, \quad (13a)$$

$$y_{zz} + \frac{b_4 + \frac{2}{3}b_5}{b_3} y^3 + \frac{-3b_3 k^2 - 2b_1 k - C_0}{b_3} y = 0, \quad (13b)$$

где $b_3 \neq 0$; $b_1 \neq -3b_3 k$. Для того, чтобы уравнения (13a) и (13b) были одинаковыми, необходимо приравнять коэффициенты при y^3 и y .

$$\frac{b_4 k + b_2}{3b_3 k + b_1} = \frac{b_4 + \frac{2}{3}b_5}{b_3}, \quad (14)$$

$$\frac{-b_3 k^3 - b_1 k^2 - \omega}{3b_3 k + b_1} = \frac{-3b_3 k^2 - 2b_1 k - C_0}{b_3}.$$

Откуда находим b_5 и C_0

$$b_5 = -\frac{3(2b_3 b_4 k + b_1 b_4 - b_2 b_3)}{2(3b_3 k + b_1)};$$

$$C_0 = -\frac{8b_3^2 k^3 + 8b_1 b_3 k^2 + 2b_1^2 k - b_3 \omega}{3b_3 k + b_1}. \quad (15)$$

Теперь можем решать любое уравнение (13a) или (13b). Подставляя условия (15) в (13b), получаем уравнение

$$y_{zz} + \frac{b_4 k + b_2}{3b_3 k + b_1} y^3 - \frac{b_3 k^3 + b_1^2 + \omega}{3b_3 k + b_1} y = 0. \quad (16)$$

Умножив уравнение (16) на y_z и интегрируя по z , получим

$$y_z^2 + \frac{b_4 k + b_2}{2(3b_3 k + b_1)} y^4 - \frac{b_3 k^3 + b_1^2 + \omega}{3b_3 k + b_1} y^2 + C_2 = 0, \quad (17)$$

где C_2 — константа интегрирования. Уравнение (17) — эквивалентно уравнению (13a) и позволяет найти решение системы уравнений (11a) и (11b).

2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ УРАВНЕНИЯ (17)

Найдем решение уравнения (17) выраженное через эллиптическую функцию Якоби. Используя обозначения

$$\frac{b_4 k + b_2}{2(3b_3 k + b_1)} = K_1; \quad \frac{b_3 k^3 + b_1^2 + \omega}{3b_3 k + b_1} = K_2, \quad (18)$$

уравнение (17) примет вид

$$y_z^2 + K_1 y^4 - K_2 y^2 + C_2 = 0. \quad (19)$$

Будем искать решение уравнения (19), используя новую переменную

$$y = \sqrt{V(z)}. \quad (20)$$

Учитывая (20), получаем

$$V_z^2 + 4K_1 V^3 - 4K_2 V^2 + 4C_2 V = 0. \quad (21)$$

Запишем уравнение (21) в виде

$$V_z^2 = -4f(V), \quad f(V) = (K_1 V^3 - K_2 V^2 + C_2 V). \quad (22)$$

Функцию $f(V)$ можно представить в виде

$$f(V) = (V - a_1)(V - a_2)(V - a_3), \quad (23)$$

где a_1, a_2, a_3 ($a_1 \geq a_2 \geq a_3$) – действительные корни кубического уравнения

$$K_1 V^3 - K_2 V^2 + C_2 V = 0. \quad (24)$$

Решив кубическое уравнение (24), находим

$$\begin{aligned} V_1 &= 0; \quad V_2 = \frac{K_2 + \sqrt{-4C_2 K_1 + K_2^2}}{2K_1}; \\ V_3 &= \frac{K_2 - \sqrt{-4C_2 K_1 + K_2^2}}{2K_1}, \end{aligned} \quad (25)$$

где $K_1 \neq 0$. Решение уравнения (21) для $V(z)$ представляется в виде [1]

$$V(z) = a_1 - (a_1 - a_2) \operatorname{sn}^2\{2\sqrt{a_1 - a_3}(z - z_0), S^2\}, \quad (26)$$

где $\operatorname{sn}\{x, S^2\}$ – эллиптическая функция Якоби, $S^2 = \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3}$.

Проведем анализ возможных решений с учетом значений коэффициентов K_1, K_2 и C_2 . При этом возможно 8 случаев.

