

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НОРМАЛЬНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОДМНОЖЕСТВА СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЛОЧНЫХ МАТРИЦ

© 2021 г. К. Я. Кудрявцев*

*Институт интеллектуальных кибернетических систем,
Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия*

**e-mail: KYKudryavtsev@mephi.ru*

Поступила в редакцию 27.01.2021 г.

После доработки 30.01.2021 г.

Принята к публикации 09.02.2021 г.

Многомерный нормальный закон распределения случайных величин является одним из основных при решении большого количества статистических задач. Хорошо известным фактом является, то, что совместное маргинальное распределение подмножества случайных величин также является нормальным. В литературе это факт доказывается с помощью нахождения характеристической функции для заданного множества случайных величин и далее находится характеристической функции для подмножества случайных величин и сопоставления характеристических функций. С помощью этого подхода относительно легко доказывается принадлежность к нормальному распределению подмножества случайных величин. Однако, в явном виде не находится функция плотности многомерного нормального распределения, не вычисляются вектор математических ожиданий и ковариационная матрица распределения. Было бы интересно получить строгое доказательство того, что если исходное множество случайных величин имеет многомерный нормальный закон распределения, то и подмножество случайных величин этого множества имеет многомерный нормальный закон распределения с определенными параметрами. В данной статье приводится строгий вывод функции плотности многомерного нормального распределения для подмножества случайных величин. Вычисляется вектор математических ожиданий и ковариационная матрица распределения. Вывод основан на операциях с блочными матрицами. Представленные формулы вычисления обратной матрицы, когда исходная матрица представлена в виде блоков, имеют самостоятельный интерес.

Ключевые слова: многомерный нормальный закон распределения, блочные матрицы, математическое ожидание и ковариационная матрица

DOI: 10.1134/S2304487X21010107

ВВЕДЕНИЕ

Многомерный нормальный закон распределения случайных величин является одним из основных при решении большого количества статистических задач. Причина широкого применения нормального закона распределения заключается в том, что многие статистические оценки различных параметров распределены по нормальному закону. Так в [1] для определения минимального количества испытаний используется то, что нормированная частота успешных испытаний $\hat{W}_n = \frac{W_n - E[W_n]}{\sqrt{D[W_n]}}$ сходится по распределению, к нормальной случайной величине $U \sim N(0; 1)$. Там же [1] для дальнейших преобразований учитывается нормальное распределение случайной вели-

чины $\hat{W}_n = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ (n – количество испытаний, k – количество “успешных” исходов). В [2] предполагается нормальное распределение результатов испытаний лекарственных препаратов. В основе работы [3], посвященной определению минимального размера выборки, лежит нормальное распределение и использование заданного доверительного интервала. Одну из основных ролей в широком применении нормального закона распределения играет центральная предельная теорема [4], которая говорит о том, что сумма достаточно большого количества слабо зависимых случайных величин, имеет распределение, близкое к нормальному.

Для нормального закона функция плотности распределения имеет вид [5]:

$$f_x(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det V_x)^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [x - \mu]^T V_x^{-1} [x - \mu] \right\}, \quad (1)$$

где $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ — вектор случайных величин размерности n ; $\mu = E\{x\} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]^T$ ($\mu_i = E\{x_i\}$) — вектор математических ожиданий размерности n ; $V_x = \text{var}\{x\} = E\{[x - \mu][x - \mu]^T\} = \begin{bmatrix} V_{x_{11}} & V_{x_{12}} \\ V_{x_{21}} & V_{x_{22}} \end{bmatrix}$ — ковариационная матрица вектора x размерности $n \times n$.

$\det V_x$ — определитель матрицы V_x .

