

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

МЕТОД МЕЛЬНИКОВА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА

© 2021 г. С. Ф. Лаврова^{1,*}, Н. А. Кудряшов^{1,**}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, 115409, Россия

*e-mail: infuriatedot@gmail.com

**e-mail: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию 01.04.21 г.

После доработки 20.04.2021 г.

Принята к публикации 27.04.2021 г.

Рассматривается обобщенное уравнение Дуффинга, полученное путем перехода к переменным бегущей волны в уравнении для описания распространения импульсов в оптическом волокне. Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка представляется в виде динамической системы. Для обобщенного уравнения Дуффинга без учета внешней силы находятся стационарные точки и исследуется их устойчивость. Результаты исследования представляются в таблице, где для каждой из пяти точек покоя указывается тип устойчивости в зависимости от значений параметров уравнения. Найдены значения параметров, при которых система обладает гомоклиническими и гетероклиническими орбитами. Используя метод Мельникова, обнаружено, что при некоторых значениях параметров гомоклинический хаос в изучаемой системе реализуется всегда. Для контроля хаотической динамики в системе используется затухание. Получены ограничения на параметры новой системы, при которых в ней реализуется хаос. Строятся бифуркационные диаграммы системы в отсутствие контроллера и в его присутствии. По алгоритму Беннетина рассчитывается старший Ляпуновский показатель динамической системы как функция амплитуды вынуждающей силы. Полученные при численном анализе результаты согласуются с полученными теоретически по методу Мельникова.

Ключевые слова: метод Мельникова, показатели Ляпунова, динамическая система, уравнение Дуффинга, хаос

DOI: 10.1134/S2304487X21020073

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время одной из важных и интенсивно изучаемых задач является описание распространения импульсов в оптическом волокне. Динамику таких процессов описывает целый ряд нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, таких как уравнение Радхакришнана–Кунду–Лакшманана [1–3], уравнение Трики–Бисваса [4, 5], уравнение Чена–Ли–Лу [6, 7], уравнение Бисваса–Аршида [8, 9] и другие.

Данная работа посвящена исследованию нелинейных динамических режимов математической модели для описания распространения импульсов в оптическом волокне, основанной на нелинейном уравнении Шредингера с нелинейностью, зависящей от произвольной степени. Уравнение в частных производных, описывающее эту модель, имеет следующий вид [10]

$$iq_t + \alpha q_{xx} + (a|q|^n + b|q|^{2n})q = 0, \quad (1.1)$$

где $q(x, t)$ комплекснозначная функция, описывающая профиль волны, α , a , b — параметры модели, $n \in \mathbb{N}$.

В действительности оптические импульсы при распространении подвергаются возмущениям внешней среды, поэтому имеет важное значение рассмотреть уравнение (1.1) с приложенной внешней силой. Изучению динамики нелинейного уравнения Шредингера с внешним воздействием посвящены работы [11, 12].

Во втором разделе работы в уравнение (1.1) при $n = 2$ вводится внешняя сила и производится переход к переменным бегущей волны для возмущенного уравнения. Полученное уравнение является обобщенным уравнением Дуффинга. В третьем разделе метод Мельникова применяется для доказательства существования хаоса в изучаемой системе. Четвертый раздел посвящен построению бифуркационных диаграмм и расчету Ляпуновских показателей обобщенного уравнения Дуффинга.

2. ПЕРЕХОД К ПЕРЕМЕННЫМ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ В ВОЗМУЩЕННОМ УРАВНЕНИИ (1.1)

Рассмотрим уравнение (1.1) с учетом внешней силы

$$iq_t + \alpha q_{xx} + (a|q|^n + b|q|^{2n})q = fe^{i(kx - \omega_0 t)} \cos \omega(x - C_0 t), \quad n \geq 1, \quad (2.1)$$

где f , ω это амплитуда и частота внешнего воздействия.

Предположим, что уравнение (2.1) имеет решения в переменных бегущей волны

$$q(x, t) = y(z)e^{i(kx - \omega_0 t)}, \quad z = x - C_0 t, \quad (2.2)$$

где C_0 — скорость распространения волны.

