

УДК 539.21(075.8)

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ОБРАБОТКИ ВЕЙВЛЕТ-КОЭФФИЦИЕНТОВ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

© 2021 г. С. Б. Московский¹, А. Н. Сергеев¹, Е. И. Сидорова¹, А. А. Марудов^{1,*}

¹Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, 150000, Россия

*e-mail: marudov.andrey@gmail.com

Поступила в редакцию 14.12.2020 г.

После доработки 12.02.2021 г.

Принята к публикации 09.03.2021 г.

В статье предлагается современный метод очистки данных дифрактометрических измерений от шума, основанный на применении вейвлет-преобразования. Данный метод заключается в многоуровневом одномерном дискретном вейвлет-разложении дифрактограммы и позволяет произвести декомпозицию исходного сигнала на аппроксимирующие и детализирующие коэффициенты, содержащие информацию с полезной и шумовой составляющими. Шумовая составляющая дифрактограммы главным образом проявляется в коэффициентах детализации, полученных на самом низком уровне разложения, к которым необходимо применить пороговую обработку. Таким образом, производится удаление достаточно маленьких коэффициентов, которые считаются шумом. Восстановление дифрактограммы из коэффициентов детализации, прошедших данную обработку, позволит существенно уменьшить уровень шума и, как следствие, погрешность локализации дифракционных максимумов. При этом для получения наилучшей картины необходимо использовать определенные параметры для вейвлет-обработки. В данной статье многоуровневое вейвлет-преобразование исходной дифрактограммы производилось с использованием вещественных вейвлетов различных семейств с дальнейшим анализом зависимости качества обработки от выбора базиса. Исследуется эффективность различных алгоритмов автоматической пороговой обработки коэффициентов разложения в программной среде MatLab, и влияние выбора параметров трешолдинга на качество очистки. Проводится оценка полученных результатов на основе сравнения среднеквадратичного отклонения восстановленной и исходной дифрактограмм, а также на основе их визуального сопоставления. Приводятся примеры фильтрации дифрактограмм предлагаемым методом. В заключение приведены оптимальные параметры трешолдинга для обработки дифрактограмм. Произведен анализ смещения расположения пиков на дифрактограмме прошедшей обработку. Осуществлена интерпретация обнаруженных пиков, которые невозможно было локализовать на исходных спектрах.

Ключевые слова: вейвлет-анализ, трешолдинг, шумоочистка, MatLab, WaveletToolbox

DOI: 10.1134/S2304487X21010120

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

При обработке больших объемов экспериментальных данных с высоким уровнем шума актуальной является задача его снижения. В настоящее время появился новый метод очистки от шума на основе алгоритмов развивающейся теории вейвлетов [1–5]. Он основан на многоуровневом одномерном дискретном вейвлет-разложении исходного сигнала до заданного уровня (глубины) и последующей программно-управляемой пороговой обработке детализирующих коэффициентов разложения. Такой метод получил название трешолдинг (ТШ) [6, 7].

После вейвлет-преобразования исходного массива данных (сигнала) с шумом можно попы-

таться путем частичного или полного удаления в вейвлет-спектре коэффициентов определенного уровня существенно снизить уровень шума при минимальной потере информации. Составляющие шума перенесутся на высоких частотах и наиболее отчетливо проявляются в коэффициентах детализации нижних уровней декомпозиции сигнала. К ним необходимо применить пороговую обработку, позволяющую удалить значительный объем коэффициентов с малыми значениями, которые с большой степенью вероятности являются спектральными составляющими шума [4, 6, 8].

Процедура удаления шума выполняется с использованием ортогональных вейвлетов и включает в себя следующие операции [9–11]:

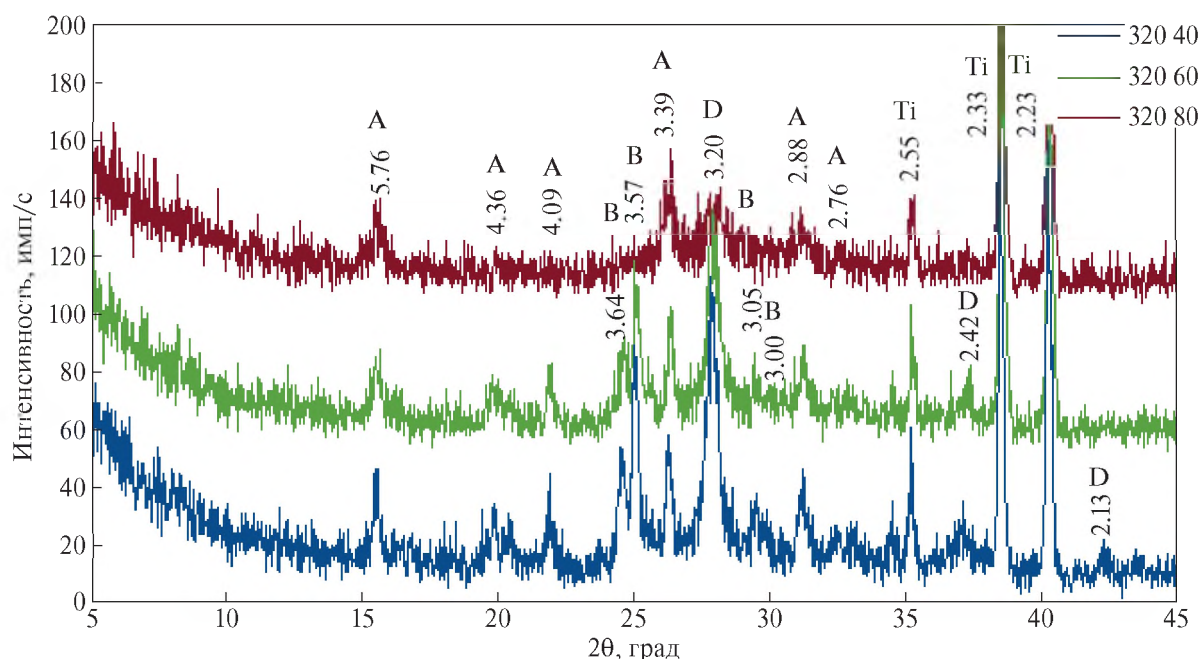


Рис. 1. Дифрактограммы группы образцов оксидов ванадия. Числовые и текстовые надписи относятся к межплоскостным расстояниям и химическому составу напыленного слоя после отжига.

1. Вейвлет-разложение сигнала до уровня N . Значение уровня N определяется частотным спектром информационной части сигнала, которую необходимо максимально в рамках решаемой задачи оставить в рядах аппроксимирующих коэффициентов. Тип и порядок вейвлета может существенно влиять на качество очистки сигнала от шума в зависимости как от формы сигналов, так и от корреляционных характеристик шумов.

2. Задание типа и пороговых уровней очистки по известным данным о характере шумов или по определенным критериям шумов во входном сигнале. Пороговые уровни очистки могут быть глобальными или гибкими (в зависимости от уровня разложения) [12–15].

3. Модификация коэффициентов детализации вейвлет-разложения в соответствии с установленными условиями очистки.

4. Восстановление сигнала на основе коэффициентов аппроксимации и модифицированных детализирующих коэффициентов.

После данной обработки восстановленный сигнал должен, как предполагается, с высокой точностью соответствовать сигналу без шумовой составляющей.

Задачей настоящей работы является программная реализация описанного выше алгоритма в среде MatLab и исследование ее эффективности при варьировании способов задания пороговых уровней и типов используемых вейвлетов.

В качестве материала для обработки были взяты рентгеновские дифрактограммы (рис. 1) образцов, полученные на дифрактометре ARLX'TRA (Thermo Scientific – Швейцария, 2009) в ЦКП ДМНС. Группа образцов 8-320-40, 8-320-60, 8-320-80 (“Номер серии” – “Температура отжига в °C” – “Время отжига в минутах”) представляет из себя образцы титановой фольги с напыленным на нее в разных условиях оксидом ванадия.

В качестве примера подробно рассмотрим обработку дифрактограммы образца 8-320-60 (рис. 2). Дифрактограмма представляет собой график зависимости интенсивности дифрагированного рентгеновского излучения от угла, под которым это излучение было направлено на исследуемую структуру. Съемка проходила в 2θ -геометрии при фокусировке Брэгга–Брентано и режиме работы трубки 30 кВ на 30 мА. Диапазон углов 2θ от 5° до 75° . Результат эксперимента представляет собой файл данных с координатами 3501 точки.

Как видно из рис. 2, изначальный спектр сильно зашумлен. Задача заключается в численном исследовании эффективности шумоподавления при использовании различных типов и семейств вейвлетов и разных способов пороговой обработки вейвлет-спектров.