Требуется доказать, что если представить вектор x как $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, где x_1 и x_2 векторы размерности n_1 и n_2 соответственно ($n_1 + n_2 = n$) и произвести элиминацию функции плотности распределения по вектору x_2 , то получим нормальную функцию плотности распределения вида:

$$f_{x_1}(x_1) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_1}{2}} (\det V_{x_{11}})^{\frac{1}{2}}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [x_1 - \mu_1]^T V_{x_{11}}^{-1} [x_1 - \mu_1] \right\}, \quad (2)$$

где $\mu_1 = E\{x_1\}$, а $V_{x_{11}}$ — левый верхний блок ковариационной матрицы V_x размерности $n_1 \times n_1$. Доказательство данного утверждения основывается на вычислении характеристической функции $g(t)$ многомерного нормального распределения [6]. По определению имеем:

$$g(t) = E\{e^{it^T x}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(it^T x)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det V_x)^{\frac{1}{2}}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [x - \mu]^T V_x^{-1} [x - \mu] \right\} dx, \quad (3)$$

или

$$g(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det V_x)^{\frac{1}{2}}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ it^T x - \frac{1}{2} [x - \mu]^T V_x^{-1} [x - \mu] \right\} dx. \quad (4)$$

Вводя замену переменной $[x - \mu] = V_x^{1/2} y$; $x = \mu + V_x^{1/2} y$; $dx = (\det V_x)^{1/2} dy$, где $V_x^{1/2} V_x^{1/2} = V_x$, можем представить (4) как

$$g(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ it^T (\mu + V_x^{1/2} y) - \frac{1}{2} y^T y \right\} dy = \frac{\exp(it^T \mu)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [y^T y - 2it^T V_x^{1/2} y] \right\} dy$$

Вводя переменную $z^T = it^T V_x^{1/2}$; $z = iV_x^{1/2} t$; $z^T z = -t^T V_x t$ дополним выражение в скобках до полного квадрата:

$$g(t) = \frac{\exp(it^T \mu)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [y^T y - 2it^T V_x^{1/2} y - t^T V_x t + t^T V_x t] \right\} dy = \frac{\exp(it^T \mu)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [y^T y - 2z^T y - z^T z + z^T z] \right\} dy.$$

Выполняя преобразования, получим:

$$g(t) = \frac{\exp \left(it^T \mu - \frac{1}{2} t^T V_x t \right)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [y - z]^T [y - z] \right\} dy. \quad (5)$$

Полагая $s = y - z$, вычисление интеграла (5) можно представить как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [y - z]^T [y - z] \right\} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} s^T s \right\} ds = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_i^2 \right\} ds = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} s_i^2 \right\} ds_i$$

Учитывая, что $\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} s_i^2 \right\} ds_i = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$, окончательно получим характеристическую функцию $g_x(t)$ многомерного нормального распределения:

$$g_x(t) = \exp \left(it^T \mu - \frac{1}{2} t^T V_x t \right) \quad (6)$$

Если теперь рассмотреть линейное преобразование вектора x , а именно $y = Ax$, где A матрица размерности $m \times n$, то характеристическая функция вектора y будет иметь вид:

$$g_y(t) = E\{e^{it^T y}\} = E\{e^{it^T Ax}\} = E\{e^{i(A^T t)^T x}\} = g_x(A^T t)$$

или

$$g_y(t) = \exp \left(i(A^T t)^T \mu - \frac{1}{2} (A^T t)^T V_x A^T t \right) = \exp \left(it^T A \mu - \frac{1}{2} t^T A V_x A^T t \right).$$

Сравнение $g_y(t)$ и $g_x(t)$ показывает, что вектор $y = Ax$ распределен по нормальному закону, со средним $\mu_y = A\mu_x$ и матрицей ковариации $V_y = AV_xA^T$.

Если в качестве матрицы A размерности $n_1 \times n$ выбрать матрицу вида:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

в которой первые n_1 столбцов единичные, а последние нулевые, то $\mu_y = \mu_{x_1}$ и $V_y = V_{x_1}$.

Приведенные рассуждения доказывают, что вектор x_1 размерности n_1 распределен по многомерному нормальному закону, но при этом функция плотности распределения явно не определяется.

В данной статье предлагается строгий вывод функции плотности распределения для вектора x_1 , основанный на преобразовании блочных матриц.