Подставляя (2.2) в уравнение (2.1) и приравнявая в полученном выражении к нулю действительные и мнимые части, получим следующую систему уравнений

$$\alpha y_{zz} + (\omega_0 - \alpha k^2)y + ay^{n+1} + by^{2n+1} = f \cos \omega z, \quad (2.3) \\ (2\alpha k - C_0)y_z = 0.$$

Пусть $\alpha = \frac{C_0}{2k}$, тогда второе уравнение в системе (2.3) выполняется тождественно, а первое принимает вид

$$y_{zz} + \left(\frac{2k\omega_0}{C_0} - k^2 \right)y + \frac{2ka}{C_0}y^{n+1} + \frac{2kb}{C_0}y^{2n+1} = \frac{2kf}{C_0} \cos \omega z. \quad (2.4)$$

Введем в уравнении (2.4) следующие обозначения:

$$2k\omega_0/C_0 - k^2 = -\beta, \quad 2ka/C_0 = \gamma_1, \quad (2.5) \\ 2kb/C_0 = \gamma_2, \quad 2kf/C_0 = A_0.$$

Тогда уравнение (2.4) запишется в виде:

$$y_{zz} - \beta y + \gamma_1 y^{n+1} + \gamma_2 y^{2n+1} = A_0 \cos \omega z. \quad (2.6)$$

Рассмотрим уравнение (2.6) при $n = 2$

$$y_{zz} - \beta y + \gamma_1 y^3 + \gamma_2 y^5 = A_0 \cos \omega z. \quad (2.7)$$

Без ограничения общности положим $\beta = 1$ (такого значения можно добиться путем масштабирования переменных и параметров) и запишем (2.7) в форме динамической системы, предварительно обозначив y как y_1 :

$$y_{1z} = y_2, \quad (2.8) \\ y_{2z} = y_1 - \gamma_1 y_1^3 - \gamma_2 y_1^5 + A_0 \cos \omega z.$$

Таким образом, уравнение (2.1) свелось к возмущенной Гамильтоновой системе (2.8), к исследованию динамики которой можно применить метод Мельникова.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ ХАОСА В СИСТЕМЕ (2.8) ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА МЕЛЬНИКОВА

Известно, что одним из эффективных способов исследования динамики возмущенных Гамильтоновых систем типа (2.8) является метод Мельникова [13, 14]. Он заключается в построении функции Мельникова, описывающей расстояние между устойчивым и неустойчивым многообразиями системы. Если существует точка их трансверсального пересечения, в которой функция Мельникова имеет простой ноль, то в системе существует хаос типа подковы.

Запишем систему уравнений (2.8) в виде возмущенной Гамильтоновой системы

$$y_{1z} = y_2, \quad (3.1) \\ y_{2z} = y_1 - \gamma_1 y_1^3 - \gamma_2 y_1^5 + \epsilon F(z),$$

где ϵ — малый параметр, $A = A_0/\epsilon$, $F(z) = A \cos \omega z$ — возмущение системы.

3.1. Анализ устойчивости стационарных точек системы (3.1)

Проведем анализ стационарных точек невозмущенной ($\epsilon = 0$) системы (3.1). Чтобы их найти, нужно приравнять правые части уравнений к нулю. Легко заметить, что каждая из стационарных точек системы находится на оси y_1 . $O = (0, 0)$ всегда является точкой покоя невозмущенной системы (3.1). Координаты других точек покоя (если они есть) по оси y_1 находятся из следующего уравнения

$$y_1^4 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} y_1^2 - \frac{1}{\gamma_2} = 0, \quad \gamma_2 \neq 0. \quad (3.2)$$

Дискриминант (3.2)

$$D = -\frac{16(4\gamma_2 + \gamma_1^2)^2}{\gamma_2^5}. \quad (3.3)$$

В зависимости от знаков D и коэффициентов уравнения (3.2) возможны следующие ситуации:

Случай 1. $\gamma_2 > 0$. Уравнение (11) имеет два вещественных корня: $S_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma_2(-\gamma_1 + \sqrt{4\gamma_2 + \gamma_1^2})}}{2\gamma_2}$.

Случай 2. $\gamma_2 < 0$ и $\gamma_1 \leq 0$. Все корни комплексные.

Случай 3. $\gamma_2 < 0$, $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_1^2 + 4\gamma_2 < 0$. Все корни комплексные.

Случай 4. $\gamma_2 < 0$, $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_1^2 + 4\gamma_2 > 0$. Все корни вещественные: $S_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}\sqrt{\gamma_2(-\gamma_1 + \sqrt{4\gamma_2 + \gamma_1^2})}}{2\gamma_2}$ и

$$S_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{2}\sqrt{-\gamma_2(\gamma_1 + \sqrt{4\gamma_2 + \gamma_1^2})}}{2\gamma_2}.$$

Случай 5. $\gamma_1^2 + 4\gamma_2 = 0$, $\gamma_1 > 0$. Два вещественных корня кратности два: $S_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma_1}}$.

