

## ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЫСОКОДИСПЕРСНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ

© 2021 г. Д. В. Сафонова<sup>1,\*</sup>, Н. А. Кудряшов<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup> Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

\*e-mail: safonovadashav@gmail.com

\*\*e-mail: nakudryashov@mephi.ru

Поступила в редакцию 05.04.2021 г.

После доработки 26.04.2021 г.

Принята к публикации 27.04.2021 г.

Изучается нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных (УЧП), применяемое для описания распространения высокодисперсных импульсов в оптических волокнах. Учитывая гипотезу Абловица–Рамани–Сегура, рассмотрена редукция исходного УЧП к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ). Используя переменные бегущей волны получено ОДУ. Отделяя мнимую часть полученного уравнения от действительной и приравнявая их к нулю, построена система ОДУ. С помощью теста Пенлеве исследована интегрируемость полученной системы. Показано, что рассматриваемая система ОДУ не проходит тест Пенлеве, поскольку существует только один целый индекс Фукса. На третьем шаге теста Пенлеве найдены условия совместности системы ОДУ, учитывая которые, получено одно обыкновенное дифференциальное уравнение шестого порядка. Методом простейших уравнений построены точные решения этого ОДУ. Найденные решения выражаются через эллиптический синус и экспоненциальную функцию, и соответственно имеют форму периодических и уединенных волн. С помощью построенных решений ОДУ получены решения исходного УЧП при некоторых ограничениях на параметры уравнения. Проиллюстрировано, что решения ОДУ представляют собой огибающие для решений УЧП.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, точное решение, тест Пенлеве, оптические импульсы

DOI: 10.1134/S2304487X21020085

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы интенсивно изучаются нелинейные дифференциальные уравнения для описания оптических импульсов с высоким порядком дисперсии. Используя различные методы поиска точных решений, исследователи находят солитонные решения для таких уравнений [1–8]. Некоторые работы посвящены не только построению решений уравнений, описывающих оптические импульсы, но и изучению их аналитических свойств с помощью теста Пенлеве [9–14].

В данной работе рассмотрим уравнение предложенное в статье [15] для описания импульсов в оптическом волокне

$$\begin{aligned} & iu_t + \alpha u_{xx} + i\beta u_{xxx} + \chi u_{xxxx} + i\delta u_{xxxxx} + \\ & + u_{xxxxx} + \mu |u|^2 u + \nu |u|^4 u + \kappa |u|^6 u + \\ & + \rho |u|^2 u_{xx} + \varepsilon |u|^4 u_{xx} + \tau |u|^2 u_{xxx} + i \frac{\varepsilon \delta}{3} |u|^4 u_x + \quad (1) \\ & + i \frac{\rho \delta}{3} |u|^2 u_x + 2i \frac{\tau \delta}{3} |u|^2 u_{xxx} + i \frac{\tau \delta^3}{27} |u|^2 u_x = 0, \end{aligned}$$

где  $u(x, t)$  – комплекснозначная функция, описывающая профиль волны,  $\alpha, \beta, \delta, \kappa, \mu, \nu, \rho, \chi, \varepsilon, \tau$  – параметры уравнения (1),  $i$  – мнимая единица. Это уравнение содержит слагаемые с дисперсией до шестого порядка, также имеются степенные и нелокальные нелинейности.

Для изучения этого уравнения в частных производных (УЧП) рассмотрим его редукцию

к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ). Поскольку, согласно гипотезе Абловица–Рамани–Сегура, задача Коши для УЧП не решается методом обратной задачи рассеяния, если существуют его редукции к ОДУ, которые не проходят тест Пенлеве. Поэтому как возможную для уравнения (1) редукцию будем использовать переменные бегущей волны в виде:

$$u(x, t) = y(z) \exp(i(\psi(z) - \omega t)), \quad z = x - C_0 t. \quad (2)$$

Подставляя  $u(x, t)$  в виде (2), получаем уравнение, в котором можно разделить мнимую и действительную части. Приравнявая их нулю, получаем систему уравнений. В этой системе функция  $\psi(z)$  встречается только в виде своих производных, поэтому введем обозначение  $d\psi/dz = \phi(z)$ . Таким образом получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Уравнение для мнимой части:

$$\begin{aligned} & \delta y_{zzzz} + \tau y^3 \phi_{zzz} + \chi y \phi_{zzz} + 4\chi y_z \phi_{zz} + \\ & + 6\chi y_{zz} \phi_z - 15\delta y_z \phi_z^2 + \epsilon y^5 \phi_z + \rho y^3 \phi_z + \\ & + \alpha y \phi_z + 4\chi y_{zzz} \phi - 10\delta y_{zzz} \phi^2 + 2\alpha y_z \phi - \\ & - 4\chi y_z \phi^3 + 5\delta y_z \phi^4 - 3\beta y_z \phi^2 - 15y \phi_{zzz} \phi^2 - \\ & - 60y_z \phi_{zz} \phi^2 - 90y_{zz} \phi^2 \phi_z - 90y_z \phi_z^2 \phi + \\ & + 15y \phi^4 \phi_z + \frac{2}{3} \tau \delta y^2 y_{zzz} + \frac{1}{27} \tau \delta^3 y^2 y_z + \\ & + \frac{1}{3} \delta \rho y^2 y_z + \frac{1}{3} \epsilon \delta y^4 y_z - 2\tau \delta y^3 \phi_z \phi - \\ & - 2\tau \delta y^2 y_z \phi^2 + 4\tau y^2 y_z \phi_{zz} + 6\tau y^2 y_{zz} \phi_z - \\ & - 10\delta y \phi_{zz} \phi_z + 4\tau y^2 y_{zzz} \phi + 2\epsilon y^4 y_z \phi + \\ & + 2\rho y^2 y_z \phi - 4\tau y^2 y_z \phi^3 - 5\delta y \phi_{zzz} \phi - \\ & - 20\delta y_z \phi_{zz} \phi - 30\delta y_{zz} \phi \phi_z + 10\delta y \phi^3 \phi_z - \\ & - 3\beta y \phi_z \phi - 6\chi y \phi^2 \phi_z - 6\tau y^3 \phi^2 \phi_z - \\ & - 60y \phi \phi_{zz} \phi_z + y \phi_{zzzz} + 6y_z \phi_{zzzz} + \\ & + 15y_{zz} \phi_{zzz} + 20y_{zzz} \phi_{zz} + 15y_{zzzz} \phi_z - 15y \phi_z^3 + \\ & + 6y_{zzzz} \phi - 20y_{zzz} \phi^3 + 6y_z \phi^5 + \beta y_{zzz} - y_z C_0 = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение для действительной части:

$$\begin{aligned} & \tau y^2 y_{zzzz} + \rho y^2 y_{zz} + \epsilon y^4 y_{zz} - \delta y \phi_{zzzz} - \\ & - 5\delta y_z \phi_{zzz} - 10\delta y_{zz} \phi_{zz} - \beta y \phi_{zz} - 10\delta y_{zzz} \phi_z - \\ & - 3\beta y_z \phi_z - 3\tau y^3 \phi_z^2 - 3\chi y \phi_z^2 - 15y \phi_{zzz} \phi_z - \\ & - 60y_z \phi_z \phi_{zz} - 5\delta y_{zzzz} \phi - 3\beta y_{zz} \phi - \\ & - 6\chi y_{zz} \phi^2 + 10\delta y_{zz} \phi^3 + \chi y \phi^4 - \delta y \phi^5 + \\ & + y \phi C_0 - \rho y^3 \phi^2 - \alpha y \phi^2 + \tau y^3 \phi^4 + \beta y \phi^3 - \\ & - \epsilon y^5 \phi^2 - 6y \phi_{zzzz} \phi - 30y_z \phi_{zzz} \phi - 60y_{zz} \phi_{zz} \phi + \\ & + 20y \phi^3 \phi_{zz} - 60y_{zzz} \phi_z \phi + 60y_z \phi^3 \phi_z + \\ & + 45y \phi_z^2 \phi^2 - 6\tau y^2 y_{zz} \phi^2 + \frac{2}{3} \tau \delta y^3 \phi^3 - \\ & - \frac{1}{3} \epsilon \delta y^5 \phi - \frac{2}{3} \tau \delta y^3 \phi_{zz} - 4\tau y^3 \phi_{zz} \phi + \\ & + 10\delta y \phi^2 \phi_{zz} - 4\chi y \phi_{zz} \phi - 12\chi y_z \phi \phi_z + \\ & + 30\delta y_z \phi^2 \phi_z + 15\delta y \phi_z^2 \phi - \frac{1}{27} \tau \delta^3 y^3 \phi - \\ & - \frac{1}{3} \delta \rho y^3 \phi + \chi y_{zzzz} + \alpha y_{zz} + y \omega + \kappa y^7 + \\ & + \mu y^3 + \nu y^5 - 10y \phi_{zz}^2 - 45y_{zz} \phi_z^2 - \\ & - 15y_{zzzz} \phi^2 + 15y_{zz} \phi^4 - y \phi^6 - 2\tau \delta y^2 y_z \phi_z - \\ & - 2\tau \delta y^2 y_{zz} \phi - 12\tau y^2 y_z \phi \phi_z + y_{zzzzzz} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Целью данной работы является построение точных решений нелинейного дифференциального уравнения (1).

Статья состоит из трех разделов. В разделе 2 изучается интегрируемость уравнения (1), с помощью проведения теста Пенлеве для системы уравнений (3)–(4). В разделе 3 выполняется построение точных решений уравнения (1), применяя метод простейших уравнений.

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (3)–(4) ПРИ ПОМОЩИ ТЕСТА ПЕНЛЕВЕ

Прохождение обыкновенным дифференциальным уравнением теста Пенлеве является необходимым условием существования его общего решения. Поэтому для проверки интегрируемости системы уравнений (3)–(4) применим к ней тест Пенлеве. Тест Пенлеве будем выполнять по алгоритму Ковалевской [16–18], который включает в себя три шага: поиск ведущих членов системы уравнений и определение порядков полюсов решений, нахождение индексов Фукса, определение констант интегрирования в решениях уравнений. Проведем эти шаги для системы (3)–(4).