Случай 1. $K_1 > 0, K_2 \geq 0, 0 \leq C_2 \leq \frac{K_2^2}{4K_1}$. Действительные корни кубического уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{K_2 + \sqrt{-4C_2 K_1 + K_2^2}}{2K_1}; \\ a_2 &= \frac{K_2 - \sqrt{-4C_2 K_1 + K_2^2}}{2K_1}; \quad a_3 = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Случай 2. $K_1 > 0, K_2 \geq 0, C_2 < 0$. Действительные корни кубического уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{K_2 + \sqrt{-4C_2 K_1 + K_2^2}}{2K_1}; \quad a_2 = 0; \\ a_3 &= \frac{K_2 - \sqrt{-4C_2 K_1 + K_2^2}}{2K_1}. \end{aligned} \quad (28)$$

Случай 3. $K_1 < 0, K_2 \leq 0, C_2 \geq 0$. Действительные корни кубического уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{K_2 - \sqrt{-4C_2 K_1 + K_2^2}}{2K_1}; \\ a_2 &= \frac{K_2 + \sqrt{-4C_2 K_1 + K_2^2}}{2K_1}; \quad a_3 = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Случай 4. $K_1 < 0, K_2 \leq 0, C_2 \leq \frac{K_2^2}{4K_1}$. Действительные корни кубического уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{K_2 - \sqrt{-4C_2 K_1 + K_2^2}}{2K_1}; \quad a_2 = 0; \\ a_3 &= \frac{K_2 + \sqrt{-4C_2 K_1 + K_2^2}}{2K_1}. \end{aligned} \quad (30)$$

Случай 5. $K_1 > 0, C_2 \leq \frac{K_2^2}{4K_1}, K_2 \leq 0$. Действительные корни кубического уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{K_2 + \sqrt{-4C_2 K_1 + K_2^2}}{2K_1}; \quad a_2 = 0; \\ a_3 &= \frac{K_2 - \sqrt{-4C_2 K_1 + K_2^2}}{2K_1}. \end{aligned} \quad (31)$$

Случай 6. $K_1 < 0, K_2 \geq 0, C_2 \leq \frac{K_2^2}{4K_1}$. Действительные корни кубического уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{K_2 - \sqrt{-4C_2 K_1 + K_2^2}}{2K_1}; \quad a_2 = 0; \\ a_3 &= \frac{K_2 + \sqrt{-4C_2 K_1 + K_2^2}}{2K_1}. \end{aligned} \quad (32)$$

Случай 7. $K_1 < 0, K_2 \geq 0, C_2 \geq 0$. Действительные корни кубического уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} a_1 &= 0; \quad a_2 = \frac{K_2 - \sqrt{-4C_2 K_1 + K_2^2}}{2K_1}; \\ a_3 &= \frac{K_2 + \sqrt{-4C_2 K_1 + K_2^2}}{2K_1}. \end{aligned} \quad (33)$$

Случай 8. $K_1 > 0, C_2 = 0; K_2 = 0$. Действительные корни кубического уравнения имеют вид

$$a_1 = 0; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = 0. \quad (34)$$

Запишем решения уравнения (5) для каждого из выше перечисленных случаев.

Случай 1. Решение запишется формулой

$$V(z) = a_1 - (a_1 - a_2) \operatorname{sn}^2\left\{\frac{1}{2}\sqrt{a_1}(z - z_0), S^2\right\}. \quad (35)$$

Используя тождество $\operatorname{sn}^2 + \operatorname{cn}^2 = 1$, решение уравнения (6) можно представить в виде

$$y(z) = \sqrt{a_2 + (a_1 - a_2) \operatorname{cn}^2\left\{\frac{1}{2}\sqrt{a_1}(z - z_0), S^2\right\}}. \quad (36)$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$q(x, t) = \sqrt{a_2 + (a_1 - a_2) \operatorname{cn}^2\left\{\frac{1}{2}\sqrt{a_1}(z - z_0), S^2\right\}} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (37)$$

В случае, если $a_1 > a_2 = a_3$, а $C_2 = 0$, тогда $a_2 = a_3 = 0$. Используем решение (37) получаем решение $y(z)$ в виде уединенной волны

$$y(z) = \sqrt{a_2 + (a_1 - a_2) \operatorname{ch}^{-2}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{a_1 - a_2}(z - z_0)\right\}}. \quad (38)$$