Случай 6. $\gamma_1^2 + 4\gamma_2 = 0$, $\gamma_1 < 0$. Пара комплексно-сопряженных корней кратности 2.

Устойчивость стационарных точек невозмущенной системы (3.1) определяется собственными значениями матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3\gamma_1 y_1^2 - 5\gamma_2 y_1^4 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

где y_1 координата стационарной точки. В зависимости от собственных значений матрицы (3.4) для вышеприведенных точек покоя типы устойчивости указаны в табл. 1.

Гамильтониан невозмущенной системы уравнений (3.1) ($\epsilon = 0$) имеет вид

$$H(y_1, y_2) = \frac{y_2^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} + \frac{\gamma_1 y_1^4}{4} + \frac{\gamma_2 y_1^6}{6}. \quad (3.5)$$

3.2. Гомоклинные и гетероклинные орбиты системы (3.1)

Основываясь на анализе устойчивости точек покоя и выражении для Гамильтониана, можно сформулировать следующую лемму о существовании гомоклинных и гетероклинных орбит в системе (3.1):

Лемма 3.1. О значениях параметров, при которых система (3.1) обладает гомоклинными и гетероклинными орбитами.

(i) При $\gamma_2 > 0$ седловую точку покоя O саму с собой соединяют две гомоклинные орбиты Γ_{lho}^+ и Γ_{lho}^- .

(ii) При $\gamma_2 < 0$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_1^2 + \frac{16}{3}\gamma_2 > 0$ седловая точка O соединяется сама с собой гомоклиническими орбитами Γ_{2ho}^+ и Γ_{2ho}^- . Если помимо этого $(3\gamma_1^2 + 12\gamma_2)rt\gamma_1^2 + 4\gamma_2 + 3\gamma_1^3 + 18\gamma_2\gamma_1 > 0$, то седловые точки S_3 и S_4 соединяют гетероклинные орбиты Γ_{2he}^+ и Γ_{2he}^- .

Найдем явные выражения для реализуемых в системе гомоклинических и гетероклинических орбит. Гомоклиническую орбиту, проходящую через седловую точку O можно найти из выражения для линии уровня Гамильтониана $H(y_1, y_2) = 0$. Учитывая, что $y_2 = dy_1/dz$, получим, что зависимость y_1 от z выражается следующим интегралом:

$$z - z_0 = \int_{y_1(z_0)}^{y_1(z)} \frac{6dy_1}{y_1 \sqrt{36 - 18\gamma_1 y_1^2 - 12\gamma_2 y_1^4}}. \quad (3.6)$$

Таблица 1. Типы устойчивости точек покоя системы (3.1) при $\epsilon = 0$ в зависимости от значений управляющих параметров

Условия на параметры	Точка покоя				
	O	S_1	S_2	S_3	S_4
$\gamma_2 > 0$	Седло	Центр	Центр	—	—
$\gamma_2 < 0$, $\gamma_1 \leq 0$	Седло	—	—	—	—
$\gamma_2 < 0$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_1^2 + 4\gamma_2 < 0$	Седло	—	—	—	—
$\gamma_2 < 0$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_1^2 + 4\gamma_2 > 0$	Седло	Центр	Центр	Седло	Седло
$\gamma_1 > 0$, $\gamma_1^2 + 4\gamma_2 = 0$	Седло	В.т.	—	В.т.	—
$\gamma_1 < 0$, $\gamma_1^2 + 4\gamma_2 = 0$	Седло	—	—	—	—

Выбрав начальное условие $y_1(z_0) = \left(\frac{\sqrt{\gamma_2(-3\gamma_1 + \sqrt{48\gamma_2 + 9\gamma_1^2})}}{2\gamma_2}, 0 \right)$ и проинтегрировав выражение выше, получим

$$z - z_0 = \ln \left(\frac{72 - 18\gamma_1 y_1^2 + 12\sqrt{-12\gamma_2 y_1^4 - 18\gamma_1 y_1^2 + 36}}{2y_1^2} \right) \Big|_{y_1(z_0)}^{y_1(z)}. \quad (3.7)$$