**Шаг 1.** Подставляем  $y(z)$  и  $\phi(z)$  в систему уравнений в следующем виде

$$y(z) = y_0(z - z_0)^{-p}, \quad \phi(z) = \phi_0(z - z_0)^{-q} \quad (5)$$

и выбираем слагаемые, у которых получаются наименьшими показатели степени  $(z - z_0)$ , таким образом находим ведущие члены. Составляя из них уравнения получаем систему

$$\begin{cases} 6y_{zzzz}\phi + 2\epsilon y^4 y_z \phi + \frac{1}{3}\epsilon \delta y^4 y_z + \delta y_{zzzz} + \frac{2}{3}\tau \delta y^2 y_{zz} + 4\tau y^2 y_{zz} \phi = 0 \\ y_{zzzz} + \kappa y^7 + \epsilon y^4 y_{zz} + \tau y^2 y_{zz} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Используя подстановки (5) и уравнения с ведущими членами (6) находим значения порядков полюсов решений и постоянных  $\phi_0$  и  $y_0$

$$p = 1, \quad q = 0, \quad (7)$$

$$\phi_0 = -\frac{1}{6}\delta, \quad (8)$$

$y_0$  является корнем следующего уравнения

$$\kappa y_0^6 + 2\epsilon y_0^4 + 24\tau y_0^2 + 720 = 0 \quad (9)$$

Полученные значения  $p$  и  $q$  целые, поэтому выполним следующий шаг.

**Шаг 2.** Для поиска индексов Фукса используем следующие выражения

$$y(z) = \frac{y_0}{\xi} + a_1 \xi^{j-1}, \quad \phi(z) = \phi_0 + a_2 \xi^j, \quad \xi = z - z_0. \quad (10)$$

Далее подставляем (10) в (6) и собираем коэффициенты при  $a_1$  и  $a_2$ . Из выражений при первых степенях  $a_1$  и  $a_2$  составляем матрицу. Приравняв нулю определитель этой матрицы получаем следующее уравнение для определения индексов Фукса

$$\begin{aligned} & -2y_0 \xi^{2j-13} (\epsilon y_0^4 + 12\tau y_0^2 + 360)(7\kappa y_0^6 + \\ & \quad + (\epsilon j^2 - 3\epsilon j + 10\epsilon) y_0^4 + \\ & + (j^4 \tau - 10j^3 \tau + 35j^2 \tau - 50j \tau + 72\tau) y_0^2 + \\ & \quad + j^6 - 21j^5 + 175j^4 - 735j^3 + \\ & \quad + 1624j^2 - 1764j + 720) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом получаем один целый индекс Фукса  $j_1 = -1$ , остальные индексы Фукса зависят от параметров уравнения. При  $\epsilon = 0$  и  $\tau = 0$  получается два целых индекса Фукса  $j_1 = -1$  и  $j_2 = 8$ . Других значений параметров уравнения, при которых получаются целые индексы Фукса, не обнаружено.

Система уравнений (3)–(4) не проходит тест Пенлеве, так как существует только один целый индекс Фукса. Следовательно исходное уравнение в частных производных (1) не интегрируемо. Однако выполним третий шаг теста Пенлеве, поскольку он часто подсказывает условия совместности для исследуемых систем.

**Шаг 3.** Для выполнения третьего шага используем  $y(z)$  и  $\phi(z)$  в виде следующих разложений

$$\begin{aligned} y(z) &= \frac{y_0}{\xi} + y_1 + y_2 \xi + y_3 \xi^2 + \\ &+ y_4 \xi^3 + y_5 \xi^4 + y_6 \xi^5 + y_7 \xi^6 + y_8 \xi^7, \\ \phi(z) &= \phi_0 + \phi_1 \xi + \phi_2 z \xi^2 + \phi_3 \xi^3 + \\ &+ \phi_4 \xi^4 + \phi_5 \xi^5 + \phi_6 \xi^6 + \phi_7 \xi^7 + \phi_8 \xi^8, \\ &\xi = z - z_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя  $y(z)$  и  $\phi(z)$  в виде (12) в систему уравнений (3)–(4). Приравнявая нулю выражения при различных степенях  $\xi$ , последовательно выражаем коэффициенты разложений (12)  $y_k$  и  $\phi_k$ . Полученные выражения имеют громоздкий вид. Было замечено, что все  $\phi_k$  при нечетном  $k$  равны нулю, а все  $\phi_k$  при четных  $k$ , кроме  $\phi_0$ , можно положить равными нулю, выбрав специальным образом параметры  $\beta$  и  $C_0$ :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2}{3}\chi\delta + \frac{5}{27}\delta^3, \\ C_0 &= -\frac{1}{3}\alpha\delta - \frac{1}{27}\chi\delta^3 - \frac{1}{81}\delta^5. \end{aligned} \quad (13)$$

При этих значениях получаем, что

$$\phi(z) = -\frac{1}{6}\delta,$$

а система (3)–(4) становится совместной. При этом уравнение (3) тождественно выполняется и остается только уравнение (4), принимающее вид

$$\begin{aligned} & \kappa y^7 + \left(\frac{1}{36}\epsilon\delta^2 + \nu\right) y^5 + \epsilon y^4 y_{zz} + \\ & + \left(\frac{5}{1296}\tau\delta^4 + \frac{1}{36}\rho\delta^2 + \mu\right) y^3 + \\ & + \left(\tau y_{zzzz} + \frac{1}{6}\tau\delta^2 y_{zz} + \rho y_{zz}\right) y^2 + \\ & + \left(\frac{5}{1296}\chi\delta^4 + \frac{1}{36}\alpha\delta^2 + \omega + \frac{61}{46656}\delta^6\right) y + \\ & + \chi y_{zzzz} + \alpha y_{zz} + \frac{1}{6}\chi y_{zz} \delta^2 + \\ & + \frac{25}{432}\delta^4 y_{zz} + \frac{5}{12}\delta^2 y_{zzzz} + y_{zzzzzz} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение, так же, как и исходная система, не проходит тест Пенлеве и, следовательно, не имеет решения с шестью произвольными постоянными. Однако можно найти решение с меньшим числом произвольных постоянных.

