ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2021, том 10, № 1, с. 27–30

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ИЕРАРХИИ БЮРГЕРСА

© 2021 г. Э. Ф. Хафизова[1,*], Н. А. Кудряшов[1,]**

[1] *Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия*

**e-mail: enzhelia@gmail.com*

***e-mail: nakudryashov@mephi.ru*

Поступила в редакцию 24.02.2021 г.
После доработки 24.02.2021 г.
Принята к публикации 09.03.2021 г.

Рассматривается иерархия уравнений Бюргерса. Методом линеаризации уравнения находятся рациональные решения. Уравнения иерархии допускают группу преобразований растяжений. Показано, что, используя автомодельные переменные, уравнения Бюргерса преобразуются после интегрирования в дифференциальное уравнение n-го порядка, где искомая функция зависит только от одной переменной. Используя преобразование Коула–Хопфа, производится линеаризация уравнения. Решение обыкновенного линейного уравнения ищется в виде полинома $n+1$ порядка. Подставляя полином с неопределенными коэффициентами в уравнение, переходим от линейного дифференциального уравнения к системе алгебраических уравнений $n+1$ порядка с постоянными коэффициентами. Вид рационального решения зависит от постоянной интегрирования, которая имеет определенные значения связанные со степенью полинома. Получено, что рациональные решения иерархии Бюргерса имеют точки разрыва.

Ключевые слова: иерархия Бюргерса, рациональные решения, нелинейное дифференциальное уравнение, преобразование Коула–Хопфа, решение

DOI: 10.1134/S2304487X21010089

ВВЕДЕНИЕ

Уравнения иерархии Бюргерса встречаются в ряде физических процессов, как турбулентность, нелинейная акустика, а также при описании физики плазмы. Приведем примеры этих уравнений.

Уравнения иерархии Бюргерса имеют вид:

$$u_t + \alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} + u\right)^n u = 0, \qquad (1)$$

где $u(x,t)$ – неизвестная функция, зависящая от переменной t и пространственной переменной x. Рассмотрим уравнения при $n = 1, 2, 3$.

Из (1) при $n = 1$ получаем хорошо известное уравнение Бюргерса. Оно названо в честь Дж.М. Бюргерса. Первое его упоминание было более 70 лет назад при описании турбулентности [3]:

$$u_t + \alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} + u\right)u = u_t + \alpha u_{xx} + 2\alpha u u_x = 0 \qquad (2)$$

При $n = 2$ получаем уравнение Шарма–Тассо–Олвера. Это уравнение хорошо известно как уравнение, описывающее распространение нелинейных дисперсионных волн в неоднородных средах [4–6]:

$$\begin{aligned} &u_t + \alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} + u\right)^2 u = \\ &= u_t + \alpha u_{xxx} + 3\alpha {u^2}_x + 3\alpha u u_{xx} + 3\alpha u^2 u_x = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

При $n = 3$ получаем уравнение четвертого порядка:

$$\begin{aligned} &u_t + \alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} + u\right)^3 u = u_t + \alpha u_{xxxx} + 10\alpha u_x u_{xx} + \\ &+ 4\alpha u u_{xxx} + 12\alpha u u_x^{\,2} + 6\alpha u^2 u_{xx} + 4\alpha u^3 u_x = 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

Целью данной работы является нахождение рациональных решений уравнений иерархии Бюргерса.