Чтобы найти явное выражение гомоклинических орбит $\Gamma_1^\pm = (y_{lho}^\pm(z), y_{ho}^\pm(z))$ из (3.7) нужно выразить y_1 через z . Для произвольных значений параметров это выражение довольно громоздкое, так что для случаев (i) и (ii) леммы (3.1) выберем частные случаи значений параметров $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$ и $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = -9$, соответственно, с начальными условиями $y_1(z_0) = \pm(3^{1/4}, 0)$ и $y_1(z_0) = (\sqrt{30 - 6\sqrt{13}/6}, 0)$, получим следующие выражения для гомоклинических орбит

$$\begin{aligned} \Gamma_{lho}^\pm &= (y_{lho}^\pm, y_{12ho}^\pm) = \\ &= \left(\pm \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}e^{(z-z_0)}}{\sqrt{e^{4(z-z_0)} + 1}}, \mp \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}e^{(z-z_0)}(e^{4(z-z_0)} - 1)}{(e^{4(z-z_0)} + 1)^{3/2}} \right), \\ \Gamma_{2ho}^\pm &= (y_{2lho}^\pm, y_{22ho}^\pm) = \\ &= \left(\pm \frac{2e^z}{\sqrt{\sqrt{13}e^{4z} + \sqrt{13} + 10e^{2z}}}, \mp \frac{2\sqrt{13}e^z(e^{4z} - 1)}{(\sqrt{13}e^{4z} + \sqrt{13} + 10e^{2z})^{3/2}} \right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

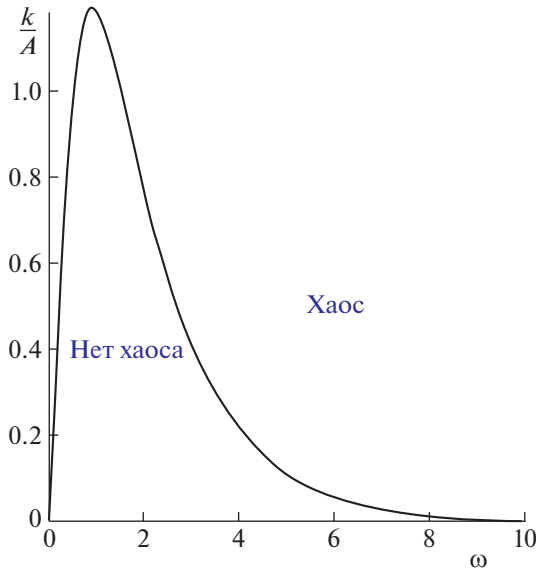


Рис. 1. Условие гомоклинической бифуркации в плоскости $(\omega, k/A)$ при $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1$.

Зная явные выражения гомоклинических орбит системы (3.8), можно исследовать гомоклинический хаос в ней путем построения функции Мельникова.

3.3. Применение метода Мельникова к системе (3.1)

Гомоклинные орбиты (3.8) наблюдаются в системе уравнений (3.1) при $\epsilon = 0$. Добавление возмущения может привести к разрушению гетероклинных и гомоклинных орбит. Тогда по теореме Смейла—Биркхофа [15] в системе может возникнуть хаотическая динамика типа подковы.

Случай (i) леммы (3.1).

Рассчитаем функцию Мельникова системы (3.1) вдоль гомоклинической орбиты $\Gamma_{lho}^\pm$ (3.8)

$$\begin{aligned} M_1^\pm(z_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{12ho}^\pm(z) F(z + z_0) dz = \\ &= \mp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2} e^{\frac{z}{2}} \sqrt{3} (e^{4z} - 1) \cos \omega(z + z_0) dz}{(e^{4z} + 1)^{3/2}} = \\ &= \pm \frac{A \omega \sqrt{2} \sqrt{3} \sin(\omega z_0) \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{i\omega}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{i\omega}{4}\right)}{4\sqrt{\pi}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Функция (3.9) всегда имеет простые нули при некоторых значениях z_0 . Это означает, что при любой амплитуде внешнего возмущения A , уравнение (3.1) имеет трансверсально пересекающиеся устойчивое и неустойчивое многообразия, что ве-

дет к возникновению в системе хаоса типа подковы.

