ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2021, том 10, № 3, с. 253–259

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.944

РЕШЕНИЯ УЛЬТРАГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 2 × 2 И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПОЛЮСНЫХ ФИГУР

© 2021 г. Е. А. Федотов[1,*], Т. И. Савёлова[1]

[1] *Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва 115409, Россия*

**e-mail: evgeniy.mephi@yandex.ru*

Поступила в редакцию 27.04.2021 г.
После доработки 04.05.2021 г.
Принята к публикации 11.05.2021 г.

Теория решения ультрагиперболических дифференциальных уравнений (УГДУ) мало разработана, так как считается, что задачи, связанные с их решением, на практике не встречаются. Однако обнаружено, что в количественном текстурном анализе измеряемые экспериментально рентгеновским или нейтронным методами полюсные фигуры (ПФ), зависящие от выбора кристаллографического направления в $\mathbb{R}^3$, удовлетворяют ультрагиперболическому уравнению 2 × 2. Решения УГДУ сочетают в себе свойства как гиперболических, так и эллиптических уравнений. Непосредственное применение решений УГДУ к описанию полюсных фигур содержит дополнительную сложность, состоящую в том, что ПФ есть сумма решений двух уравнений, зависящих от различных независимых переменных. Это связано с особым подходом к кристаллографическим направлениям в рентгеновском эксперименте. В настоящей работе аналитически и численно исследуется класс решений ультрагиперболических уравнений 2 × 2, вычисляются некоторые ПФ для них. Найденные решения могут быть использованы в качестве модельных функций для вычисления экспериментальных ПФ в количественном текстурном анализе.

Ключевые слова: ультрагиперболические дифференциальные уравнения, функции Бесселя, полюсные фигуры

DOI: 10.1134/S2304487X21030056

ВВЕДЕНИЕ

Теория решения ультрагиперболических дифференциальных уравнений (УГДУ) мало разработана, так как считается, что задачи, связанные с их решением, на практике не встречаются [1, 2]. Однако в [3] показано, что в количественном текстурном анализе измеряемые экспериментально рентгеновским или нейтронным методами полюсные фигуры (ПФ), зависящие от выбора кристаллографического направления в $\mathbb{R}^3$, удовлетворяют ультрагиперболическому уравнению 2 × 2.

В работах [4–7] проведены некоторые исследования, связанные с отысканием областей зависимостей ПФ, отвечающих различным кристаллографическим направлениям, изучением их характеристик и решением одной задачи Коши.

Решения ультрагиперболических дифференциальных уравнений сочетают в себе свойства как гиперболических, так и эллиптических уравнений ([1], с. 738–753, [2, 7]).

Применение решений УГДУ к описанию полюсных фигур содержит дополнительную сложность, состоящую в том, что ПФ есть сумма решений двух уравнений. Эти уравнения зависят от различных независимых переменных. Это связано с тем, что в эксперименте не различают кристаллографические направления $\vec{h}$ и $-\vec{h}$ [3].

В настоящей работе аналитически и численно исследуется класс решений ультрагиперболических уравнений 2 × 2, вычисляются некоторые ПФ для них. Найденные решения могут быть использованы в качестве модельных функций для вычисления экспериментальных ПФ в количественном текстурном анализе.

Для описания полюсных фигур удобно использовать "стандартные" функции, имеющие простое аналитическое выражение. Обычно в текстурном анализе ПФ записывают в виду ряда Фурье по сферическим функциям. Коэффициенты разложения ряда из экспериментально полученных ПФ. Удобнее представлять ПФ через "стандартные" функции, параметры которых определяются также из эксперимента. Таких "стандартных" функций в настоящее время известно немного [8]. В данной работе предлагается новый класс функций, которые могут быть использованы в качестве "стандартных".

Полюсные фигуры дают представление о степени неоднородности текстуры поликристаллических материалов. ПФ используются для вычисления функции распределения ориентаций (ФРО). С помощью ФРО вычисляются физические (тепловые, упругие, электромагнитные) свойства, пластичность материала, механические свойства и т.д. [9].