1. УРАВНЕНИЯ ИЕРАРХИИ БЮРГЕРСА В АВТОМОДЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Для вывода уравнения, используются автомодельные переменные. Без ограничения общности положим $\alpha = 1$.

$$u_t + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} + u\right)^n u = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (5)$$

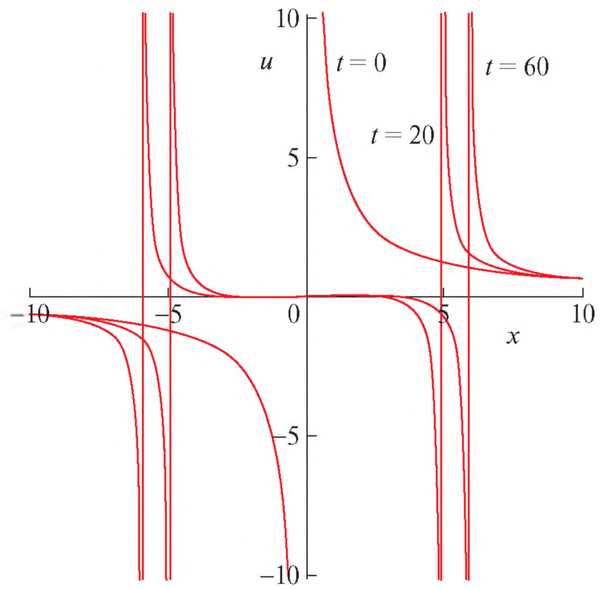

Рис. 1. Разрезы решения $u(x,t)$ при разных значениях времени для $\beta = n+1 = 6$.

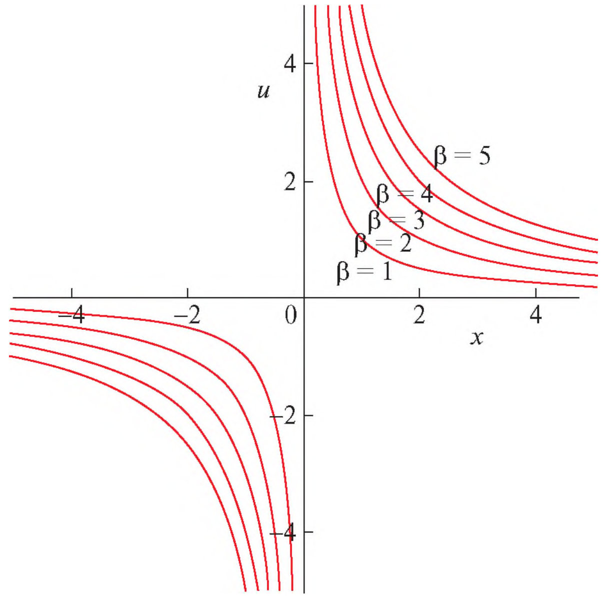

Рис. 2. Решения $u(x,t)$ при $\beta = 1\ldots n = 1\ldots5$.

Уравнения иерархии допускают группу преобразований растяжений. Положим $x = Lx'$, $t = Tt'$, $u = C_0u'$.

Полагая $C_0 = e^a$ в автомодельных переменных, получаем:

$$u = e^{-a}u', \quad x = e^a x', \quad t = e^{a(n+1)}t'. \tag{6}$$

При учете (6) уравнение (5) имеет инварианты, которые допускаются уравнением (5):

$$I_1 = ut^{\frac{1}{n+1}} = u'\,t'^{\frac{1}{n+1}}, \quad I_2 = \frac{x}{t^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{x'}{t'^{\frac{1}{n+1}}}. \tag{7}$$

$$u(x,t) = \frac{C_1}{t^{\frac{1}{n+1}}} f\left(\frac{C_2x}{t^{\frac{1}{n+1}}}\right), \quad z = \frac{C_2x}{t^{\frac{1}{n+1}}}. \tag{8}$$

Зависимость между константами C_1 и C_2 находится при подстановке (8) в уравнение (5).

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}} \tag{9}$$

Выделяем полный дифференциал и проинтегрируем в полученном уравнении:

$$\left(\frac{d}{dz} + f\right)^n f - zf + \beta = 0, \tag{10}$$

где β – постонная интегрирования.