Для контроля обнаруженного в системе хаоса добавим в (3.1) дополнительное возмущение величины $-\epsilon k y_2$

$$\begin{aligned} y_{1z} &= y_2, \\ y_{2z} &= \beta y_1 - \gamma_1 y_1^3 - \gamma_2 y_1^5 + \epsilon(A \cos \omega z - k y_2), \end{aligned} \quad (3.10)$$

и построим функцию Мельникова системы (3.10) вдоль орбиты (3.8)

$$\begin{aligned} M_{1k}^\pm(z_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{12ho}^\pm(z) (A \cos \omega(z + z_0) - k y_{12ho}^\pm(z)) dz = \\ &= \mp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A \sqrt{2} \sqrt{3} e^{\frac{z}{2}} (e^{4z} - 1) \cos \omega(z + z_0) dz}{(e^{4z} + 1)^{3/2}} - \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2k \sqrt{3} e^{\frac{z}{2}} (e^{4z} - 1)^2 dz}{(e^{4z} + 1)^3} = \\ &= \pm \frac{A \omega \sqrt{2} \sqrt{3} \sin(\omega z_0) \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{i\omega}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{i\omega}{4}\right)}{4\sqrt{\pi}} - \frac{\sqrt{3} k \pi}{4}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Чтобы функция Мельникова (3.11) не имела простых нулей нужно, чтобы амплитуда первого слагаемого не превышала амплитуды второго:

$$\left| \frac{\sqrt{2} \sqrt{3} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{i\omega}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{i\omega}{4}\right)}{\sqrt{3} \pi^{3/2}} \right| \leq \frac{k}{A}. \quad (3.12)$$

Условие для возникновения гомоклинического хаоса (3.12) в зависимости от отношения параметров k/A и частоты возмущающей силы ω представлено на рис. 1.

Случай (ii) леммы (3.1) вдоль гомоклинической орбиты $\Gamma_{2ho}^\pm$

$$\begin{aligned} M_2^\pm(z_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{22ho}^\pm(z) F(z + z_0) dz = \\ &= \mp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2A \sqrt{13} e^{\frac{z}{2}} (e^{4z} - 1) \cos \omega(z + z_0) dz}{(\sqrt{13} e^{4z} + \sqrt{13} + 10 e^{2z})^{3/2}} \\ &= \pm I_1 A \sin \omega z_0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sqrt{13} \sin \omega z e^{\frac{z}{2}} (e^{4z} - 1) dz}{(\sqrt{13} e^{4z} + \sqrt{13} + 10 e^{2z})^{3/2}} \quad (3.14)$$

Как и в предыдущем случае, функция Мельникова (3.13) имеет простые нули при любых значениях параметра возмущения, что говорит о возможности в системе хаоса типа подковы.