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3)$ вектор $\|\vec{h}\| = 1$ в $\mathbb{R}^3$ есть некоторое кристаллографическое направление. Введем вектор $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in S^2$ – единичный вектор, принадлежащий двумерной сфере в $\mathbb{R}^3$.

Введем переменные

$$\begin{cases} r^{\pm} = 2\dfrac{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}{|y_3 \mp h_3|}, \quad \mathrm{tg}\varphi = \dfrac{y_2}{y_1}, \\ \rho^{\pm} = 2\dfrac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{|y_3 \mp h_3|}, \quad \mathrm{tg}\psi = \dfrac{h_1}{h_2}. \end{cases} \tag{1}$$

Полюсные фигуры могут быть записаны в виде [5]

$$P_{\vec{h}_i}(\vec{y}) = \frac{1}{|y_3 - h_3|}F^{+}(r, \rho, \varphi, \psi) + \frac{1}{|y_3 + h_3|}F^{-}(r, \rho, \varphi, \psi), \tag{2}$$

где $F^{\pm}(r, \rho, \varphi, \psi) = F(r^{\pm}, \rho^{\pm}, \varphi, \psi)$.

Функции $F^{\pm}$ удовлетворяют ультрагиперболическому уравнению [3]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial F}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \psi^2}. \tag{3}$$

Общее решение уравнения (3) при $0 \le r$, $\rho < +\infty$, $0 \le \varphi, \psi < 2\pi$, может быть записано в виде

$$F(r, \rho, \varphi, \psi) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} A_{mn}(\lambda)J_n(\lambda r)J_m(\lambda\rho)\lambda d\lambda\right) \times \exp\left(i(n\varphi + m\psi)\right), \tag{4}$$

где $J_n(x)$ – функция Бесселя порядка $n, n = 0, 1, \ldots$.

КЛАСС РЕШЕНИЙ УЛЬТРАГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ 2 × 2

Воспользуемся известным значением интеграла ([10], с. 732)

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2} J_p(\lambda r)J_p(\lambda\rho)\lambda d\lambda = \frac{1}{2a^2}\exp\left(-\frac{r^2 + \rho^2}{4a^2}\right)I_p\left(\frac{r\rho}{2a^2}\right) = u_p(r, \rho), \quad p = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где $I_p(z)$ – модифицированная функция Бесселя мнимого аргумента, $a^2 > 0$.

Тогда получаем из (4), что функции

$$F_p(r, \rho, \varphi, \psi) = u_p(r, \rho)\exp\left(ip(\varphi + \psi)\right) \tag{6}$$

являются решениями УГДУ (3).

Функции $I_p(z)$ имеют разложение ([10], с. 975)

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(\nu + k + 1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}, \quad \mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}. \tag{7}$$

При $z \to \infty$ справедлива асимптотика ([10], с. 976)

$$I_\nu(z) \to \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}. \tag{8}$$

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ УЛЬТРАГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 2 × 2

Было исследовано семейство решений УГДУ 2 × 2, зависящее от параметров $a > 0,\ p = 0, 1, 2, \ldots$ (6).

Решение УГДУ 2 × 2 при параметре $p = 0$

Был зафиксирован параметр $p = 0$.

а) $a = 1$. На рис. 1 изображены графики функции (6) при $\rho = 0, 2^k,\ k = 0, 1, \ldots, 4$. При увеличении ρ максимум функции уменьшается, что в конечном итоге приводит к разделению волны на две при $\rho = 4$. Далее волны разбегаются.

б) $a = 4$. На рис. 2 изображены графики функции $u_0(r, \rho)$ при $\rho = 0, 2^k,\ k = 0, 1, \ldots, 4$. Максимум уменьшается, однако, в отличие от п. а), ширина волнового фронта увеличивается, что приводит к разделению волны уже при $\rho = 8$.

в) $a = \frac{1}{4}$. На рисунке 3 изображены графики функции $u_0(r, \rho)$ при $\rho = 0, 2^k,\ k = -2, -1, 0, 1, 2$.

Динамика совершенно противоположная, то есть: максимум функции увеличивается; волна сужается; разбиваются волны при меньших, по сравнению со случаем $a = 1$, значениях параметра $\rho : \rho = 2, \rho = 1, \rho = \frac{1}{4}$ соответственно.