ОБРАЩЕНИЕ БЛОЧНЫХ МАТРИЦ

Прежде чем приступить к выводу функции плотности распределения, получим базовые соотношения для вычисления обратной блочной матрицы вида:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

Если размерность матрицы A $n \times n$, а размерность блока A_{11} $m \times m$, то размерности остальных блоков имеют вид: A_{12} $m \times (n-m)$; A_{21} $(n-m) \times m$; A_{22} $(n-m) \times (n-m)$.

Для поиска блоков T_{ij} запишем соотношение:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix},$$

где I_m и I_{n-m} единичные матрицы соответствующих размерностей.

Выполняя умножение получим:

$$\begin{bmatrix} T_{11}A_{11} + T_{12}A_{21} & T_{11}A_{12} + T_{12}A_{22} \\ T_{21}A_{11} + T_{22}A_{21} & T_{21}A_{12} + T_{22}A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix}$$

Исходя из полученных выражений, можно записать:

$$T_{11}A_{12} + T_{12}A_{22} = 0; \quad T_{11}A_{12} = -T_{12}A_{22}$$

Следовательно

$$A_{12} = -T_{11}^{-1}T_{12}A_{22}; \quad A_{12}A_{22}^{-1} = -T_{11}^{-1}T_{12}.$$

Выполняя аналогичные преобразования, будем иметь

$$T_{21}A_{11} + T_{22}A_{21} = 0; \quad T_{21}A_{11} = -T_{22}A_{21}$$

$$A_{21} = -T_{22}^{-1}T_{21}A_{11}; \quad A_{21}A_{11}^{-1} = -T_{22}^{-1}T_{21}.$$

Для диагональных элементов можно записать:

$$T_{11}A_{11} + T_{12}A_{21} = I_m;$$

$$A_{11} = T_{11}^{-1} - T_{11}^{-1}T_{12}A_{21} = T_{11}^{-1} + A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$$

и, следовательно

$$T_{11}^{-1} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}; \quad T_{11} = [A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}]^{-1}$$

Аналогично

$$T_{22}A_{22} + T_{21}A_{12} = I_{n-m};$$

$$A_{22} = T_{22}^{-1} - T_{22}^{-1}T_{21}A_{12} = T_{22}^{-1} + A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

$$T_{22}^{-1} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}; \quad T_{22} = [A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}]^{-1}$$

Используя полученные соотношения, окончательно получим:

$$T_{12} = -T_{11}A_{12}A_{22}^{-1} = -[A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}]^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$$

$$T_{21} = -T_{22}A_{21}A_{11}^{-1} = -[A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}]^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$$

Таким образом, обратная матрица в блочном виде может быть записана как

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}]^{-1} & -[A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}]^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -[A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}]^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & [A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}]^{-1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

С точностью до обозначений, аналогичным образом можно выразить блоки исходной матрицы через блоки обратной матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{11} - T_{12}T_{22}^{-1}T_{21}]^{-1} & -[T_{11} - T_{12}T_{22}^{-1}T_{21}]^{-1}T_{12}T_{22}^{-1} \\ -[T_{22} - T_{21}T_{11}^{-1}T_{12}]^{-1}T_{21}T_{11}^{-1} & [T_{22} - T_{21}T_{11}^{-1}T_{12}]^{-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

МНОГОМЕРНОЕ НОРМАЛЬНОЕ
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДМНОЖЕСТВА
СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Для получения функции плотности распределения (2) воспользуемся базовым соотношением

$$f_{x_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx_2 \quad (9)$$

Представим функцию $f_x(x)$ в виде

$$f_{x_1 x_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_1+n_2}{2}} (\det V_x)^{\frac{1}{2}}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} V_{x_{11}} & V_{x_{12}} \\ V_{x_{21}} & V_{x_{22}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (9')$$

где $V_x = \begin{bmatrix} V_{x_{11}} & V_{x_{12}} \\ V_{x_{21}} & V_{x_{22}} \end{bmatrix} =$

$E \left\{ \begin{bmatrix} [x_1 - \mu_1][x_1 - \mu_1]^T & [x_1 - \mu_1][x_2 - \mu_2]^T \\ [x_2 - \mu_2][x_1 - \mu_1]^T & [x_2 - \mu_2][x_2 - \mu_2]^T \end{bmatrix} \right\}$ ковариационная матрица случайного вектора x размерности $n \times n$.