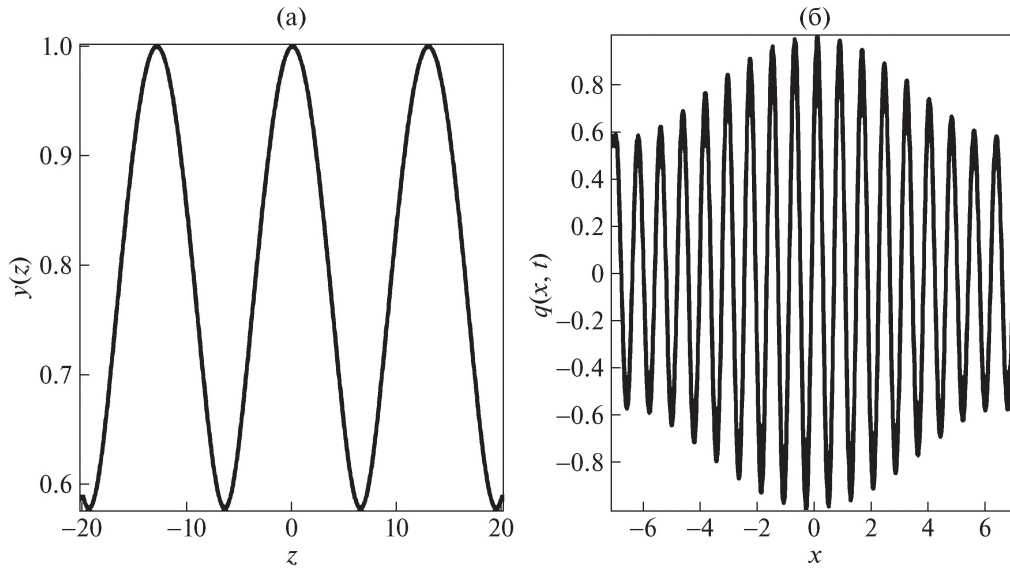


Рис. 1. а) Решение (36) уравнения (6) при $K_1 = 3$, $K_2 = 5$, $C_2 = 2$; б) Решение (37) уравнения (5) при $K_1 = 3$, $K_2 = 5$, $C_2 = 2$, $k = 8$, $\omega = 1$, $t = 1$.

Решение уравнения (5) для $q(x, t)$ в виде уединенной волны запишется формулой

$$q(x, t) = \sqrt{a_1 \operatorname{ch}^{-2} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{a_1} (z - z_0) \right\}} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (39)$$

Случай 2. Решение уравнения (6) выражается формулой

$$y(z) = \sqrt{a_1 \operatorname{cn}^2 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{a_1 - a_3} (z - z_0), S^2 \right\}}. \quad (40)$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$q(x, t) = \sqrt{a_1 \operatorname{cn}^2 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{a_1 - a_3} (z - z_0), S^2 \right\}} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (41)$$

Случай 3. Решение уравнения (6) запишется в виде

$$y(z) = \sqrt{a_2 + (a_1 - a_2) \operatorname{cn}^2 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{a_1} (z - z_0), S^2 \right\}}. \quad (42)$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$q(x, t) = \sqrt{a_2 + (a_1 - a_2) \operatorname{cn}^2 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{a_1} (z - z_0), S^2 \right\}} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (43)$$

Случай 4. Решение уравнения (6) в виде

$$y(z) = \sqrt{a_1 \operatorname{cn}^2 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{a_1 - a_3} (z - z_0), S^2 \right\}}. \quad (44)$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$q(x, t) = \sqrt{a_1 \operatorname{cn}^2 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{a_1 - a_3} (z - z_0), S^2 \right\}} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (45)$$

Случай 5. Решение уравнения (6) запишется в виде

$$y(z) = \sqrt{a_1 \operatorname{sn}^2 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{a_1 - a_3} (z - z_0), S^2 \right\}}. \quad (46)$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$q(x, t) = \sqrt{a_1 \operatorname{sn}^2 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{a_1 - a_3} (z - z_0), S^2 \right\}} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (47)$$

Случай 6. Решение уравнения (6) выражается формулой

$$y(z) = \sqrt{a_1 \operatorname{sn}^2 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{a_1 - a_3} (z - z_0), S^2 \right\}}. \quad (48)$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$q(x, t) = \sqrt{a_1 \operatorname{sn}^2 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{a_1 - a_3} (z - z_0), S^2 \right\}} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (49)$$

Случай 7. Решение уравнения (6) выражается формулой

$$y(z) = \sqrt{a_2 \operatorname{sn}^2 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{a_3} (z_0 - z), S^2 \right\}}. \quad (50)$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$q(x, t) = \sqrt{a_2 \operatorname{sn}^2 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{a_3} (z_0 - z), S^2 \right\}} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (51)$$

Случай 8. Решение уравнения (22) выражается через функцию Вейерштрасса, тогда решение уравнения (6) представляется в виде

$$y(z) = \sqrt{-\wp(z + C_3, 0, 0)}, \quad (52)$$

C_3 — произвольная постоянная.