Решение УГДУ 2 × 2 при параметре $p = 1$

Пусть $p = 1$.

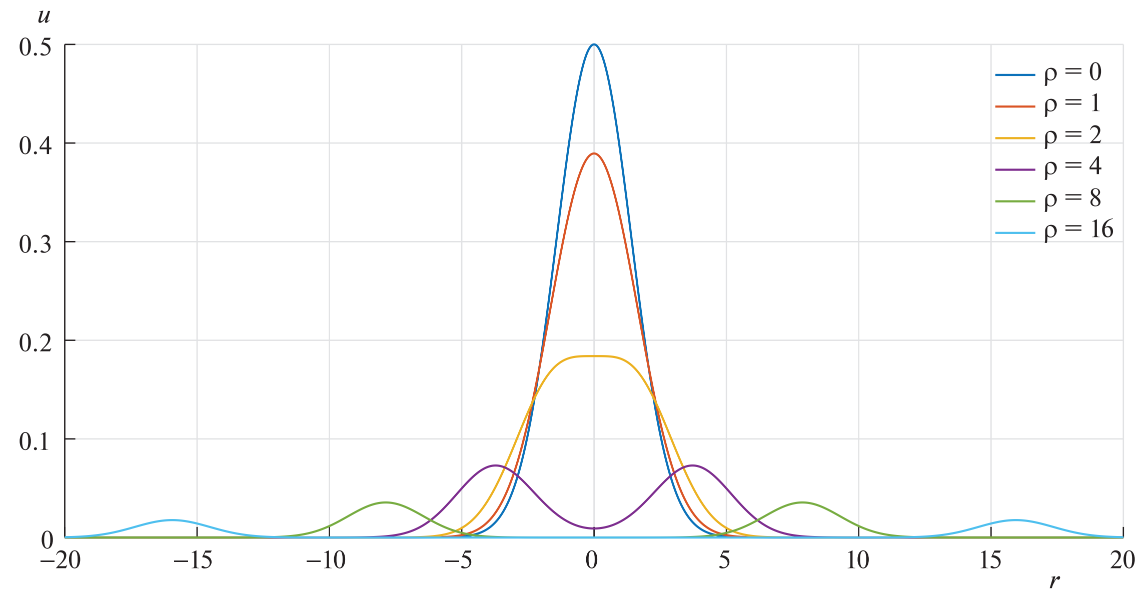

Рис. 1. График решения УГДУ 2 × 2 при $a = 1$.