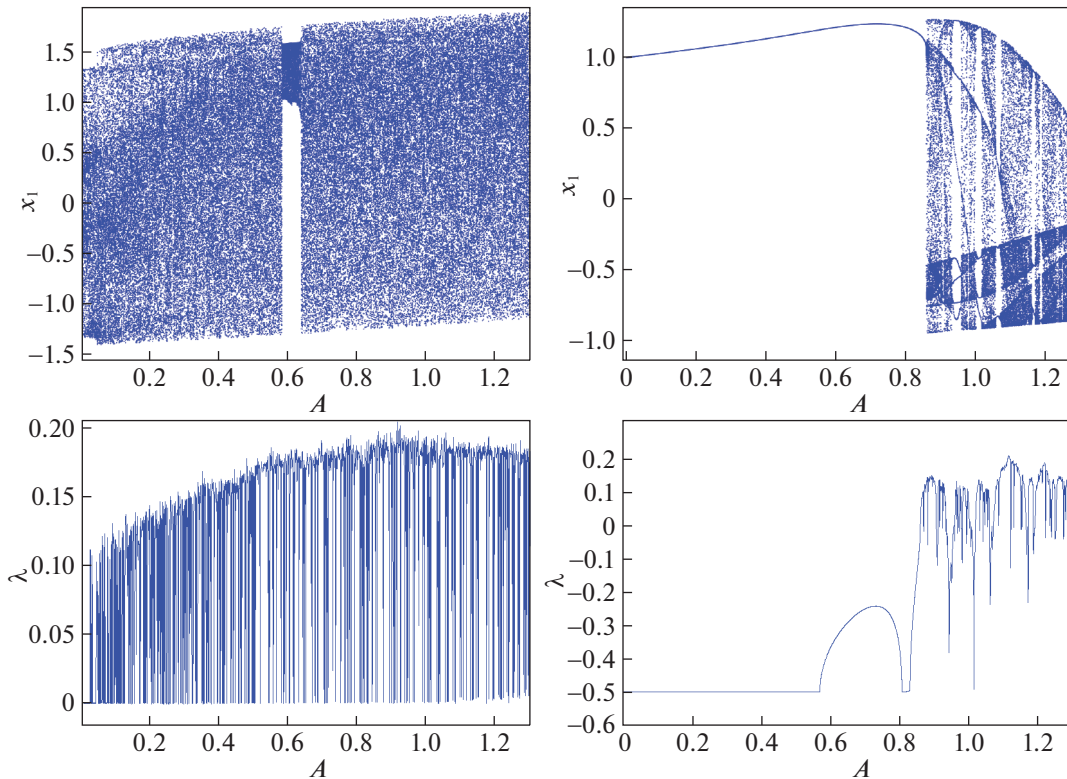


Рис. 2. Бифуркационные диаграммы и зависимости старшего Ляпуновского показателя от параметра A при $\omega = 1$, $\beta = 1$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$ в отсутствии контроллера (слева) и в присутствии контроллера (справа).

Рассмотрение в этом случае системы с новым возмущением (3.10) приводит к следующей функции Мельникова

$$\begin{aligned} M_{2k}^{\pm}(z_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{22_{ho}}^{\pm}(z)(A \cos \omega(z + z_0) - k y_{22_{ho}}^{\pm}(z)) = \\ &= \pm I_1 A \sin \omega z_0 + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{52 k e^{2z} (e^{4z} - 1)^2 dz}{(\sqrt{13} e^{4z} + \sqrt{13} + 10 e^{2z})^3} = \\ &= \pm I_1 \sin \omega z_0 + \frac{5k}{12} - \frac{13k\sqrt{3} \operatorname{arccoth}\left(\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)}{72} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Функция (3.15) не имеет нулей, если

$$\frac{72|I_1|}{30 - 13\sqrt{3} \operatorname{arccoth}(5\sqrt{3}/6)} \leq \frac{k}{A}. \quad (3.16)$$

Таким образом, при рассмотренных значениях параметров система (3.1) согласно критерию Мельникова всегда имеет простые нули, что гарантирует переходный хаотический режим для траекторий, начальные условия которых достаточно близки к невозмущенным гомоклиническим траекториям. Введение возмущения—затухания в систему (3.1) позволяет этот хаос пода-

вить. Критерии существования гомоклинического хаоса в системе (3.10) выражаются неравенствами (3.12) и (3.16).

4. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Проверим аналитические результаты из предыдущего раздела путем построения бифуркационных диаграмм и расчета показателей Ляпунова систем (3.1) и (3.10). Зафиксируем $\omega = 1$ и будем варьировать амплитуду возмущения A системы (3.1) в отсутствие контроллера и системы (3.10) в его присутствии при $k = 1$. Бифуркационные диаграммы и графики показателей Ляпунова как функций амплитуды возмущающей силы представлены на рис. 2. Из них видно, что в отсутствие контроллера хаос в системе для любой амплитуды A динамика системы хаотическая. Полученная с помощью метода Мельникова оценка значения параметра, при котором в (3.10) может возникать хаотическая динамика согласно неравенству (3.12): $A \approx 0.85$. Эта оценка также совпадает с бифуркационным значением параметра A , полученным при вычислении Ляпуновских экспонент системы.

Рисунок 3 иллюстрирует подавление хаоса в системе для случая (ii) леммы (3.1) при помощи