Запишем $V_x^{-1} = \begin{bmatrix} V_{x_{11}} & V_{x_{12}} \\ V_{x_{21}} & V_{x_{22}} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$. Заметим, что $V_x = V_x^T$ и $T_{12} = T_{21}^T$.

Для определителя исходной и обратной матриц справедливо соотношение [7]:

$$\det V_x \cdot \det V_x^{-1} = 1 \quad (10)$$

Кроме того, для определителя блочной матрицы $\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$ можно записать

$$\det V_x^{-1} = \det \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} T_{11} - T_{12} T_{22}^{-1} T_{21} & 0 \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \det(T_{11} - T_{12} T_{22}^{-1} T_{21}) \cdot \det T_{22} \quad (11)$$

$$\det V_x = \frac{1}{\det V_x^{-1}} = \frac{1}{\det(T_{11} - T_{12} T_{22}^{-1} T_{21}) \cdot \det T_{22}} \quad (12)$$

Возвращаясь к вычислению интеграла (9) получим:

$$f_{x_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_1+n_2}{2}} (\det V_x)^{\frac{1}{2}}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [x_1 - \mu_1; x_2 - \mu_2] \begin{bmatrix} V_{x_{11}} & V_{x_{12}} \\ V_{x_{21}} & V_{x_{22}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \right\} dx_2 =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_1+n_2}{2}} (\det V_x)^{\frac{1}{2}}} \times \quad (13)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [x_1 - \mu_1; x_2 - \mu_2] \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \right\} dx_2$$

Учитывая, что $T_{12} = T_{21}^T$ и $[x_1 - \mu_1]^T T_{12} [x_2 - \mu_2] = [x_1 - \mu_1]^T T_{21} [x_2 - \mu_2]$, запишем показатель экспоненты в подынтегральном выражении в виде (коэффициент $-\frac{1}{2}$ пока не учитываем):

$$Q = [x_1 - \mu_1]^T T_{11} [x_1 - \mu_1] + 2[x_1 - \mu_1]^T T_{12} [x_2 - \mu_2] + [x_2 - \mu_2]^T T_{22} [x_2 - \mu_2].$$

Для вычисления интеграла (13) дополним выражение $2[x_1 - \mu_1]^T T_{12} [x_2 - \mu_2] + [x_2 - \mu_2]^T T_{22} [x_2 - \mu_2]$ до полной квадратичной формы. Для этого выполним замену переменной

$$[x_2 - \mu_2] = T_{22}^{-1/2} y; \quad dx_2 = \frac{1}{(\det T_{22})^{1/2}}$$

Далее представим $2[x_1 - \mu_1]^T T_{12} [x_2 - \mu_2]$ как

$$2[x_1 - \mu_1]^T T_{12} T_{22}^{-1/2} T_{22}^{1/2} [x_2 - \mu_2] = 2[x_1 - \mu_1]^T T_{12} T_{22}^{-1/2} y.$$

Если положить $z^T = [x_1 - \mu_1]^T T_{12} T_{22}^{-1/2}$; $z = T_{22}^{-1/2} T_{21} [x_1 - \mu_1]$, то необходимо добавить и вычесть слагаемое $z^T z = [x_1 - \mu_1]^T T_{12} T_{22}^{-1} T_{21} [x_1 - \mu_1]$.

Таким образом, квадратичная форма будет иметь вид:

$$Q = [x_1 - \mu_1]^T T_{11} [x_1 - \mu_1] + 2z^T y + y^T y + z^T z - [x_1 - \mu_1]^T T_{12} T_{22}^{-1} T_{21} [x_1 - \mu_1] = [x_1 - \mu_1]^T \times [T_{11} - T_{12} T_{22}^{-1} T_{21}] [x_1 - \mu_1] + [y + z]^T [y + z].$$