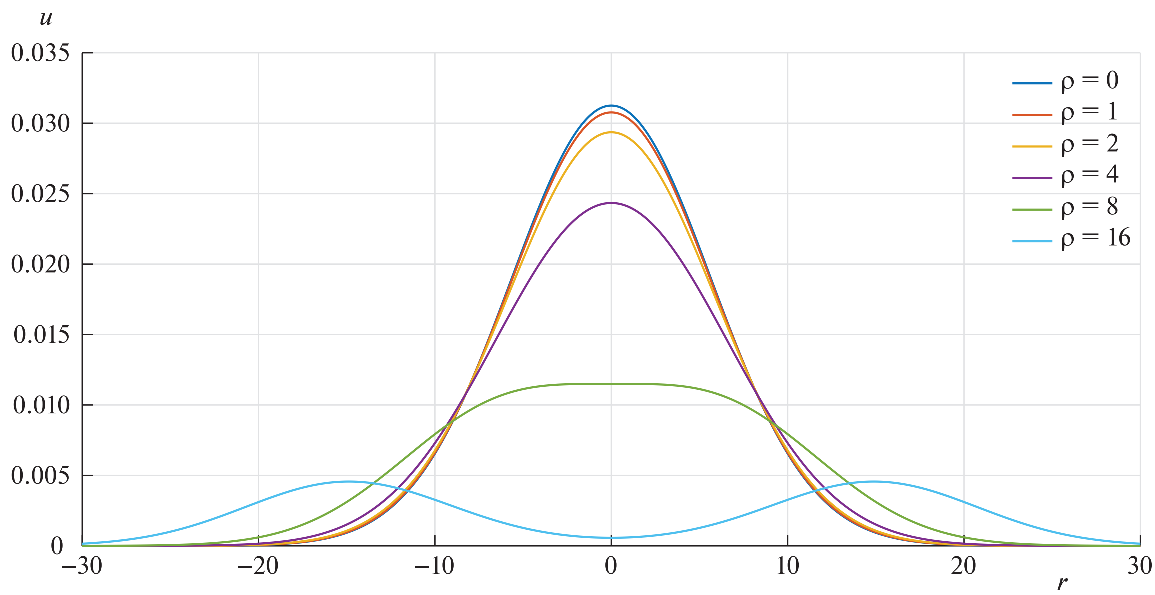

Рис. 2. График решения УГДУ 2 × 2 при $a = 4$.

В этом случае была рассмотрена функция (6) в более общем виде:

$$F_1 = u_1(r,\rho)e^{i(\varphi+\psi)}; \quad \varphi, \psi \in [0, 2\pi],$$

то есть ее зависимость от четырех переменных.

Параметр ψ был зафиксирован ($\psi = 0$), рассмотрены $\mathrm{Re}(F_1)$, $\mathrm{Im}(F_1)$. Полученный трехмерный график рассматривался для $\mathrm{Re}(F_1)$, так как для $\mathrm{Im}(F_1)$ происходит поворот графика на угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$ в плоскости (r, φ).

Пусть $a = 1$. На рис. 4, 5 изображены проекции $u_1(r,\rho)\cos\varphi$ при значениях $\rho = 1, 16$ на плоскость. По координатным осям отложены $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

При увеличении параметра ρ от $\rho = 1$ до $\rho = 16$ максимум функции уменьшается, в то время как сама функция “расплывается”.

Решение УГДУ 2 × 2 при параметре $p = 5$

Пусть $p = 5$.

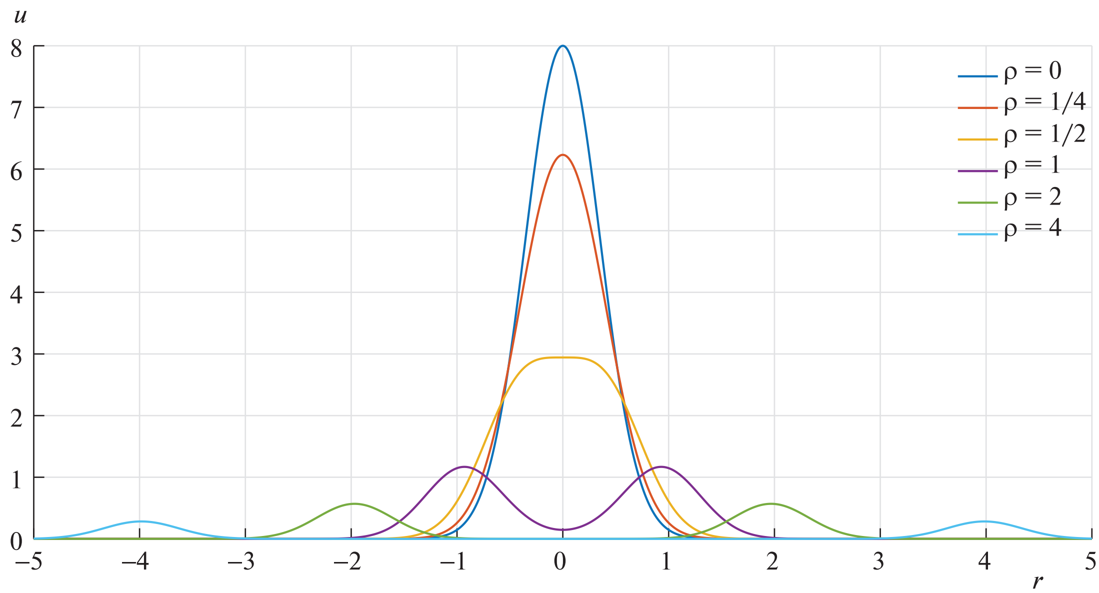

Рис. 3. График решения УГДУ 2 × 2 при $a = \frac{1}{4}$.