Применим преобразование Коула–Хопфа для построения рациональных решений уравнений иерархии Бюргерса [7, 8]:

$$f = \frac{\psi_z}{\psi} \tag{11}$$

Производится линеаризация уравнения. Выведем первое слагаемое (10):

$$\left(\frac{d}{dz} + f\right) f = \frac{d}{dz}\frac{\psi_z}{\psi} + \left(\frac{\psi_z}{\psi}\right)^2 = \frac{\psi_{zz}}{\psi}, \qquad \left(\frac{d}{dz} + f\right)^2 f = \frac{\psi_{zzz}}{\psi}, \tag{12}$$

$$\left(\frac{d}{dz} + f\right)^n f = \frac{\psi_{n+1,z}}{\psi}, \quad \text{где} \quad \psi_{n+1,z} = \frac{d^{n+1}\psi}{dz^{n+1}} \tag{13}$$

Учитывая (13), получаем соотношение:

$$\left(\frac{d}{dz} + f\right)^n f - zf + \beta = \frac{1}{\psi}(\psi_{n+1,z} - z\psi_z + \beta\psi) = 0 \tag{14}$$

2. ПОСТРОЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ИЕРАРХИИ УРАВНЕНИЙ БЮРГЕРСА

Рассмотрим уравнение:

$$\psi_{n+1,z} - z\psi_z + \beta\psi = 0, \tag{15}$$

где ψ – решение, $\psi_{n+1,z} = \dfrac{d^{n+1}\psi}{dz^{n+1}}$

Будем искать решение уравнения в виде полинома $n+1$ степени:

$$\psi = a_{n+1}z^{n+1} + a_nz^n + \ldots + a_2z^2 + a_1z + a_0. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15). Получаем систему уравнений для коэффициентов полинома в виде:

$$\begin{cases} \beta a_{n+1} - (n+1)a_{n+1} = 0, \\ \beta a_n - n a_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \beta a_1 - a_1 = 0, \\ (n+1)! a_{n+1} + \beta a_0 = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Рассмотрим два случая: 1) $\beta = 0\dots n$, 2) $\beta = n+1$. При $\beta = 0\dots n$ все коэффициенты a_i, где $i = 0, 1, \dots, k-1, k+1, \dots n-1, n$ равны нулю, а коэффициент a_k будет свободным, решение уравнения будет иметь вид: $\psi = Cz^k$. При $\beta = n+1$ коэффициенты $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, а $a_{n+1} = -\frac{a_0}{n!}$. Решение для этого случая имеет вид: $\psi = C(z^{n+1} - n!)$. При $\beta \neq 0, 1, \dots, n+1$, решение уравнения (15) есть тождественный ноль.

$$\psi = \begin{cases} Cz^\beta, \quad \text{при} \quad \beta = 0, 1, \dots, n-1, n \\ C(z^\beta - (\beta-1)!) \quad \text{при} \quad \beta = n+1 \end{cases} \quad (18)$$

При заменах (8) и (11) решения уравнений (5) и (10) соответственно будут выглядеть:

$$f = \begin{cases} \frac{\beta}{z}, \quad \text{при} \quad \beta = 0\dots n, \\ \frac{\beta z^{\beta-1}}{z^\beta - (\beta-1)!}, \quad \text{при} \quad \beta = n+1. \end{cases} \quad (19)$$

$$u = \begin{cases} \frac{\beta}{x}, \quad \text{при} \quad \beta = 0\dots n, \\ \frac{\beta x^{\beta-1}}{x^\beta - \beta! t}, \quad \text{при} \quad \beta = n+1. \end{cases} \quad (20)$$

В качестве примера представим графики решений уравнения иерархии Бюргерса при $n = 5$.