Решение уравнения (5)

$$q(x, t) = \sqrt{-\wp(z + C_3, 0, 0)} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (53)$$

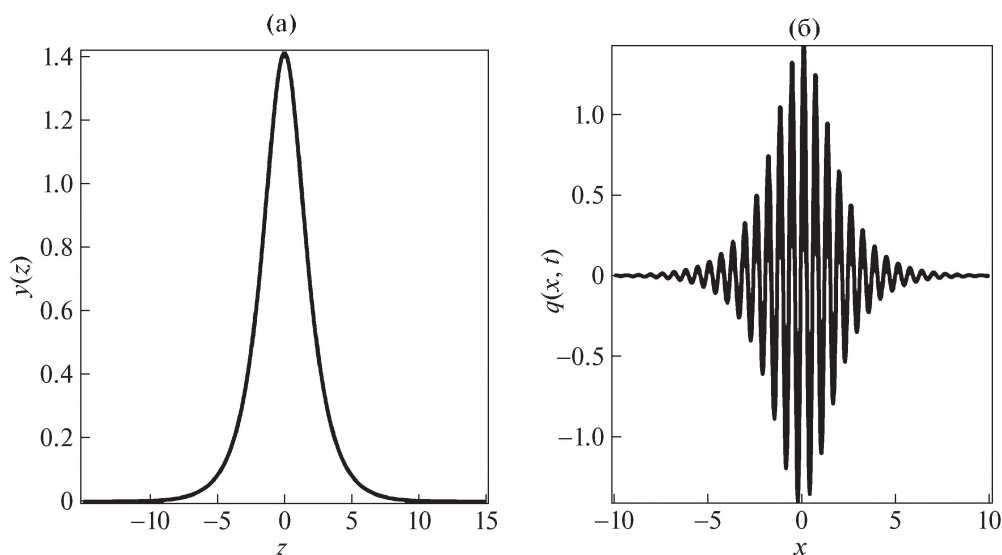


Рис. 2. а) Уединенная волна (38) описываемая уравнением (6) при $K_1 = 5$, $K_2 = 10$, $C_2 = 0$; б) решение (37) в виде уединенной волны (группового солитона) уравнения (5) $K_1 = 5$, $K_2 = 10$, $C_2 = 0$, $k = 10$, $\omega = 1$, $t = 1$.