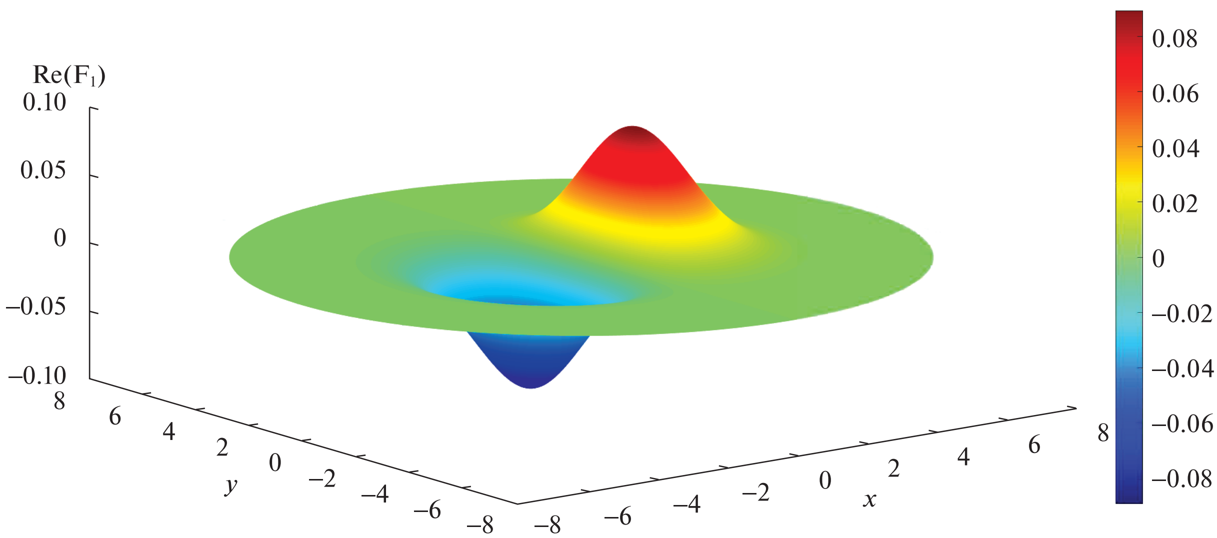

Рис. 4. График решения УГДУ 2 × 2 при $a = 1$, $\rho = 1$.

Функция (6) в таком случае принимает вид:

$$F_5 = u_5(r,\rho)e^{5i(\varphi+\psi)}; \quad \varphi,\psi \in [0,2\pi].$$

Пусть $a = 1$. На рисунке 6 изображен график $\mathrm{Re}(F_5)$ при значении $\rho = 1$. По координатным осям отложены $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛЮСНЫХ ФИГУР

Рассмотрим ПФ, отвечающие $u_0(r,\rho)$ (5) при $p = 0$

$$u_0(r,\rho) = \frac{1}{2a^2}\exp\left(-\frac{r^2+\rho^2}{4a^2}\right). \tag{9}$$

Для $\vec{h}_1 = (0°, 0°)$ или $\vec{h}_1 = (0,0,1)$ имеем $\rho = 0$. Из выражений (1), (2), (9) вычисляем

$$P_{\vec{h}_1}(\vec{y})d\vec{y} = \\ = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{2\sin^2\frac{\chi}{2}}e^{-\frac{1}{a^2}2\mathrm{ctg}^2\frac{\chi}{2}} + \frac{1}{2\cos^2\frac{\chi}{2}}e^{-\frac{1}{a^2}2\mathrm{tg}^2\frac{\chi}{2}}\right)2\sin\chi d\chi. \tag{10}$$