Для очистки сигнала от шума использовались различные типы вейвлетов: вейвлет Хаара, семейства вейвлетов Добеши, Симлета и Койфлетса. Из исходного сигнала, удалялись области, соответствующие пикам дифрактограммы. После это-

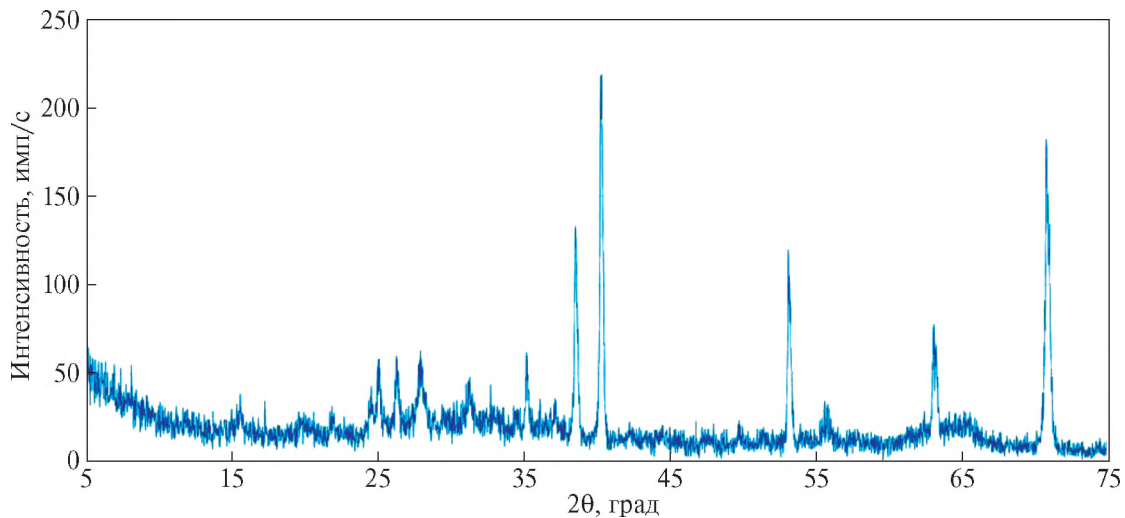


Рис. 2. Дифрактограмма пленок V-O.

го для оставшегося спектра вычислялось средне-квадратичное отклонение (СКО) шума по формуле:

$$std = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (1)$$

Результаты вычислений приведены в табл. 1.

Отметим, что все СКО примерно одинаковы. Применение вейвлета Хаара дает меньшее значение СКО, но для очистки спектра его применение нецелесообразно, так как этот вейвлет после очистки от шума и восстановления сигнала обратным преобразованием значительно искажает форму пиков (рис. 3).

Из использованных вейвлетов наилучший результат был получен для вейвлета Симлета пятого порядка (второе по величине СКО и наиболее близкая форма пиков к исходному спектру).

Мы ограничили декомпозицию пятым уровнем исходя из того, что, как известно [16] 95% полезной информации сигнала содержится именно в первых пяти уровнях и при этом обеспечивается оптимальное соотношение затрачиваемых вычислительных ресурсов и выполнения целей.

АЛГОРИТМЫ ПОРОГОВОЙ ОБРАБОТКИ

На основании возможностей, предоставленных в пакете расширения Wavelet Toolbox компьютерной системы MATLAB, был разработан код, который обрабатывает исследуемый сигнал с использованием разных параметров трешолдинга. Он реализуется в трех вариантах, каждый из которых соответствует своему способу определения порога.

Алгоритм ТШ-1. Самый простой вариант обработки предполагает применение алгоритма, нахо-

дящего значения параметров для всех общих процедур, связанных с удалением шума или сжатием сигналов, при использовании вейвлетов. Эта процедура реализуется следующими функциями [17]:

```
[thr, sorh, keepapp]=ddenc-  
mp('den', 'wv', s);
```

```
[sd1, cd1, ld1, p0, pl2]=wdenc-  
mp('gbl', s, wname, N, thr, sorh, kee-  
papp);
```

Первая задает параметры по умолчанию для удаления шума:

- глобальный порог $thr = \frac{\sqrt{2 \ln L} \cdot E}{0.6745}$, где L – длина сигнала, E – медиана множества модулей коэффициентов разложения;

- аппроксимирующие коэффициенты не подвергаются ТШ ($keepapp=1$);

- “мягкий” пороговый метод ($sorh='s'$).