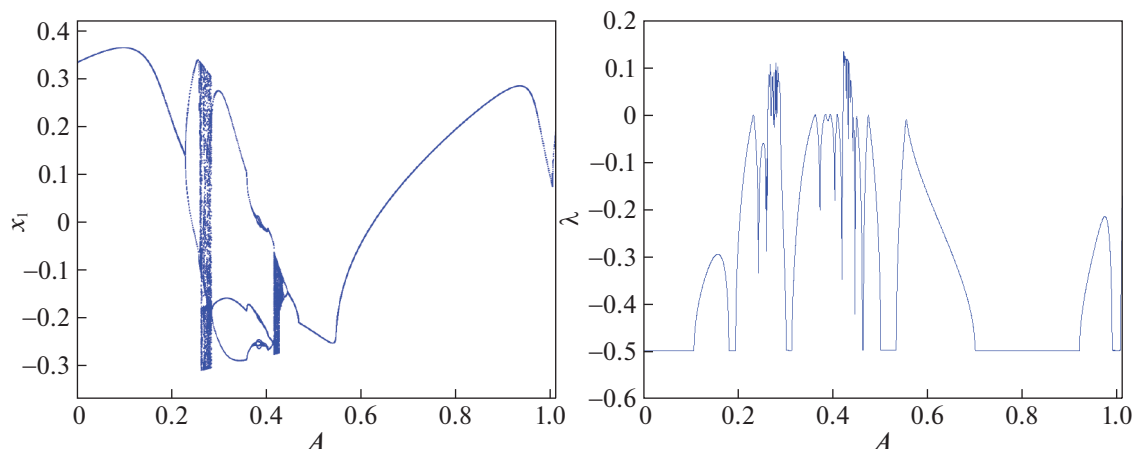


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы и зависимости старшего Ляпуновского показателя от параметра A для $\gamma_1 = 10$, $\gamma_2 = -9$.

контроллера с $k = 1$. Согласно неравенству (3.16) хаос в системе (3.10) может возникнуть при $A \gtrsim 0.25$. При расчетах значение амплитуды внешней силы, при котором в системе возникает хаос: $A \approx 0.23$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ динамических режимов обобщенного уравнения Дуффинга, полученного с учетом переменных бегущей волны в уравнении для описания распространения оптических импульсов.

Исследована устойчивость точек покоя системы без учета возмущающей силы. Найдены ограничения на параметры, при которых изучаемое уравнение обладает гомоклиническими орбитами. Рассчитана функция Мельникова возмущенного обобщенного уравнения Дуффинга вдоль гомоклинических орбит для некоторых значений параметров. Обнаружено, что в рассмотренных случаях в системе всегда реализуется гомоклинический хаос при любых параметрах внешней силы. Для контроля хаотической динамики в систему было введено дополнительное возмущение — затухание. С помощью метода Мельникова найдены ограничения на параметры системы с контроллером, при которых в ней отсутствует хаос. Полученные аналитически результаты согласуются с численно построенными бифуркационными диаграммами и рассчитанными Ляпуновскими показателями.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) (проект 18-29-10025).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Biswas A. Optical soliton perturbation with Radhakrishnan—Kundu—Lakshmanan equation by traveling wave hypothesis // *Optik*. 2018. V. 171. P. 217–220.
2. Lavrova S.F., Kudryashov N.A. Nelinejnye dinamicheskie processy, opisyyaemye sistemoy uravnenij Radhakrishnana—Kundu—Lakshmanana [Nonlinear dynamic processes described by the Radhakrishnan—Kundu—Lakshmanan equations] // *Vestnik NIYaU MIFI*. 2020. V. 9. № 1. P. 45–49. (in Russian)
3. Kudryashov N.A., Safonova D.V., Biswas A. Painlevé Analysis and a Solution to the Traveling Wave Reduction of the Radhakrishnan—Kundu—Lakshmanan Equation // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2019. V. 24. № 6. P. 607–614.
4. Triki H., Biswas A. Sub pico-second chirped envelope solitons and conservation laws in monomode optical fibers for a new derivative nonlinear Schrödinger's model // *Optik*. 2018. V. 173. P. 235–241.
5. Kudryashov N.A. First integrals and solutions of the traveling wave reduction for the Triki—Biswas equation // *Optik*. 2019. V. 185. P. 275–281.
6. Kudryashov N.A. General solution of the traveling wave reduction for the perturbed Chen—Lee—Liu equation // *Optik*. 2019. V. 186. P. 339–349.
7. Biswas A. Chirp-free bright optical soliton perturbation with Chen—Lee—Liu equation by traveling wave hypothesis and semi-inverse variational principle // *Optik*. 2018. V. 172. P. 772–776.
8. Zayed E.M., Shohib R.M. Optical solitons and other solutions to Biswas—Arshed equation using the extended simplest equation method // *Optik*. 2019. V. 185. P. 626–635.
9. Ekici M., Sonmezoglu A. Optical solitons with Biswas—Arshed equation by extended trial function method // *Optik*. 2019. V. 177. P. 13–20.
10. Kudryashov N.A. A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber // *Optik*. 2019. V. 189. P. 42–52.