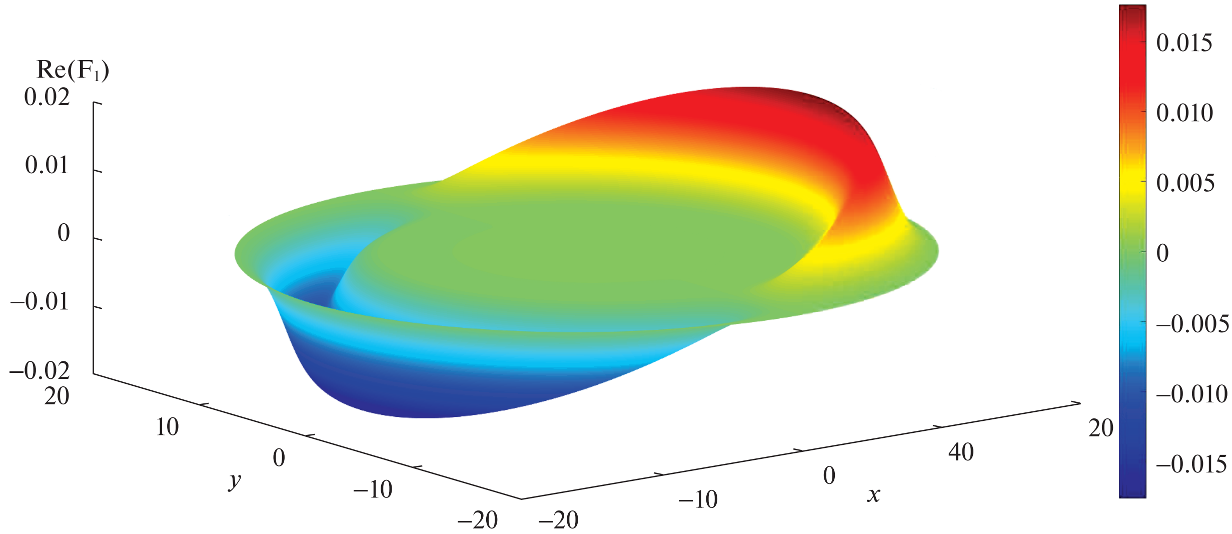

Рис. 5. График решения УГДУ 2 × 2 при $a = 1$, $\rho = 16$.

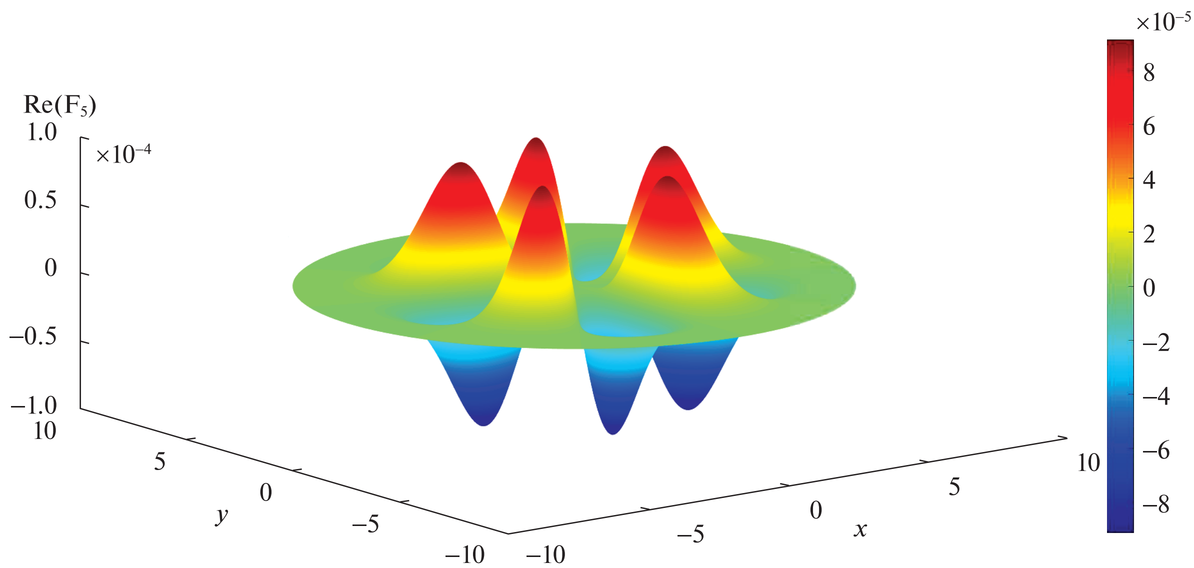

Рис. 6. График решения УГДУ 2 × 2 при $a = 1$, $\rho = 1$.