Следующий раздел посвящен поиску точных решений уравнения (14).

### 3. ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ (14)

Для поиска решения уравнения (14) применим метод простейших уравнений [19, 20]. В качестве простейшего используем уравнение для эллиптической функции Якоби

$$Y_z^2(z) - aY^4(z) - cY^2(z) - d = 0. \tag{15}$$

Решение этого уравнения можно выразить через одну из эллиптических функций Якоби. Если рассмотреть алгебраическое уравнение:  $aY^4 + cY^2 + d = 0$  и предположить, что  $x_1, x_2, x_3, x_4$  его корни, то принимая во внимание инвариантность этого уравнения относительно замены  $Y = -Y$ , получаем, что  $x_3 = -x_1, x_4 = -x_2$ . Таким образом можно переписать уравнение (15) в следующем виде

$$Y_z^2 = aY^4 + cY^2 + d = a(Y - x_1)(Y + x_1) \times \\ \times (Y - x_2)(Y + x_2) = a(Y^2 - x_1^2)(Y^2 - x_2^2) = \tag{16} \\ = ax_1^2 x_2^2 \left( 1 - \left( \frac{Y}{x_1} \right)^2 \right) \left( 1 - \left( \frac{Y}{x_2} \right)^2 \right).$$

Из (16) можно увидеть, что решение уравнения (15) выражается через эллиптический синус следующим образом

$$Y(z) = \pm x_1 \operatorname{sn} \left( \sqrt{ax_2} (z - z_0), \frac{x_1}{x_2} \right), \tag{17} \\ x_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{c^2 - 4ad} - c}{2a}}, \quad x_1 = \sqrt{\frac{-\sqrt{c^2 - 4ad} - c}{2a}}.$$

Поскольку порядки полюсов решений уравнений (14) и (15) совпадают, то согласно методу простейших уравнений ищем решение уравнения (14) в виде

$$y(z) = AY(z), \tag{18}$$

где  $Y(z)$  – это решение уравнения (15),  $A$  – неизвестная постоянная.

Дифференцируя уравнение (15) по  $z$ , получаем выражения для производных функции  $Y(z)$

$$Y_{zz} = 2aY^3 + cY, \\ Y_{zzz} = 6aY^2Y_z + cY_z, \\ Y_{zzzz} = 6aY^2Y_{zz} + 12aYY_z^2 + cY_{zz}, \\ Y_{zzzzz} = 6aY^2Y_{zzz} + 36aYY_zY_{zz} + 12aY_z^3 + cY_{zzz}, \\ Y_{zzzzz} = 6aY^2Y_{zzzz} + 48aYY_zY_{zzz} + \\ + 36aYY_{zz}^2 + 72aY_z^2Y_{zz} + cY_{zzzz}. \tag{19}$$

Так как решение уравнения (14) ищем в виде (18), то используя (19), можем найти выражения для производных функции  $y(z)$ . В уравнение (14) встречаются только четные производные, поэтому для следующих расчетов не понадобятся производные нечетного порядка. Выражения для производных функции  $y(z)$  имеют вид

$$y_{zz} = 2aAY^3 + cAY, \\ y_{zzzz} = 24a^2AY^5 + 20acAY^3 + 12aAdY + c^2AY, \\ y_{zzzzz} = 720Aa^3Y^7 + 840Aa^2cY^5 + 504Aa^2dY^3 + \\ + 182Aac^2Y^3 + 132AacdY + Ac^3Y. \tag{20}$$

Подставляя выражения (18) и (20) в дифференциальное уравнение (14), получаем алгебраическое уравнение следующего вида

$$(A^7\kappa + 2A^5a\epsilon + 24A^3a^2\tau + 720Aa^3)Y^7 + \\ + \left( A^5\nu + \frac{1}{3}A^3\tau\delta^2a + 840Aa^2c + \frac{1}{36}A^5\epsilon\delta^2 + \\ + 20A^3\tau ac + A^5\epsilon c + 24\chi Aa^2 + 10\delta^2Aa^2 + \\ + 2A^3\rho a \right) Y^5 + \left( A^3\mu + \frac{5}{1296}A^3\tau\delta^4 + A^3\tau c^2 + \\ + \frac{25}{3}\delta^2Aac + \frac{1}{36}A^3\rho\delta^2 + \frac{1}{3}\chi A\delta^2a + \\ + \frac{25}{216}\delta^4Aa + \frac{1}{6}A^3\tau\delta^2c + 20\chi Aac + 504Ada^2 + \\ + 2\alpha Aa + 12A^3\tau da + 182Aac^2 + A^3\rho c \right) Y^3 + \\ + \left( \frac{61}{46656}A\delta^6 + \chi Ac^2 + \frac{5}{12}\delta^2Ac^2 + A\omega + \\ + \frac{5}{1296}\chi A\delta^4 + \frac{25}{432}\delta^4Ac + 132Adac + \\ + \alpha Ac + \frac{1}{36}\alpha A\delta^2 + 5\delta^2Ada + \frac{1}{6}\chi A\delta^2c + \\ + 12\chi Ada + Ac^3 \right) Y = 0 \tag{21}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при  $Y$ , находим ограничения на некоторые параметры. Получаем, что  $A$  является корнем уравнения