Таблица 1. Результаты вычисления среднеквадратического отклонения

Вейвлет	Величина СКО	Вейвлет	Величина СКО
Coif1	17.2606	Db4	17.2606
Coif2	17.2590	Db5	17.2332
Coif3	17.2476	Sym1	17.2356
Coif4	17.2294	Sym2	17.2332
Coif5	17.2345	Sym3	17.2733
Haar/Db1	17.1356	Sym4	17.2372
Db2	17.2441	Sym5	17.2152
Db3	17.2733		

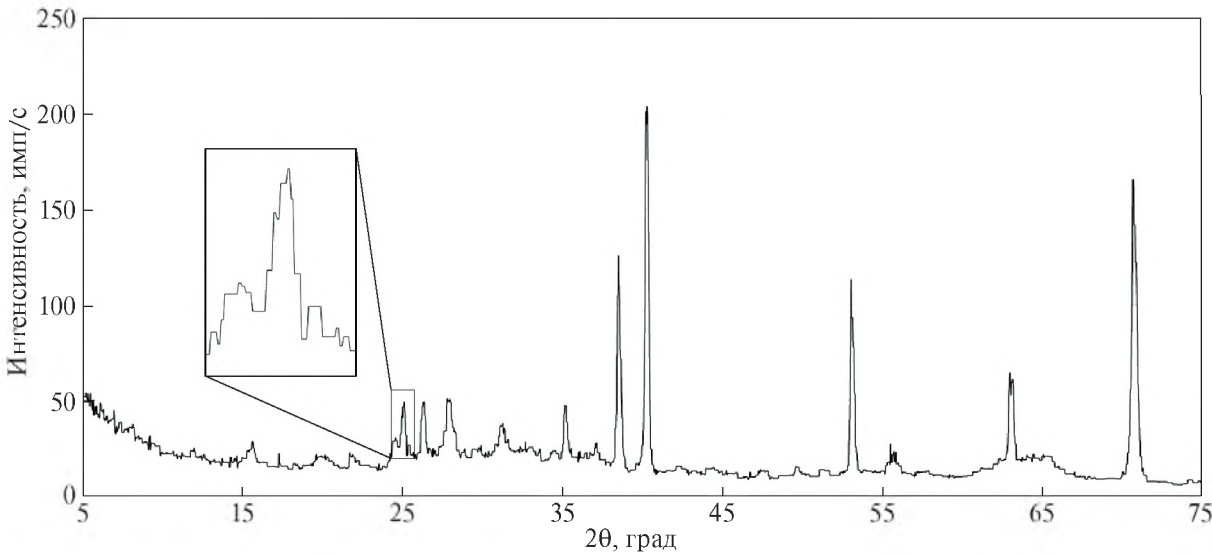


Рис. 3. Результат обработки вейвлетом Хаара.

Вторая, используя полученные параметры, производит очистку сигнала заданным вейвлетом (переменная *wname*).

Алгоритм ТШ-2. Второй вариант основан на алгоритме определения порога по стратегии Бирге–Массарта [18]. Его применение сводится к отбрасыванию на *i*-м уровне всех коэффициентов, кроме *n_i* самых больших. Их число определяется выражением:

$$n_i = \frac{m}{(j + 2 - i)^{\alpha}}, \tag{2}$$

где *j* – уровень разложения, *m* и *α* – параметры.

В MATLAB операция вычисления порога и последующей обработки имеет вид [17]:

```
[c, l]=wavedec(s, N, wname);  
[thr, nkeep]=wdbcmb(c, l, alpha, m);  
[sd2, cd2, ld2, p0, pl2]=wdencmp('lvd', s, wname, N, thr, sorh).
```

Алгоритм ТШ-3. Еще один вариант обработки использует адаптивный порог, который задается путем выбора критерия оценки *R* [19]. Возможно использование одного из четырех значений *R*:

– *rigrsure* – SURE порог, использующий принцип Штейна несмещенной оценки риска [20];

– *sqtwolog* – порог, аналогичный используемому в алгоритме ТШ-1;

– *heursure* – эвристический вариант порога, представляющий из себя комбинацию двух предыдущих вариантов;

– *minimaxi* – минимаксный, основанный на одноименном методе статистического анализа.

Решающая программная функция алгоритма имеет вид [17]:

```
sd3=wden(s, R, sorh, scal, N, wname).
```

Переменная *scal* определяет тип перемасштабирования порога, которое применяется в случае отклонения структуры шума от модели “белого” в интервале [0, 1]. Параметр имеет следующие текстовые значения:

- ‘one’ – без масштабирования;
- ‘sln’ – перемасштабирование с использованием единственной оценки уровня шума на основании коэффициентов разложения первого уровня;
- ‘mln’ – перемасштабирование с использованием оценок уровня шума, зависящих от уровня.