Возвращаясь к вычислению интеграла (13), получим

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_1+n_2}{2}} (\det V_x)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(\det T_{22})^{1/2}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \{ [x_1 - \mu_1]^T [T_{11} - T_{12} T_{22}^{-1} T_{21}] \times [x_1 - \mu_1] + [y + z]^T [y + z] \} \right\} dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[\det(T_{11} - T_{12}T_{22}^{-1}T_{21}) \cdot \det T_{22}]^{1/2}}{(2\pi)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} \frac{1}{(\det T_{22})^{1/2}} \times \\
&\times \exp\left\{-\frac{1}{2}[x_1 - \mu_1]^T [T_{11} - T_{12}T_{22}^{-1}T_{21}][x_1 - \mu_1]\right\} \times \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}[y + z]^T [y + z]\right\} dy = \\
&\frac{[\det(T_{11} - T_{12}T_{22}^{-1}T_{21})]^{1/2}}{(2\pi)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} \times \\
&\times \exp\left\{-\frac{1}{2}[x_1 - \mu_1]^T [T_{11} - T_{12}T_{22}^{-1}T_{21}][x_1 - \mu_1]\right\} \times \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}[y + z]^T [y + z]\right\} dy
\end{aligned}$$

Ввиду того, что размерность вектора y равна n_2 , получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}[y + z]^T [y + z]\right\} dy = (2\pi)^{\frac{n_2}{2}}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\begin{aligned}
f_{x_1}(x_1) &= \frac{[\det(T_{11} - T_{12}T_{22}^{-1}T_{21})]^{1/2}}{(2\pi)^{\frac{n_1}{2}}} \times \\
&\times \exp\left\{-\frac{1}{2}[x_1 - m_1]^T [T_{11} - T_{12}T_{22}^{-1}T_{21}][x_1 - m_1]\right\}
\end{aligned}$$

В соответствии с выражением (8), с точностью до обозначений можно записать

$$V_x = \begin{bmatrix} V_{x_{11}} & V_{x_{12}} \\ V_{x_{21}} & V_{x_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{11} - T_{12}T_{22}^{-1}T_{21}]^{-1} & -[T_{11} - T_{12}T_{22}^{-1}T_{21}]^{-1}T_{12}T_{22}^{-1} \\ -[T_{22} - T_{21}T_{11}^{-1}T_{12}]^{-1}T_{21}T_{11}^{-1} & [T_{22} - T_{21}T_{11}^{-1}T_{12}]^{-1} \end{bmatrix}$$

т.е.

$$V_{x_{11}} = [T_{11} - T_{12}T_{22}^{-1}T_{21}]^{-1}; \quad T_{11} - T_{12}T_{22}^{-1}T_{21} = V_{x_{11}}^{-1} \quad (14)$$

Согласно (10)

$$\det(T_{11} - T_{12}T_{22}^{-1}T_{21}) = \det V_{x_{11}}^{-1} = \frac{1}{\det V_{x_{11}}} \quad (15)$$

Учитывая выражения (14) и (15), окончательно получим

$$f_{x_1}(x_1) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_1}{2}} \det V_{x_{11}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[x_1 - m_1]^T V_{x_{11}}^{-1}[x_1 - m_1]\right\} \quad (16)$$

Для полноты картины получим функцию плотности условного нормального распределения

$$f_{x_1|x_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{x_1x_2}(x_1, x_2)}{f_{x_2}(x_2)}$$

Подставляя формулы (9') и (16) в данное выражение, получим:

$$\begin{aligned}
f_{x_1|x_2}(x_1|x_2) &= \frac{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_1+n_2}{2}} (\det V_x)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[x_1 - m_1; x_2 - m_2] \begin{bmatrix} V_{x_{11}} & V_{x_{12}} \\ V_{x_{21}} & V_{x_{22}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 - m_1 \\ x_2 - m_2 \end{bmatrix}\right\}}{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_2}{2}} [\det V_{x_{22}}]^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[x_2 - m_2]^T V_{x_{22}}^{-1}[x_2 - m_2]\right\}}
\end{aligned}$$