$$A^6\kappa + 2A^4a\epsilon + 24A^3a^2\tau + 720a^3 = 0, \tag{22}$$

а параметры  $c, d, \omega$  должны иметь следующий вид

$$c = -\frac{1}{36} \frac{A^4 \delta^2 \varepsilon + 12A^2 a \delta^2 \tau + 36A^4 \nu + 72A^2 a \rho + 360a^2 \delta^2 + 864a^2 \chi}{A^4 \varepsilon + 20A^2 a \tau + 840a^2}, \quad (23)$$

$$d = -\frac{1}{15552} \frac{1}{a(A^2 \tau + 42a)} (5A^2 \delta^4 \tau + 216A^2 c \delta^2 \tau + 1296A^2 c^2 \tau + 36A^2 \delta^2 \rho + 150a \delta^4 + 1296A^2 c \rho + 10800ac \delta^2 + 432a \chi \delta^2 + 1296A^2 \mu + 235872ac^2 + 25920ac \chi + 2592a \alpha), \quad (24)$$

$$\omega = -\frac{61}{46656} \delta^6 - \frac{25}{432} \delta^4 c - \frac{5}{1296} \chi \delta^4 - 5\delta^2 da - \frac{5}{12} \delta^2 c^2 - \frac{1}{6} \chi \delta^2 c - 132dac - 12\chi da - \frac{1}{36} \alpha \delta^2 - c^3 - \chi c^2 - \alpha c. \quad (25)$$

При выполнении условий (22)–(25) получаем решение уравнения (14) в виде (18), которое можно записать следующим образом

$$y(z) = \pm A \frac{\sqrt{-a(\theta + 4c)}}{2a} \operatorname{sn} \left( \frac{\sqrt{\theta}}{2} (z - z_0), K \right), \quad (26)$$

$$\theta = 2\sqrt{c^2 - 4ad} - 2c, \quad K = \frac{4\sqrt{ad}}{\theta},$$

где  $z_0$  – произвольная постоянная, параметры  $A$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $\omega$  вычисляются по соотношениям (22)–(25).

Так же получим решение уравнения (14) в виде уединенной волны. Для этого выберем параметр  $d$  равным нулю в уравнение (15). Подставляем (18) и (20) в уравнение (14), учитывая  $d = 0$ . При этом относительно  $Y(z)$  получаем равный нулю полином. Приравнявая его коэффициенты нулю, находим ограничения на параметры  $A$ ,  $c$ ,  $\mu$ ,  $\omega$ . Таким образом, для  $A$  и  $c$  получаем условия (22) и (23), а для  $\mu$  и  $\omega$  находим следующие выражения:

$$\mu = -\frac{1}{1296} \frac{1}{A^2} (5A^2 \delta^4 \tau + 216A^2 c \delta^2 \tau + 1296A^2 c^2 \tau + 36A^2 \delta^2 \rho + 150a \delta^4 + 1296A^2 c \rho + 10800ac \delta^2 + 432a \chi \delta^2 + 235872ac^2 + 25920ac \chi + 2592a \alpha), \quad (27)$$

$$\omega = -\frac{61}{46656} \delta^6 - \frac{25}{432} \delta^4 c - \frac{5}{1296} \chi \delta^4 - \frac{5}{12} \delta^2 c^2 - \frac{1}{6} \chi \delta^2 c - \frac{1}{36} \alpha \delta^2 - c^3 - \chi c^2 - \alpha c. \quad (28)$$

При  $d = 0$  решение уравнения (14) принимает вид

$$y(z) = \pm A \frac{4ce^{\sqrt{c}(z-z_0)}}{e^{2\sqrt{c}(z-z_0)} - 4ac}, \quad (29)$$

где  $z_0$  – произвольная постоянная, параметры  $A$ ,  $c$ ,  $\mu$ ,  $\omega$  должны удовлетворять условиям (22), (23), (27), (28).

Принимая во внимание (2), (26), (29), для уравнения (1) получаем следующие решения

$$u(x, t) = \pm A \frac{\sqrt{-a(\theta + 4c)}}{2a} \times \operatorname{sn} \left( \frac{\sqrt{\theta}}{2} (x - C_0 t - z_0), K \right) e^{-i\frac{\delta}{6}(x - C_0 t) - i\omega t}, \quad (30)$$

$$u(x, t) = \pm A \frac{4ce^{\sqrt{c}(x - C_0 t - z_0)}}{e^{2\sqrt{c}(x - C_0 t - z_0)} - 4ac} e^{-i\frac{\delta}{6}(x - C_0 t) - i\omega t}. \quad (31)$$

Эти функции являются решениями уравнения (1) при условиях (13).

Построим полученные решения при некоторых заданных значениях параметров. Решения (26) и (30) при параметрах  $t = 0$ ,  $a = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\nu = -1$ ,  $\mu = 1$ ,  $z_0 = 0$ ,  $\kappa = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $\chi = 1$ ,  $\delta = 15$ ,  $\tau = 100$ ,  $\varepsilon = 1$  изображены на рис. 1. Решения (29) и (31) при параметрах  $t = 0$ ,  $a = -10$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\nu = 1$ ,  $z_0 = 26$ ,  $\kappa = 10$ ,  $\rho = -1$ ,  $\chi = -1$ ,  $\delta = -10$ ,  $\tau = 100$ ,  $\varepsilon = 1$  построены на рис. 2. На рис. 1 и 2 видно, что функция  $y(z)$  является огибающей для действительной части функции  $u(x, t)$ .