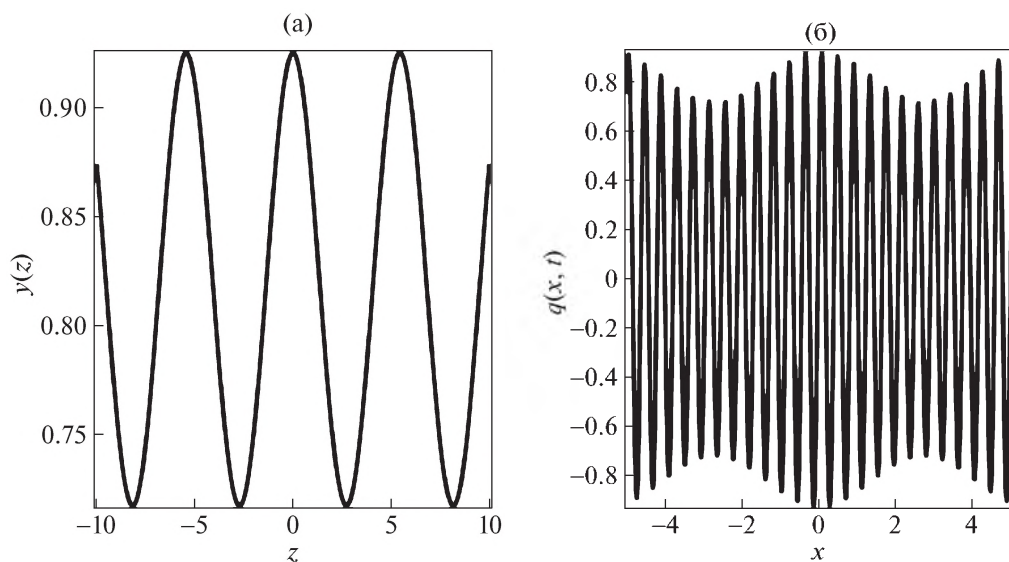


Рис. 3. а) Решение (50) уравнения (6) при $K_1 = 1, 4$, $K_2 = -3$, $C_2 = 1$; б) решение (51) уравнения (5) при $K_1 = 1, 4$, $K_2 = -3$, $C_2 = 1$, $k = 15$, $\omega = 1$, $t = 1$.

3. ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ (5) И (6)

Решение (36) уравнения (6) при $K_1 = 3$, $K_2 = 5$, $C_2 = 2$ иллюстрируется в левой части на рис. 1. Решение (37) уравнения (5) при $K_1 = 3$, $K_2 = 5$, $C_2 = 2$, $k = 8$, $\omega = 1$ в момент времени $t = 1$ демонстрируется в правой части рис. 1. На графике видно, что волна является периодической.

Уединенные волновые решения (38) уравнения (6) при $K_1 = 5$, $K_2 = 10$, $C_2 = 0$ демонстрируется в левой части на рис. 2. Решение (39) уравнения (5) при $K_1 = 5$, $K_2 = 10$, $C_2 = 0$, $k = 10$, $\omega = 1$ в момент времени $t = 1$ иллюстрируется в правой части рис. 2.

Решение (50) уравнения (6) при $K_1 = 1, 4$, $K_2 = -3$, $C_2 = 1$ иллюстрируются в левой части на рис. 3. Решение (51) уравнения (5) при $K_1 = 1, 4$,

$K_2 = -3$, $C_2 = 1$, $k = 15$, $\omega = 1$ в момент времени $t = 1$ показано в правой части рис. 3 и является периодической волной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используя переменные бегущей волны, в работе рассмотрено обобщенное нелинейное уравнение Шредингера. Показано, что система уравнений для мнимой и действительной части может быть совместной. Получены ограничения (14) на коэффициенты уравнения, для которого находится аналитическое решение уравнения (17). Показано, что уравнение (5) имеет точные решения в виде периодических и уединенных волн выраженные через эллиптическую и экспоненциальную функцию. Построены графики решений при некоторых значениях коэффициентов уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики: 188 Долгопрудный: Изд. Дом Интеллект, 2010. 364 с.
2. Узем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
3. Захаров В.Е., Мананов С.В., Новиков С.П., Потаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи, 1980. 319 с.
4. Kudryashov N.A. Optical solitons of mathematical model with arbitrary refractive index // Optik. 2020. V. 224. P. 165391.
5. Kudryashov N.A. On traveling wave solutions of the Kundu–Eckhaus equation // Optik. 2020. V. 224. P. 165500.
6. Kudryashov N.A., Antonova E.V. Solitary waves of equation for propagation pulse with power nonlinearities // Optik. 2020. V. 217. P. 164881.
7. Zhou Q., Yao D., Ding S., Zhang Y., Chen F., Chen F., Liu X., Spatial optical solitons in fifth order and seventh order weakly nonlocal nonlinear media // Optik. 2013. V. 124. P. 5683–5686.
8. Biswas A. 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan–Kundu–Laksmanan equation // Physics Letters A. 2009. V. 373. P. 2546–2548.
9. Biswas A. Optical soliton perturbation with Radhakrishnan–Kundu–Laksmanan equation by traveling wave hypothesis // Optik. 2018. V. 171. P. 217–220.
10. Triki H., Biswas A. Sub pico-second chirped envelope solitons and conservation laws in monomode optical fibers for a new derivative nonlinear Schrödinger's model // Optics. 2018. V. 173. P. 235–241.