Используя обозначения $V_x^{-1} = \begin{bmatrix} V_{x_{11}} & V_{x_{12}} \\ V_{x_{21}} & V_{x_{22}} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$, перепишем данное соотношение как

$$\begin{aligned}
f_{x_1|x_2}(x_1|x_2) &= \frac{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_1+n_2}{2}} (\det V_x)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\{[x_1 - m_1]^T T_{11}[x_1 - m_1] + 2[x_1 - m_1]^T T_{12}[x_2 - m_2] + [x_2 - m_2]^T T_{22}[x_2 - m_2]\}\right\}}{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_2}{2}} [\det V_{x_{22}}]^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\{[x_2 - m_2]^T V_{x_{22}}^{-1}[x_2 - m_2]\}\right\}}
\end{aligned}$$

Учитывая, что $T_{22} = V_{x_{22}}^{-1} + T_{21}T_{11}^{-1}T_{12}$ и выполняя деление, будем иметь

$$f_{x_1|x_2}(x_1|x_2) = \frac{(\det V_{x_{22}})^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^2 (\det V_x)^{\frac{1}{2}}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \{ [x_1 - m_1]^T T_{11} [x_1 - m_1] + 2[x_1 - m_1]^T \times \right. \\ \left. \times T_{12}[x_2 - m_2] + [x_2 - m_2]^T T_{21}T_{11}^{-1}T_{12}[x_2 - m_2] \} \right\}.$$

Учитывая, что $T_{12} = T_{21}^T$ показатель экспоненты можно записать как

$$-\frac{1}{2} [x_1 - m_1 + T_{11}^{-1}T_{12}(x_2 - m_2)]^T \times \\ \times T_{11}[x_1 - m_1 + T_{11}^{-1}T_{12}(x_2 - m_2)].$$

И, наконец, учитывая, что $T_{11}^{-1}T_{12} = -V_{x_{11}}V_{x_{12}}^{-1}$, а $T_{11}^{-1} = V_{x_{11}} - V_{x_{12}}V_{x_{22}}^{-1}V_{x_{21}}$, окончательно получим:

$$-\frac{1}{2} [x_1 - m_1 - V_{x_{11}}V_{x_{12}}^{-1}(x_2 - m_2)]^T \times \\ \times [V_{x_{11}} - V_{x_{12}}V_{x_{22}}^{-1}V_{x_{21}}]^{-1} [x_1 - m_1 - V_{x_{11}}V_{x_{12}}^{-1}(x_2 - m_2)].$$

Так как

$$\det V_x = \det V_{x_{22}} \det(V_{x_{11}} - V_{x_{12}}V_{x_{22}}^{-1}V_{x_{21}}),$$

то

$$f_{x_1|x_2}(x_1|x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2 (\det \Sigma)^{\frac{1}{2}}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [x_1 - \mu_1]^T \Sigma^{-1} [x_1 - \mu_1] \right\},$$

где

$$\mu_1 = E\{x_1|x_2\} = m_1 + V_{x_{11}}V_{x_{12}}^{-1}(x_2 - m_2),$$

$$\Sigma = \text{var}\{x_1|x_2\} = [V_{x_{11}} - V_{x_{12}}V_{x_{22}}^{-1}V_{x_{21}}].$$

ВЫВОДЫ

В работе предложен строгий вывод функции плотности многомерного нормального распределения для подмножества случайных величин при условии, что исходное множество случайных величин имеет многомерное нормальное распределение. Вывод основан на преобразовании блочных матриц и вычислении обратной блочной матрицы. Полученные формулы вычисления обратной матрицы, когда исходная матрица представлена в виде блоков, имеют самостоятельный интерес.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Voznenko T.I., Gridnev A.A., Kudryavtsev K.Y., Chepin E.V. The Decomposition Method of Multichannel Control System Based on Extended BCI for a Robotic Wheelchair. Biologically Inspired Cognitive Architectures 2019. BICA 2019. Advances in Intelligent Systems and Computing, № 948. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-25719-4_73
2. de Bekker-Grob E.W., Donkers B., Jonker M.F., Stolk E.A. Sample size requirements for discrete-choice experiments in healthcare: a practical guide. The Patient-Patient-Centered Outcomes Research. 2015. V. 8. № 5. P. 373–384. <https://doi.org/10.1007/s40271-015-0118-z>
3. Kock N., Hadaya P. Minimum sample size estimation in PLS-SEM: The inverse square root and gamma-exponential methods. Information Systems Journal. 2018. V. 28 (1). № 227–261. <https://doi.org/10.1111/isj.12131>
4. Сенатов В.В. Центральная предельная теорема. Точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Либроком, 2009. 350 с. ISBN 978-5-397-00011-6
5. Кибзун А.И., Горяинова Е.Р., Наумов А.В., Сиротин А.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 224 с. ISBN 5-9221-0231-1.
6. Де Гроот. Оптимальные статистические решения. М.: МИР, 1974. 492 с.
7. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: МИР, 1989. 655 с. ISBN 5-03-001042-4