Таблица 2. Результаты вычисления среднеквадратического отклонения

Алгоритм	ТШ-1	ТШ-2	ТШ-3			
			<i>sqtwolog</i>	<i>rigrsure</i>	<i>heursure</i>	<i>minimaxi</i>
СКО	16.5911	17.1336	16.6019	17.2603	16.8690	17.2152

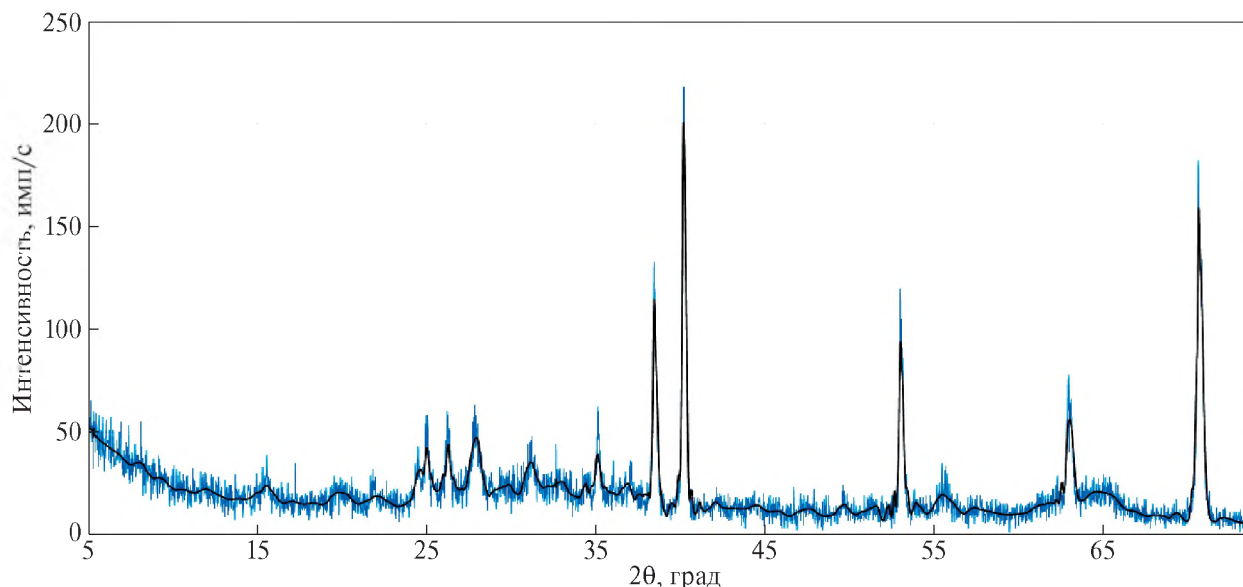


Рис. 4. Результат обработки с применением алгоритма ТШ-1.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБРАБОТКИ

Для анализа обработанных сигналов в итоговый код также были добавлены две дополнительные части.

Первая позволяет вычислить СКО очищенного сигнала по отношению к исходному, а также осуществляет выбор наилучшего метода, путем сравнения результатов вычисления стандартного отклонения:

```
st1=std(sd1);
st=min(st1, st2, st3);
if st == st1
sd = sd1;
best='ТШ-1'
end;
if st == st2
sd = sd2;
best='ТШ-2'
end;
if st == st3
sd = sd3;
best='ТШ-3'
end;
```

Вторая часть осуществляет вывод очищенной дифрактограммы:

```
figure;
plot(ttheta, s);
plot(ttheta, sd, 'k', 'LineWidth',
1);
xlabel('2\theta, \circ'); ylabel
('Интенсивность, имп/с');
```

```
gridon; xlim([5, 75]); ylim([0, 250]);
set(gca, 'XTick', 5:10:75).
```

Результаты вычислений СКО для каждого алгоритма с использованием для вейвлета Симлета пятого порядка приведены в табл. 2.

Можно заметить, что для алгоритма ТШ-1 и его аналога в ТШ-3 характерны меньшие величины СКО, чем для других алгоритмов. Визуальное исследование очищенных сигналов (рис. 4) позволяет сделать вывод, что такие показатели СКО достигаются за счет большего искажения первоначального сигнала, в особенности у основания пиков.

Таким образом, из всех рассмотренных алгоритмов пороговой обработки вейвлет-коэффициентов наиболее предпочтительным оказался адаптивный алгоритм с эвристическим критерием оценки и *sln*-перемасштабированием шума.