11. Zhou Q., Ekici M., Sonmezoglu A. Exact chirped singular soliton solutions of Triki – Biswas equation // Optik. 2019. V. 181. P. 338–342.
12. Nofal T.A., Zayed E.M.E., Alngar M.E.M., Shohib R.M.A., Ekici M. Highly dispersive optical solitons perturbation having Kudryashov's arbitrary form with sextic-power law refractive index and generalized non-local laws // Optik. 2021. V. 228. P. 166120.
13. Yildirim Y., Biswas A., Ekici M., Triki H., Gonzalez-Gaxiola O., Alzahrani A.K., Belic M.R. Optical solitons in birefringent fibers for Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation with five prolific integration norms // Optik. 2020. V. 208. P. 164550.
14. Kohl R.W., Biswas A., Zhou Q., Ekici M., Alzahrani A.K., Belic M.R. Optical soliton perturbation with polynomial and triple-power laws of refractive index by semi-inverse variational principle // Optik. 2020. V. 135. P. 109765.
15. Ekici M., Sonmezoglu A. Optical solitons with Biswas–Arshed equation by extended trial function method // Optik. 2019. V. 177. P. 13–20.
16. Zayed E.M.E., Alngar M.E.M. Optical soliton solutions for the generalized Kudryashov equation of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities by three integration algorithms // Math. Methods Appl. Sci. 2021. V. 44 (1). P. 315–324.
17. Kudryashov N.A. First integral and general solution of traveling wave reduction for the Triki–Biswas equation // Optik. 2019. V. 185. P. 275–281.
18. Kudryashov N.A. First integrals and general solution of the traveling wave reduction for Schrödinger equation with anti-cubic nonlinearity // Optik. 2019. V. 185. P. 665–671.
19. Kudryashov N.A. Exact solutions of the equation for surface waves in a convecting fluid // Appl. Math. Comput. 2019. V. 344. P. 97–106.
20. Kudryashov N.A. Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with cubic-quintic nonlinearity // Optik. 2019. V. 188. P. 27–35.
21. Kudryashov N.A. A generalized model for description pulses in optical fiber // Optik. 2019. V. 189. P. 42–52.
22. Kudryashov N.A. Method for finding highly dispersive optical solitons of nonlinear differential equations // Optik. 2020. V. 212. P. 163550.
23. Kudryashov N.A. Solitary wave solutions of hierarchy with non-local nonlinearity // Appl. Math. Lett. 2020. V. 103. P. 106155.
24. Kudryashov N.A. Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrödinger equations // Appl. Math. Comput. 2020. V. 371. P. 124972.
25. Kudryashov N.A. Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities // Optik. 2020. V. 212. P. 164750.
26. Dan J., Sain S., Ghose-Choudhary A., Garai S. Application of the Kudryashov function for finding solitary wave solutions of NLS type differential equations // Optik. 2020. V. 224. P. 165519.
27. Kudryashov N.A. Construction of nonlinear differential equations for description of propagation pulses in optical fiber // Optik. 2019. V. 192. P. 162964.