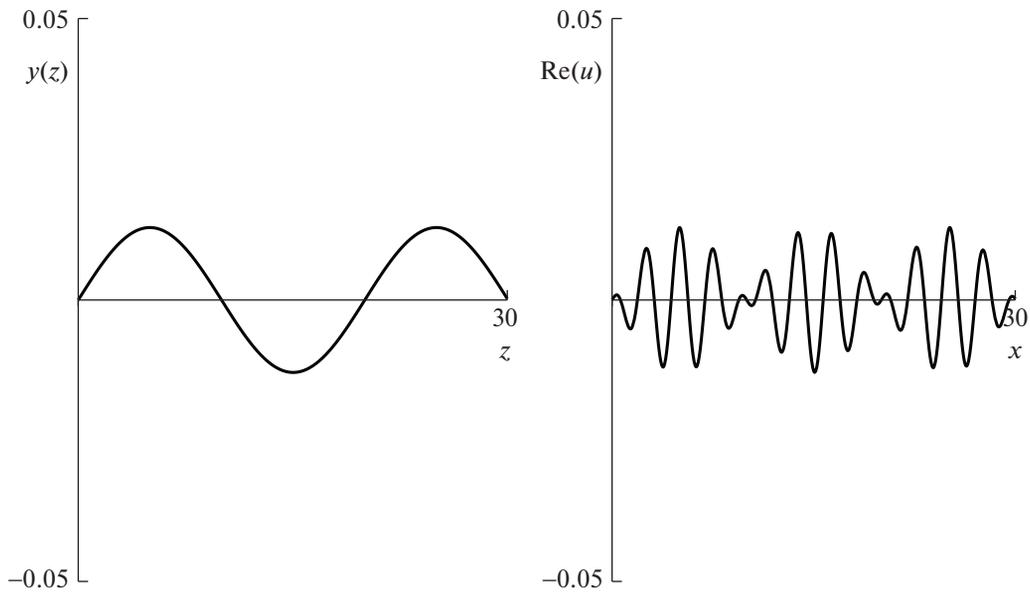
#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено дифференциальное уравнение шестого порядка со степенными и нелокальными нелинейностями, используемое для описания оптических импульсов с высоким порядком дисперсии.

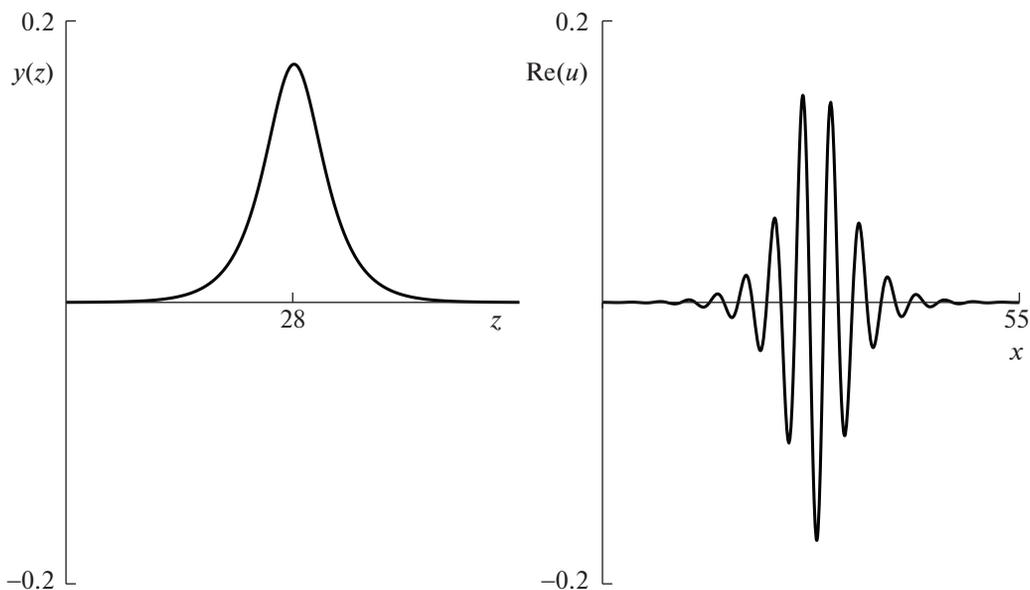
Используя переменные бегущей волны построена система ОДУ. Проводя тест Пенлеве для полученной системы ОДУ, показана неинтегрируемость изучаемого УЧП.

Выполняя третий шаг теста Пенлеве, найдены условия на параметры уравнения, при которых система становится совместной. Принимая во внимание эти ограничения получено одно ОДУ шестого порядка.

Применяя метод простейших уравнений, построены точные решения для полученного ОДУ. Используя эти решения, найдены точные решения исходного УЧП.



**Рис. 1.** Решение (26) (слева), решение (30) (справа) при параметрах  $t = 0$ ,  $a = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\nu = -1$ ,  $\mu = 1$ ,  $z_0 = 0$ ,  $\kappa = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $\chi = 1$ ,  $\delta = 15$ ,  $\tau = 100$ ,  $\varepsilon = 1$ .



**Рис. 2.** Решение (29) (слева), решение (31) (справа) при параметрах  $t = 0$ ,  $a = -10$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\nu = 1$ ,  $z_0 = 26$ ,  $\kappa = 10$ ,  $\rho = -1$ ,  $\chi = -1$ ,  $\delta = -10$ ,  $\tau = 100$ ,  $\varepsilon = 1$ .