Proof of Normality of Distribution of a Subset of Random Variables Based on the Transformation of Block Matrices

K. Y. Kudryavtsev[#]

Institute of Cyber Intelligence Systems, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409, Russia

[#]e-mail: KYKudryavtsev@mephi.ru

Received January 27, 2021; revised January 30, 2021; accepted February 9, 2021

Abstract—The multidimensional normal distribution of random variables is one of the main distributions in solving a large number of statistical problems. It is well known that the joint marginal distribution of a subset of random variables is also normal. In the literature, this fact is proved by finding the characteristic function for a given set of random variables and then finding the characteristic function for the subset of random variables and comparing the characteristic functions. Using this approach, it is relatively easy to prove that the subset of random variables belongs to the normal distribution. However, the density function of the multivariate normal distribution is not found explicitly, the vector of mathematical expectations and the covariance matrix of the distribution are not calculated. It would be interesting to obtain a rigorous proof that if the original set of random variables has a multidimensional normal distribution, then the subset of random variables of this set also has a multidimensional normal distribution with certain parameters. This work provides a rigorous derivation of the multivariate normal distribution density function for the subset of random variables. The vector of mathematical expectations and the covariance distribution matrix are calculated. The inference is based on block matrix operations. The presented formulas for calculating the inverse matrix, when the original matrix is presented in the form of blocks, are of independent interest.

Keywords: multidimensional normal distribution, block matrices, expectation and covariance matrix

DOI: 10.1134/S2304487X21010107

REFERENCES

1. Voznenko T.I., Gridnev A.A., Kudryavtsev K.Y., Chepin E.V. The Decomposition Method of Multichannel Control System Based on Extended BCI for a Robotic Wheelchair. *Biologically Inspired Cognitive Architectures 2019. BICA 2019. Advances in Intelligent Systems and Computing*, № 948. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-25719-4_73
2. de Bekker-Grob E.W., Donkers B., Jonker M.F., Stolk E.A. Sample size requirements for discrete-choice experiments in healthcare: a practical guide. *The Patient-Patient-Centered Outcomes Research*. 2015. vol. 8 no. 5, pp. 373–384. DOI 10.1007/s40271-015-0118-z
3. Kock N., Hadaya P. Minimum sample size estimation in PLS-SEM: The inverse square root and gamma-exponential methods. *Information Systems Journal*. 2018. 227–261. DOI 10.1111/isj.12131.
4. Senatov V.V. *Central'naya predel'naya teorema. Tochnost' approksimacii i asimptoticheskie razlozheniya* [Central limit theorem. Approximation accuracy and asymptotic expansions]. Moscow, Librokom, 2009. 350 p. ISBN 978-5-397-00011-6
5. Kibzun A.I., Goryainova E.R., Naumov A.V., Sirotin A.N. *Teoriya veroyatnostej i mate-maticheskaya statistika* [Theory of Probability and Mathematical Statistics]. M.: FIZMATLIT, 2002. 224 p. ISBN 5-9221-0231-1.
6. De Groot. *Optimal'nye statisticheskie resheniya* [Optimal statistical solutions]. Moscow, MIR, 1974, 492 p.
7. Horn R., Dzhonson CH. *Matrichnyj analiz* [Matrix Analysis]. Moscow, MIR, 1989. 655 p. ISBN 5-03-001042-4