Можно заметить, что для случая $\beta = n+1$ имеются точки разрыва, которые определяются по формуле:

$$x^* = \pm\sqrt[\beta]{\beta! t}$$

Для случая, где $\beta = 0\dots n$:

$$x^* = 0$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривались уравнения иерархии Бюргерса. Приводились примеры уравнений второго, третьего и четвертого порядков. Для получения рациональных решений уравнений использовались автомодельные переменные. Используя преобразование Коула–Хопфа, производилась линеаризация уравнения. Были найдены рациональные решения уравнения. Построены графики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кудряшов Н.А.* “Методы нелинейной математической физики”, 2010. С. 175–185.
2. *Петровский С.В.* Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН. Журнал технической физики. 1999. Т. 69. Вып. 8. С. 10–14.
3. *Burgers J.M.* A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Adv. Appl. Mech. 1948. P. 171–199.
4. *Tasso H.* Cole’s ansatz and extension of Burgers equation, Report IPP6/142 Ber. MPI fur Plasmaphysik (Garching), 1976.
5. *Sharma A.S., Tasso H.* Connection between wave envelope and explicit solution of a nonlinear dispersive equation, Report IPP6/158 Ber. MPI fur Plasmaphysik (Garching). 1970. P. 1–10.
6. *Olver P.J.* Evolution equation possessing infinite many symmetries // J. Math. Phys. 1977. V. 18. № 6. P. 1212–1215.
7. *Cole J.D.* On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics // Quart. Appl. Math. 1950. P. 225–236.
8. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t = uu_x + u_{xx}$ // Communs. Pure Appl. Math. 1950. P. 201–230.

Vestnik Natsional’nogo issledovatel’skogo yadernogo universiteta “MIFI”, 2021, vol. 10, no. 1, pp. 27–30

Rational Solutions of the Burgers Hierarchy

E. F. Khafizova[a,#] and N. A. Kudryashov[a,##]

[a] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[#]*e-mail: enzhelia@gmail.com*

[##]*e-mail: NAKudryashov@mephi.ru*

Received February 24, 2021; revised February 24, 2021; accepted March 9, 2021

Abstract—Rational solutions of the Burgers hierarchy have been obtained using the linearization of the differential equation. Hierarchy equations allow a group of stretch transformations. Using self-similar variables, Burgers equations are converted after integration into an n-order differential equation where the function depends only on one variable. The linearization of the equation is done using the Cole–Hopf transformation. A solution of an ordinary linear differential equation is sought in the form of an $(n + 1)$-order polynomial. The substitution of the polynomial with indefinite coefficients into the equations transforms the linear differential equation into a system of $(n + 1)$-order algebraic equations with constant coefficients. The kind of a rational solution depends on the constant of integration, which has certain values related to the degree of polynomial. Rational solutions of the Burgers hierarchy have points of discontinuity.

Keywords: Burgers hierarchy, rational solution, Cole–Hopf transformation, nonlinear differential equation

DOI: 10.1134/S2304487X21010089

REFERENCES

1. Kudryashov N.A. *Metody nelinejnoj matematicheskoj fiziki*, [Methods of nonlinear mathematical physics]. 2010. pp. 175–185. (in Russian)
2. Petrovsky S.V. Institute of Oceanology named after P.P. Shirshov RAS, *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki*, 1999, vol. 69, pp. 10–14. (in Russian)
3. Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence // *Adv. Appl. Mech.*, 1948, pp. 171–199.
4. Tasso H. Cole's ansatz and extension of Burgers equation, *Report IPP6/142 Ber. MPI fur Plasmaphysik* (Garching), 1976.
5. Sharma A.S., Tasso H. Connection between wave envelope and explicit solution of a nonlinear dispersive equation, *Report IPP6/158 Ber. MPI fur Plasmaphysik* (Garching), 1970, pp. 1–10.
6. Olver P.J. Evolution equation possessing infinite many symmetries, *J. Math. Phys.*, 1977, vol. 18, no. 6. pp. 1212–1215.
7. Cole J.D. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics. *Quart. Appl. Math.*, 1950. pp. 225–236.
8. Hopf E. The partial differential equation $u_t = uu_x + u_{xx}$ // Communs. *Pure Appl. Math.*, 1950. pp. 201–230.