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10039) и Министерства науки и высшего образования РФ (проект государственного задания № 0723-2020-0036).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kudryashov N.A.* Highly Dispersive Optical Solitons of an Equation with Arbitrary Refractive Index // Regular and Chaotic Dynamics. 2020. V. 25. № 6. P. 537–543.
2. *Kudryashov N.A.* Highly dispersive optical solitons of equation with various polynomial nonlinearity law // Chaos, Solitons and Fractals. 2020. V. 140. 110202.

3. Kudryashov N.A. Highly dispersive optical solitons of the generalized nonlinear eighth-order Schrödinger equation // *Optik*. 2020. V. 206. 164335
4. Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., Belic M. Highly dispersive optical solitons with non-local nonlinearity by exp-function // *Optik*. 2019. V. 186. P. 321–325.
5. Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., Belic M.R. Highly dispersive optical solitons with cubic–quintic–septic law by exp-expansion // *Optik*. 2019. V. 186. P. 288–292.
6. Кан К.В., Кудряшов Н.А. Высокодисперсные солитоны, описываемые системой нелинейных дифференциальных уравнений с учетом Брэгговской решетки // *Вестник НИЯУ МИФИ*. 2020. Т. 9. № 3. С. 210–216.
7. Кан К.В., Кудряшов Н.А. Оптические солитоны, описываемые системой нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка с нелокальной нелинейностью // *Вестник НИЯУ МИФИ*. 2020. Т. 9. № 5. С. 449–454.
8. Кутуков А.А., Кудряшов Н.А. Оптические солитоны системы дифференциальных уравнений типа нелинейного уравнения Шрёдингера с нелинейностью третьей, пятой и седьмой степени // *Вестник НИЯУ МИФИ*. 2020. Т. 9. № 5. С. 438–441.
9. Kudryashov N.A., Safonova D.V., Biswas A. Painlevé analysis and solution to the traveling wave reduction of Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2019. V. 24. № 6. P. 607–614.
10. Kudryashov N.A., Safonova D.V. Painlevé analysis and traveling wave solutions of the fourth-order differential equation for pulse with non-local nonlinearity // *Optik*. 2021. V. 227. 166019.
11. Кудряшов Н.А., Сафонова Д.В. Точные решения нелинейного дифференциального уравнения для описания оптических импульсов с нелинейностью третьей и пятой степени // *Вестник НИЯУ МИФИ*. 2020. Т. 9. № 1. С. 25–31.
12. Сафонова Д.В., Кудряшов Н.А. Точные решения дифференциального уравнения четвертого порядка для описания оптических импульсов // *Вестник НИЯУ МИФИ*. 2020. Т. 9. № 5. С. 412–419.
13. Сафонова Д.В., Кудряшов Н.А. Точные решения нелинейного дифференциального уравнения шестого порядка для описания оптических импульсов // *Вестник НИЯУ МИФИ*. 2020. Т. 9. № 6. С. 521–528.
14. Кудряшов Н.А., Сафонова Д.В. Точные решения уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргерса с источником // *Вестник НИЯУ МИФИ*. 2019. Т. 8. № 2. С. 124–131.
15. Kudryashov N.A. Construction of nonlinear equations for description of propagation pulses in optical fiber // *Optik*. 2019. V. 192. 162964.
16. Ablowitz M.J., Clarkson P.A. Solitons nonlinear evolution equations and inverse scattering. Cambridge university press, 1991.
17. Ablowitz M.J., Segur H. Exact linearization of a Painlevé transcendent // *Phys. Rev. Lett.* 1977. V. 38. P. 1103–1106.
18. Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H. A Connection between Nonlinear Evolution Equations and Ordinary Differential Equations of p-type // *J. Math. Phys.* 1980. V. 21. P. 715–721.
19. Kudryashov N.A. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // *Chaos Soliton Fractals*. 2005. V. 24. P. 1217–1231.
20. Kudryashov N.A. Exact solitary waves of the Fisher equations // *Physics Letters A*. 2005. V. 342. P. 99–106.

---

**Vestnik Nacional’nogo Issledovatel’skogo Yadernogo Universiteta “MIFI”, 2021, vol. 10, no. 2, pp. 143–150**

---

## Exact Solutions of the Differential Equation for Highly Dispersed Optical Pulses

D. V. Safonova<sup>a,#</sup> and N. A. Kudryashov<sup>a,##</sup>

<sup>a</sup> National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

<sup>#</sup>e-mail: safonovadashav@gmail.com

<sup>##</sup>e-mail: nakudryashov@mephi.ru

Received April 5, 2021; revised April 26, 2021; accepted April 27, 2021

**Abstract**—A nonlinear partial differential equation describing the propagation of highly dispersed pulses in optical fibers is studied. Taking into account the Ablowitz–Ramani–Segur hypothesis, the reduction of the original partial differential equation to an ordinary differential equation is considered. Using the traveling wave variables, the ordinary differential equation is obtained in which the imaginary and real parts are separated from each other. Equating them to zero gives a system of ordinary differential equations. The integrability of this system is investigated using the Painlevé test. It is shown that the system of ordinary differential equations does not pass the Painlevé test, since there is only one integer Fuchs index. At the third step of the Painlevé test, the conditions for the compatibility of the system are found. Taking into account these conditions, the sixth-order ordinary differential equation is obtained. Exact solutions for the ordinary differential equation are constructed using the simplest equation method. The constructed solutions are expressed in terms of elliptic sine and exponential functions, and have the form of periodic and solitary waves, respectively.