Таблица 3. Сравнение расположения некоторых пиков до и после обработки с эталонными значениями

2θ до обработки, °	2θ после обработки, °	2θ эталон, °	Вещество
15.4820	15.4420	15.4210	V ₂ O ₅
19.7820	19.7620	19.7460	V ₃ O ₇
21.8820	21.8020	21.7868	V ₂ O ₅
26.2600	26.2420	26.2206	V ₂ O ₅
29.4420	29.3620	29.3380	VO ₂
30.3400	30.3220	30.3363	V ₃ O ₇
31.1800	31.1220	31.1370	V ₃ O ₇

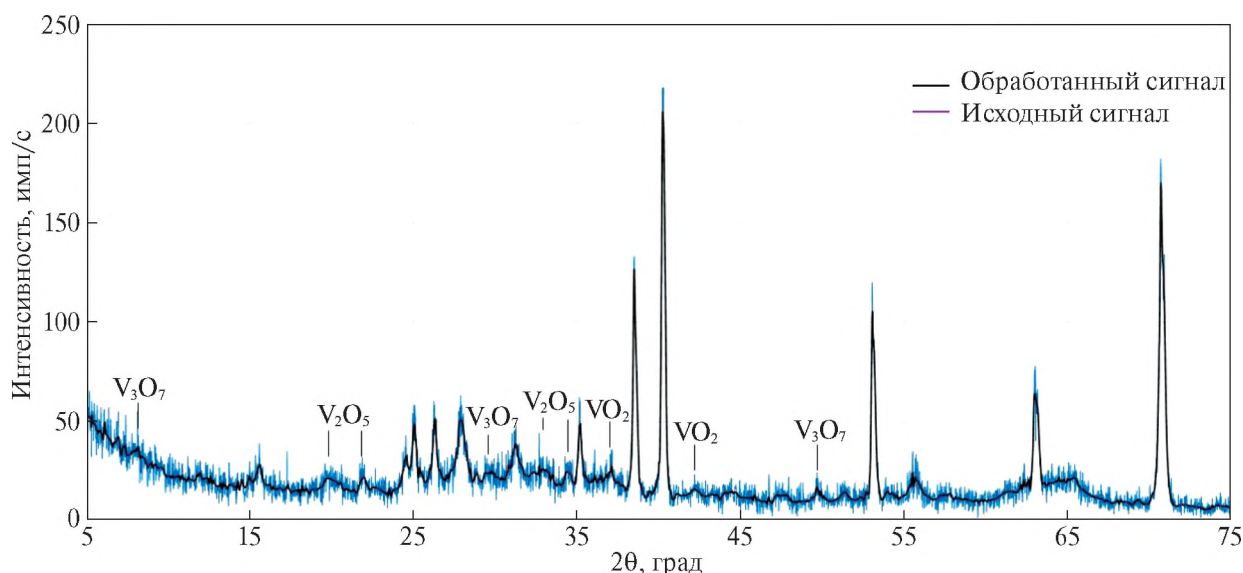


Рис. 5. Результат обработки на фоне исходного сигнала с указанием обнаруженных пиков.

Причем обработку предпочтительно проводить с помощью вейвлета Симлета, применяя “мягкое” пороговое ограничение.

Далее был проведен анализ положения пиков после очистки дифрактограммы, который показал, что наблюдается смещение некоторых пиков в сторону эталонных значений. Список этих пиков и их сравнение с эталоном представлены в таблице 3.

Кроме того, на очищенной дифрактограмме появилась возможность обнаружить малозаметные и даже практически неразличимые на фоне шума пики (рис. 5). Интерпретация проводилась с помощью базы рентгенодифракционных данных ICDD PDF2 2009 с использованием следующих карточек: V2O5 01-075-0457, V3O7 01-071-0454, VO2 01-072-0514.

При обработке других дифрактограмм были получены аналогичные результаты, анализ которых согласуется с приведенным выше.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана и применена на практике программная реализация алгоритмов очистки сигналов от шума на основе вейвлет-преобразований в среде MatLab для нескольких вариантов полученных в эксперименте дифрактограмм.

Исследована эффективность этих алгоритмов в условиях поставленной задачи. Сравнение качества фильтрации каждого из них показало, что алгоритм адаптивного трешолдинга с эвристическим критерием оценки проявляет себя лучше остальных при обработке дифрактограмм.

Вейвлет-фильтрация позволила уменьшить влияние высокочастотного шума на форму дифракционных максимумов.