Для $\vec{h}_2 = \left(\frac{\pi}{2}^\circ, 0^\circ\right)$ или $\vec{h}_2 = (1,0,0)$ находим

$$P_{\vec{h}_2}(\vec{y})d\vec{y} = \frac{1}{a^2\cos\chi}\exp\left(-\frac{1+\sin^2\chi}{a^2\cos^2\chi}\right)\times \times I_0\left(\frac{2\sin\chi}{a^2\cos^2\chi}\right)\times 2\sin\chi d\chi. \tag{11}$$

На рис. 7, 8 изображены ПФ для $\vec{h}_1$ и $\vec{h}_2$ соответственно при различных значениях параметра a.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Класс решений ультрагиперболических уравнений 2 × 2 был исследован аналитически и численно, вычислены некоторые ПФ для них. Найденные решения могут быть использованы в качестве модельных функций для вычисления экспериментальных ПФ в количественном текстурном анализе, т.е. были предложены новые математические модели для описания полюсных фигур. Модели разработаны с использованием решений УГДУ специального вида. Описанные предложенным методом полюсные фигуры были

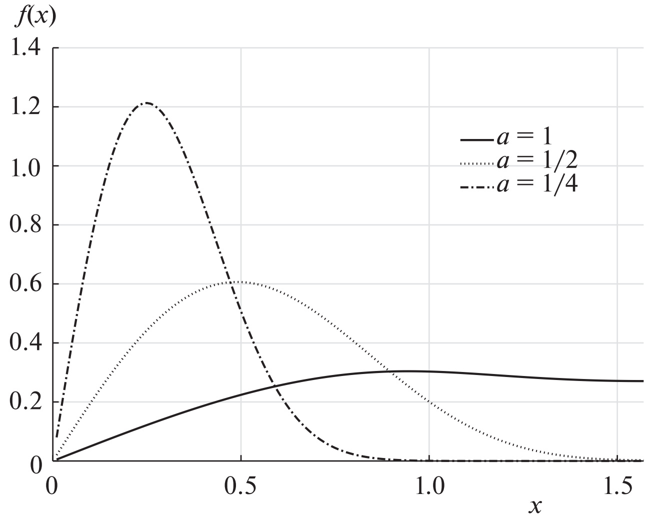

Рис. 7. Графики плотности полюсной фигуры $\vec{h}_1$ при $p = 0$.

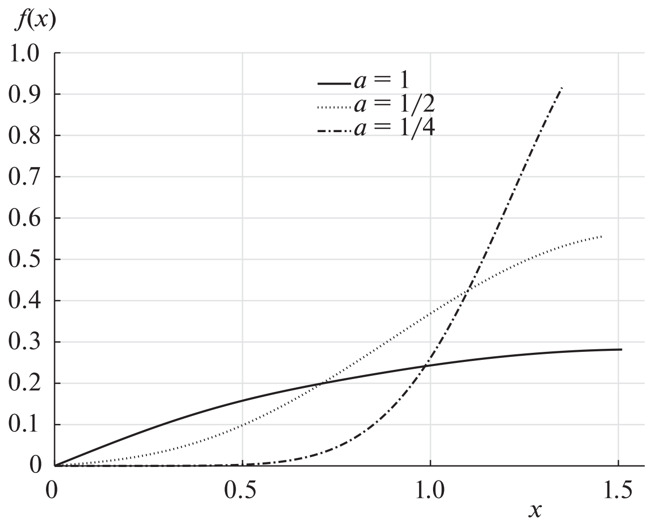

Рис. 8. Графики плотности полюсной фигуры $\vec{h}_2$ при $p = 0$.

исследованы аналитически (с проверкой поведения их плотностей на асимптотиках) и численно.