Generalized Solution of the Third-Order Nonlinear Schrödinger Equation

E. V. Antonova^{a, #} and N. A. Kudryashov^{a, ##}

^a National Research Nuclear University "MEPhI" (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: EVAntonova@mephi.ru

^{##}e-mail: NAKudryashov@mephi.ru

Received February 19, 2021; revised February 19, 2021; accepted March 9, 2021

Abstract—The generalized third order nonlinear Schrödinger equation is considered. This equation is a non-linear partial differential equation, which can be used to describe pulses in optical fibers. The Cauchy problem for it is not solved by the inverse scattering transform; for this reason, the solution of the equation is sought in the travelling wave variables. A system of differential equations for the imaginary and real parts has been obtained in these variables. Conditions for the existence of a solution of an overdetermined system of differential equations are determined. An analytical solution is found in terms of the Jacobi elliptic function. The solutions are presented in the form of periodic and solitary waves of the nonlinear Schrödinger equation under various conditions on the coefficients. The found solutions are plotted in the graphical form.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation, exact solution, solitary wave, periodic wave, Jacobi function

DOI: 10.1134/S2304487X2101003X

REFERENCES

1. Kudryashov N.A. *Metody' nelinejnoj matematicheskoy fiziki* [Methods of nonlinear mathematical physics]. Dolgoprudnyj: Izd. Dom Intellekt, 2010. 364 p. (in Russian)
2. Uizem Dzh. *Linejny'e i nelinejny'e volny'* [Linear and nonlinear waves]. Moscow, Mir Publ., 1977. 622 p. (in Russian)
3. Zakharov V.E., Manakov S.V., Novikov S.P., Pitaevskij L.P. *Teoriya solitonov: metod obratnoj zadachi* [Theory of solitons: the method of the inverse problem]. 1980. 319 p. (in Russian)
4. Kudryashov N.A. Optical solitons of mathematical model with arbitrary refractive index. *Optik*, 2020, vol. 224, p. 165391.
5. Kudryashov N.A. On traveling wave solutions of the Kundu–Eckhaus equation. *Optik*, 2020, vol. 224, p. 165500.
6. Kudryashov N.A., Antonova E.V. Solitary waves of equation for propagation pulse with power nonlinearities. *Optik*, 2020, vol. 217, p. 164881.
7. Zhou Q., Yao D., Ding S., Zhang Y., Chen F., Chen F., Liu X. Spatial optical solitons in fifth order and seventh order weakly nonlocal nonlinear media, *Optik*, 2013, vol. 124, pp. 5683–5686.
8. Biswas A. 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation, *Physics Letters A*, 2009, vol. 373, pp. 2546–2548.
9. Biswas A. Optical soliton perturbation with Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation by traveling wave hypothesis, *Optik*, 2018, vol. 171, pp. 217–220.
10. Triki H., Biswas A. Sub pico-second chirped envelope solitons and conservation laws in monomode optical fibers for a new derivative nonlinear Schrödinger's model. *Optics*, 2018, vol. 173, pp. 235–241.
11. Zhou Q., Ekici M., Sonmezoglu A. Exact chirped singular soliton solutions of Triki–Biswas equation, *Optik*, 2019, vol. 181, pp. 338–342.
12. Nofal T.A., Zayed E.M.E., Alngar M.E.M., Shohib R.M.A., Ekici M. Highly dispersive optical solitons perturbation having Kudryashov's arbitrary form with sextic-power law refractive index and generalized non-local laws, *Optik*, 2021, vol. 228, p. 166120.
13. Yıldırım Y., Biswas A., Ekici M., Triki H., Gonzalez-Gaxiola O., Alzahrani A.K., Belic M.R. Optical solitons in birefringent fibers for Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation with five prolific integration norms. *Optik*, 2020, vol. 208, p. 164550.
14. Kohl R.W., Biswas A., Zhou Q., Ekici M., Alzahrani A.K., Belic M.R. Optical soliton perturbation with polynomial and triple-power laws of refractive index by semi-inverse variational principle. *Optik*, 2020, vol. 135, p. 109765.
15. Ekici M., Sonmezoglu A. Optical solitons with Biswas–Arshed equation by extended trial function method. *Optik*, 2019, vol. 177, pp. 13–20.
16. Zayed E.M.E., Alngar M.E.M., Optical soliton solutions for the generalized Kudryashov equation of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities by three integration algorithms. *Math. Methods Appl. Sci.* 2021, vol. 44 (1), pp. 315–324.

17. Kudryashov N.A. First integral and general solution of traveling wave reduction for the Triki–Biswas equation. *Optik*, 2019, vol. 185, pp. 275–281.
18. Kudryashov N.A. First integrals and general solution of the traveling wave reduction for Schrödinger equation with anti-cubic nonlinearity, *Optik*, 2019, vol. 185, pp. 665–671.
19. Kudryashov N.A. Exact solutions of the equation for surface waves in a convecting fluid, *Appl. Math. Comput.* 2019, vol. 344, pp. 97–106.
20. Kudryashov N.A. Traveling wave solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation with cubic-quintic nonlinearity, *Optik*, 2019, vol. 188, pp. 27–35.
21. Kudryashov N.A. A generalized model for description pulses in optical fiber, *Optik*, 2019, vol. 189, pp. 42–52.
22. Kudryashov N.A., Method for finding highly dispersive optical solitons of nonlinear differential equations, *Optik*, 2020, vol. 212, p. 163550.
23. Kudryashov N.A., Solitary wave solutions of hierarchy with non-local nonlinearity, *Appl. Math. Lett.* 2020, vol. 103, p. 106155.
24. Kudryashov N.A. Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrödinger equations, *Appl. Math. Comput.* 2020, vol. 371, p. 124972.
25. Kudryashov N.A. Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities, *Optik*, 2020, vol. 212, p. 164750.
26. Dan J., Sain S., Ghose-Choudhary A., Garai S. Application of the Kudryashov function for finding solitary wave solutions of NLS type differential equations, *Optik*, 2020, vol. 224, p. 165519.
27. Kudryashov N.A. Construction of nonlinear differential equations for description of propagation pulses in optical fiber, *Optik*, 2019, vol. 192, p. 162964.