Произведенная обработка дает возможность более точно различить локальные особенности сигнала, что значительно упрощает дальнейший анализ дифрактограмм и существенно повышает точность определения свойств исследуемых пленок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика. 2001. 464 с.
2. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // УФН. 1996. № 166 (11). С. 1145–1170.
3. Филипов Т.К. Применение вейвлет-преобразования информации при техническом анализе // Научно-технические ведомости, 2012. № 5 (157). С. 95–98.
4. Яковлев А.Н. Введение в вейвлет-преобразования. Новосибирск: НГТУ, 2003. 104 с.
5. Блаттер К. Вейвлет-анализ. Основы теории. М.: РИЦ Техносфера. 2004. 280 с.
6. Mallat S. A Wavelet tour of signal processing. Second Edition. Academic Press. 1999. 620 p.
7. Обидин М.В., Серебровский А.П. Вейвлеты и адаптивный трешолдинг // Информационные процессы. 2013. Т. 13. № 2. С. 91–99.
8. Alsaidi M., Altaher, Mohd T. Ismail. A Comparison of Some Thresholding Selection Methods for Wavelet Regression // World Academy of Science, Engineering and Technology. 2010. № 62. P. 119–125.
9. Дьяконов В., Абраменкова И. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. СПб.: Питер, 2002. 608 с.

10. Лазарева А.Г. Математика вейвлет-преобразований // Молодой ученый. 2009. № 3. С. 30–34
11. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб.: Изд-во ВУС, 1999. 204 с.
12. Нагорнов О.В. Вейвлет-анализ в примерах. Учебное пособие. М.: НИЯУ МИФИ. 2010. 120 с.
13. Luisier F., Blu T., Unser M. A new SURE approach to Image denoising: interscale orthonormal wavelet thresholding // IEEE transactions on image processing. 2007. V. 38. № 5. P. 1323–1342.
14. Chang S.G., Yu B., Vetterli M. Adaptive Wavelet Thresholding for image Denoising and Compression // IEEE Trans. Image Processing. 2000. V. 9. № 9. P. 1532–1546.
15. Antoniadis A., Fryzlewicz P. Parametric modelling of thresholds across scales in wavelet regression // Biometrika. 2006. V. 93. № 2. P. 465–471.
16. Бурнаев Е.В. Применение вейвлет-преобразования для анализа сигналов. М.: МФТИ. 2007. 138 с.
17. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М.: ДМК Пресс. 2014. 628 с.
18. Birgé L., Massart P. From model selection to adaptive estimation / in D. Pollard (ed). Festschrift for L. Le Cam. Springer. 1997. P. 55–88.
19. Алексеев К.А. Теория и практика шумоподавления в задаче обработки сейсмоакустических сигналов: Электронный ресурс // http://www.nsu.ru/matlab/MatLab_RU/wavelet/ (дата обращения 22.12.2020)
20. Donoho D.L. De-Noising by Soft Thresholding // IEEE Transactions on Information Theory. 1995. V. 41. № 3. P. 613–627.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2021, vol. 10, no. 1, pp. 77–84

Software Implementation of the Algorithm for Processing Wavelet Coefficients in Problems of Experimental Data Analysis

S. B. Moskovsky^a, A. N. Sergeev^a, E. I. Sidorova^a, and A. A. Marudov^{a, #}

^a Yaroslavl State University, Yaroslavl, 150000 Russia

[#]e-mail: marudov.andrey@gmail.com

Received December 14, 2020; revised February 12, 2021; accepted March 9, 2021

Abstract—A modern method based on the wavelet transform has been proposed to clean diffractometric measurement data from noise. This method involves a multilevel one-dimensional discrete wavelet decomposition of the diffraction pattern and allows decomposing the source signal into approximating and detailing coefficients containing information with useful and noise components. The noise component of the diffraction pattern is mainly manifested in the detail coefficients obtained at the lowest decomposition level, to which threshold processing must be applied. This removes sufficiently small coefficients that are considered noise. The reconstruction of the diffraction pattern from the detail coefficients that have passed this processing will significantly reduce the noise level and, as a result, the localization error of the diffraction maxima. In order to obtain the best picture, it is necessary to use certain parameters for wavelet processing. In this work, the multilevel wavelet transform of the original diffraction pattern has been performed using real wavelets of various families with further analysis of the dependence of the processing quality on the choice of a basis. The efficiency of various algorithms for automatic threshold processing of decomposition coefficients in the MatLab software environment and the influence of the choice of thresholding parameters on the quality of cleaning are investigated. The results obtained are evaluated by comparing the standard deviation of the reconstructed and original diffraction patterns, as well as by comparing them visually. Examples of filtering diffraction patterns by the proposed method are given. In conclusion, the optimal parameters of thresholding for processing diffraction patterns are given. The analysis of the displacement of the location of peaks on the processed diffraction pattern is performed. The detected peaks, which could not be localized on the original spectra, have been interpreted.