Предложенные модели достаточно удобны для применения в текстурном анализе при обработке данных (полюсных фигур), полученных в результате рентгеновского и нейтронного экспериментов, а также дискретных данных, измеряемых методами электронной микроскопии. Результаты являются новыми в области количественного текстурного анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
2. *Костомаров Д.П.* Задача Коши для ультрагиперболических уравнений. М.: Наука, 2003.
3. *Савёлова Т.И.* О решении одной обратной задачи дифракции. Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 3. С. 590–593.
4. *Savyolova T.I.* Calculation of Domains of Dependence for Pole Figures with an Ultrahyperbolic Differential Equation. Textures and Microstructures. 1995. V. 23. P. 185–199.
5. *Savyolova T.I.* Determination of Domains of Dependence through the Solution of an Ultrahyperbolic Differential Equation. Textures and Microstructures. 1996. V. 25. P. 183–195.
6. *Nikolayev D.I., Schaeben H.* Characteristics of the Ultrahyperbolic Differential Equation Governing Pole Density Functions. Inverse Problems. 1999. V. 15. P. 1603–1619.
7. *Savyolova T.I.* Solution of Ultrahyperbolic Equations and Their Application in Texture Analysis. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2005. V. 45. № 12. P. 2077–2084.
8. *Schaeben H.* A Unified View of Methods to Resolve the Inverse Problem of Texture Goniometry. Textures and Microstructures. 1996. V. 25. P. 171–181.
9. *Gottstein G.* Physical Foundations of Materials Science. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.
10. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2021, vol. 10, no. 3, pp. 253–259

Solutions of Ultrahyperbolic Differential Equations 2 × 2 and Their Application to the Description of Pole Figures

E. A. Fedotov[a, #] and T. I. Savyolova[a]

[a] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[#] *e-mail: dimabelstar@gmail.com*

Received April 27, 2021; revised May 4, 2021; accepted May 11, 2021

Abstract—The theory of solving ultrahyperbolic differential equations is poorly developed, since it is believed that the problems associated with their solution do not occur in practice. However, it was found that in quantitative texture analysis, the pole figures measured experimentally by X-ray or neutron methods, depending on the choice of the crystallographic direction in $\mathbb{R}^3$, satisfy the ultrahyperbolic equation 2×2. Solutions of ultrahyperbolic differential equations combine the properties of both hyperbolic and elliptic equations. The direct application of solutions of ultrahyperbolic differential equations to the description of pole figures contains an additional complexity, which consists in the fact that a pole figure is the sum of solutions of two equations that depend on different independent variables. This is due to a special approach to the crystallographic directions in the X-ray experiment. In this paper, we analytically and numerically investigate the class of solutions of the ultrahyperbolic equations 2×2, and calculate some pole figures for them. The solutions found can be used as model functions for calculating experimental pole figures in quantitative texture analysis.

Keywords: ultrahyperbolic differential equations, Bessel functions, pole figures

DOI: 10.1134/S2304487X21030056

REFERENCES

1. Kurant R. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Statistics of directional data]. Moscow, Mir Publ., 1964.
2. Kostomarov D.P. *Zadacha Cauchy dlya ultragiperbolicheskih uravneniy* [Cauchy problem for ultrahyperbolic equations]. Moscow, Nauka Publ., 2003.
3. Savyolova T.I. On the solution of an inverse diffraction problem. *Docl. USSR Academy of Sciences*, 1982, vol. 266, no. 3, pp. 590–593.
4. Savyolova T.I. Calculation of Domains of Dependence for Pole Figures with an Ultrahyperbolic Differential Equation. *Textures and Microstructures*, 1995, vol. 23, pp. 185–199.
5. Savyolova T.I. Determination of Domains of Dependence through the Solution of an Ultrahyperbolic Differential Equation. *Textures and Microstructures*, 1996, vol. 25, pp. 183–195.
6. Nikolayev D.I., Schaeben H. Characteristics of the Ultrahyperbolic Differential Equation Governing Pole Density Functions. *Inverse Problems*, 1999, vol. 15, pp. 1603–1619.
7. Savyolova T.I. Solution of Ultrahyperbolic Equations and Their Application in Texture Analysis. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2005, vol. 45, no. 12, pp. 2077–2084.
8. Schaeben H. A Unified View of Methods to Resolve the Inverse Problem of Texture Goniometry. *Textures and Microstructures*, 1996, vol. 45, pp. 171–181.
9. Gottstein G. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. *Physical Foundations of Materials Science*, 2004.
10. Gradshtein I.S., Ryzhik I.M. *Tablichy integralov, summ. ryadov i proizvedenyi* [Tables of integrals, sums, series, and products]. Moscow, Nauka Publ., 1971.