Using the constructed solutions of the ordinary differential equation, the solutions of the original partial differential equation are obtained with some restrictions on the equation parameters. It is illustrated that the solutions of the ordinary differential equation represent envelopes for the solutions of the partial differential equation.

*Keywords:* nonlinear differential equation, exact solution, Painlevé test, optical pulses

DOI: 10.1134/S2304487X21020085

## REFERENCES

1. Kudryashov N.A., Highly Dispersive Optical Solitons of an Equation with Arbitrary Refractive Index, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2020, vol. 25, no. 6, pp. 537–543.
2. Kudryashov N.A., Highly dispersive optical solitons of equation with various polynomial nonlinearity law, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2020, vol. 140, 110202.
3. Kudryashov N.A., Highly dispersive optical solitons of the generalized nonlinear eighth-order Schrödinger equation, *Optik*, 2020, vol. 206, 164335.
4. Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., Belic M., Highly dispersive optical solitons with non-local nonlinearity by exp-function, *Optik*, 2019, vol. 186, pp. 321–325.
5. Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., Belic M.R., Highly dispersive optical solitons with cubic–quintic–septic law by exp-expansion, *Optik*, 2019, vol. 186, pp. 288–292.
6. Kan K.V., Kudryashov N.A., Visokodispersnie opticheskie solitoni, opisivaemie sistemoy nelineynih differentsialnykh uravneniy s uchetom Bregovskoy reshotki. [Highly dispersive solitons described by the system of nonlinear differential equations including a Bragg grating], *Vestnik NIYaU MIFI*, 2020, vol. 9, no. 3, pp. 210–216. (in Russian)
7. Kan K.V., Kudryashov N.A., Opticheskie solitoni, opisivaemie sistemoy nelineynih differentsialnykh uravneniy chetvertogo poryadka s nelokalnoy nelineynostyu. [Optical solitons described by a system of the fourth order nonlinear differential equations with nonlocal nonlinearity], *Vestnik NIYaU MIFI*, 2020, vol. 9, no. 5, pp. 449–454. (in Russian)
8. Kutukov A.A., Kudryashov N.A., Opticheskie solitoni sistemi differentsialnykh uravneniy tipa nelineynogo uravneniya Shredingera s nelineynostyu tretyey, pyatoy, sedmoy stepeni [Solitary wave solutions of the coupled nonlinear Schrödinger equation with cubic–quintic–septic nonlinearity], *Vestnik NIYaU MIFI*, 2020, vol. 9, no. 5, pp. 438–441. (in Russian)
9. Kudryashov N.A., Safonova D.V., Biswas A., Painlevé analysis and solution to the traveling wave reduction of Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, vol. 24, no. 6, pp. 607–614.
10. Kudryashov N.A., Safonova D.V., Painlevé analysis and traveling wave solutions of the fourth-order differential equation for pulse with non-local nonlinearity, *Optik*, 2021, vol. 227, 166019.
11. Kudryashov N.A., Safonova D.V., Tochniye resheniya nelineynogo differentsialnogo uravneniya dlya opisaniya opticheskikh impulsov s nelineynostyu tretyey i pyatoy stepeni [Exact Solutions of a Nonlinear Differential Equation with Third and Fifth Degree Nonlinearities for Description of Optical Pulses], *Vestnik NIYaU MIFI*, 2020, vol. 9, no. 1, pp. 25–31. (in Russian)
12. Safonova D.V., Kudryashov N.A. Tochniye resheniya differentsialnogo uravneniya chetvertogo poryadka dlya opisaniya opticheskikh impulsov [Exact Solution of Fourth Order Differential Equations for Description of Optical Pulses], *Vestnik NIYaU MIFI*, 2020, vol. 9, no. 5, pp. 412–419. (in Russian)
13. Safonova D.V., Kudryashov N.A., Tochniye resheniya nelineynogo differentsialnogo uravneniya shestogo poryadka dlya opisaniya opticheskikh impulsov [Exact Solution of Sixth Order Nonlinear Differential Equations for Description of Optical Pulses], *Vestnik NIYaU MIFI*, 2020, vol. 9, no. 6, pp. 521–528. (in Russian)
14. Kudryashov N.A., Safonova D.V., Tochniye resheniya uravneniya Kortewega–de Vrisa–Burgersa s istochnikom. [Exact Solutions of the Korteweg–de Vries–Burgers Equation with a Source], *Vestnik NIYaU MIFI*, 2019, vol. 8, no. 2, pp. 124–131. (in Russian)
15. Kudryashov N.A., Construction of nonlinear equations for description of propagation pulses in optical fiber, *Optik*, 2019, vol. 192, 162964.
16. Ablowitz M.J., Clarkson P.A. *Solitons nonlinear evolution equations and inverse scattering*, Cambridge university press, 1991.
17. Ablowitz M.J., Segur H., Exact linearization of a Painlevé transcendent, *Phys. Rev. Lett.*, 1977, vol. 38, pp. 1103–1106.
18. Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of p-type, *J. Math. Phys.*, 1980, vol. 21, pp. 715–721.
19. Kudryashov N.A., Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations, *Chaos Soliton Fractals*, 2005, vol. 24, pp. 1217–1231.
20. Kudryashov N.A., Exact solitary waves of the Fisher equations. *Physics Letters A*, 2005, vol. 342, pp. 99–106.