Keywords: wavelet analysis, thresholding, noise cleaning, MatLab, Wavelet Toolbox

DOI: 10.1134/S2304487X21010120

REFERENCES

1. Dobeshi I. *Desyat' lektiy po veyvletam* [Ten lectures on wavelets]. Izhevsk: NITS Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika. 2001. 464 p. (in Russian)
2. Astaf'yeva N.M. Veyvlet-analiz: osnovy teorii i primery primeneniya [Wavelet Analysis: Theory Foundations and Application Examples]. *UFN*. 1996, no 166 (11), pp. 1145–1170. (in Russian)

3. Filipov T.K. Primeneniye Veyvlet-preobrazovaniya informatsii pri tekhnicheskoy analize [Application of Wavelet transform of information in technical analysis]. *Nauchno tekhnicheskiye vedomosti*, 2012, no. 5 (157). pp. 95–98. (in Russian)
4. Yakovlev A.N. *Vvedeniye v veyvlet-preobrazovaniya* [Introduction to wavelet transforms]. Novosibirsk: NGTU. 2003. 104 p. (in Russian)
5. Blatter K. *Veyvlet-analiz. Osnovy teorii*. [Wavelet analysis. Foundations of the theory]. Moscow: RITS Tekhnosfera. 2004. 280 p. (in Russian)
6. Mallat S. *A Wavelet tour of signal processing*. Second Edition. Academic Press. 1999. 620 p.
7. Obidin M.V., Serebrovskiy A.P. Veyvlety i adaptivnyy tresholding [Wavelets and adaptive thresholding]. *Informatsionnyye protsessy*. 2013, vol. 13, no 2, pp. 91–99. (in Russian)
8. Alsaidi M., Altaher, Mohd T., Ismail. A Comparison of Some Thresholding Selection Methods for Wavelet Regression. *World Academy of Science, Engineering and Technology*. 2010, no. 62, pp. 119–125.
9. D'yakonov V., Abramenkova I. *MATLAB. Obrabotka signalov i izobrazheniy* [MATLAB. Signal and image processing]. Spetsial'nyy spravochnik. St. Petersburg: Piter. 2002. 608 p. (in Russian)
10. Lazareva A.G. Matematika veyvlet-preobrazovaniy [Wavelet transform mathematics]. *Molodoy uchenyy*. 2009, no 3, pp. 30–34. (in Russian)
11. Vorob'yov V.I., Gribunin V.G. *Teoriya i praktika veyvlet-preobrazovaniya* [Theory and practice of wavelet transform]. St. Petersburg: Izdatel'stvo VUS. 1999, 204 p. (in Russian)
12. Nagornov O.V. *Veyvlet-analiz v primerakh* [Wavelet analysis in examples]. Uchebnoye posobiye. Moscow: NIYAU MIFI. 2010. 120 p. (in Russian)
13. Luisier F., Blu T., Unser M. A new SURE approach to Image denoising: interscale orthonormal wavelet thresholding. *IEEE transactions on image processing*. 2007, vol. 38, no. 5, pp. 1323–1342.
14. Chang S.G., Yu V., Vetterli M. Adaptive Wavelet Thresholding for image Denoising and Compression. *IEEE Trans. Image Processing*. 2000, vol. 9, no. 9, pp. 1532–1546.
15. Antoniadis A., Fryzlewicz P. Parametric modelling of thresholds across scales in wavelet regression, *Biometrika*. 2006, vol. 93, no. 2, pp. 465–471.
16. Burnayev Ye.V. *Primeneniye veyvlet-preobrazovaniya dlya analiza signalov* [Application of wavelet transform for signal analysis]. Moscow. MFTI. 2007, 138 p. (in Russian)
17. Smolentsev N.K. *Osnovy teorii veyvletov. Veyvlety v MATLAB* [Fundamentals of the theory of wavelets. Wavelets in MATLAB]. Moscow. DMK Press. 2014, 628 p. (in Russian)
18. Birgé L., Massart P. From model selection to adaptive estimation / in D. Pollard (ed). *Festschrift for L. Le Cam*. Springer. 1997, pp. 55–88.
19. Alekseyev K.A. *Teoriya i praktika shumopodavleniya v zadache obrabotki seismoakusticheskikh signalov* [Theory and practice of noise reduction in the problem of processing seismoacoustic signals]. Available at: http://www.nsu.ru/matlab/MatLab_RU/wavelet/ (accessed 22.12.2020)
20. Donoho D.L. De-Noising by Soft Thresholding. *IEEE Transactions on Information Theory*. 1995, vol. 41, no. 3, pp. 613–627.