11. Yin J., Zhao L. Dynamical behaviors of the shock compacton in the nonlinearly Schrödinger equation with a source term // *Physics Letters A*. 2014. V. 378. P. 3516–3522.
12. Yin J., Tang W.K. Perturbation-induced chaos in nonlinear Schrödinger equation with single source and its characterization // *Nonlinear Dynamics*. 2017. V. 90. P. 1481–1490.
13. Mel'nikov V.K. On the stability of a center for time-periodic perturbations // *Trudy moskovskogo matematicheskogo obshchestva*. 1963. V. 12. P. 3–52. (in Russian)
14. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Springer Science & Business Media, 2013.
15. Wiggins S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. Springer Science & Business Media, 2003.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2021, vol. 10, no. 2, pp. 135–142

Melnikov Method for the Generalized Duffing Equation

S. F. Lavrova^{a,#} and N. A. Kudryashov^{a,##}

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: infuriatedot@gmail.com

^{##}e-mail: nakudr@gmail.com

Received April 1, 2021; revised April 20, 2021; accepted April 27, 2021

Abstract—The generalized Duffing equation obtained using traveling wave variables in the equation describing the propagation of pulses in an optical fiber has been considered. An ordinary second-order differential equation is represented as a dynamical system. For the generalized Duffing equation without the external force, equilibrium points are found and their stability is investigated. The results of the study are presented in the table, where the type of stability for each of the five equilibrium points is indicated depending on the parameters of the equation. The parameters at which the system has homoclinic and heteroclinic orbits are found. Using the Melnikov method, it has been found that homoclinic chaos is always implemented in the studied system for some values of the parameters. Damping is used to control chaotic dynamics in the system. Constraints on the parameters at which chaos is implemented are obtained for the damped system. Bifurcation diagrams of the system are plotted in the absence and presence of the controller. According to the Benettin algorithm, the largest Lyapunov exponent of a dynamical system is calculated as a function of the amplitude of the driving force. The results obtained by numerical analysis are in agreement with those obtained theoretically by the Melnikov method.

Keywords: Melnikov method, Lyapunov exponents, dynamical system, Duffing equation, chaos

DOI: 10.1134/S2304487X21020073

REFERENCES

1. Biswas A., Optical soliton perturbation with Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation by traveling wave hypothesis, *Optik*, 2018, vol. 171, pp. 217–220.
2. Lavrova S.F., Kudryashov N.A., Nelinejnye dinamicheskie processy, opisyvaemye sistemoy uravnenij Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanana [Nonlinear dynamic processes described by the Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equations], *Vestnik NIYaU MIFI*, 2020, vol. 9, no. 1, pp. 45–49. (in Russian)
3. Kudryashov N.A., Safonova D.V., Biswas A., Painlevé Analysis and a Solution to the Traveling Wave Reduction of the Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan Equation, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, vol. 24, no. 6, pp. 607–614.
4. Triki H., Biswas A., Sub pico-second chirped envelope solitons and conservation laws in monomode optical fibers for a new derivative nonlinear Schrödinger's model, *Optik*, 2018, vol. 173, pp. 235–241.
5. Kudryashov N.A., First integrals and solutions of the traveling wave reduction for the Triki–Biswas equation, *Optik*, 2019, vol. 185, pp. 275–281.
6. Kudryashov N.A., General solution of the traveling wave reduction for the perturbed Chen–Lee–Liu equation, *Optik*, 2019, vol. 186, pp. 339–349.
7. Biswas A., Chirp-free bright optical soliton perturbation with Chen–Lee–Liu equation by traveling wave hypothesis and semi-inverse variational principle, *Optik*, 2018, vol. 172, pp. 772–776.
8. Zayed E.M., Shohib R.M., Optical solitons and other solutions to Biswas–Arshed equation using the extend-

- ed simplest equation method, *Optik*, 2019, vol. 185, pp. 626–635.
9. Ekici M., Sonmezoglu A., Optical solitons with Biswas–Arshed equation by extended trial function method, *Optik*, 2019, vol. 177, pp. 13–20.
 10. Kudryashov N.A., A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber, *Optik*, 2019, vol. 189, pp. 42–52.
 11. Yin J., Zhao L., Dynamical behaviors of the shock compacton in the nonlinearly Schrödinger equation with a source term, *Physics Letters A*, 2014, vol. 378, pp. 3516–3522.
 12. Yin J., Tang W.K., Perturbation-induced chaos in nonlinear Schrödinger equation with single source and its characterization, *Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 90, pp. 1481–1490.
 13. Mel'nikov V.K., On the stability of a center for time-periodic perturbations, *Trudy moskovskogo matematicheskogo obshchestva*, 1963, vol. 12, pp. 3–52. (in Russian)
 14. Guckenheimer J., Holmes P., *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Springer Science & Business Media, 2013.
 15. Wiggins S., *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer Science & Business Media, 2003.