ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2021, том 10, № 3, с. 260–264

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.958

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАКШМАНАНА–ПОРСЕЗИАНА–ДЭНИЕЛЯ

© 2021 г.

А. А. Байрамуков[1,*], Н. А. Кудряшов[1,], А. А. Кутуков[1,***]**

[1] Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

**e-mail: alim.bayr@gmail.com*

***e-mail: nakudr@gmail.com*

****e-mail: alexkutuk@gmail.com*

Поступила в редакцию 09.06.2021 г.
После доработки 16.06.2021 г.
Принята к публикации 22.06.2021 г.

Рассмотрено уравнение Лакшманана–Порсезиана–Дэниеля, используемое наряду с нелинейным уравнением Шредингера для описания распространения импульса в оптическом волокне. Решение данного дифференциального уравнения в частных производных искалось в виде монохроматической волны с огибающей, являющейся функцией переменной бегущей волны. Путем подстановки этого решения в уравнение Лакшманана–Порсезиана–Дэниеля дифференциальное уравнение в частных производных приведено к переопределенной системе из двух однородных дифференциальных уравнений для огибающей монохроматической волны. Для переопределенной системы уравнений представлен способ определения ее совместности, отличный от того, что использовался ранее и заключался в определении совместности путем приравнивания к нулю коэффициентов одного из уравнений. С учетом условий совместности из переопределенной системы уравнений, характеризующей огибающую монохроматической волны, найдены два решения с двумя и тремя произвольными константами, выраженные через эллиптические функции Якоби. Для обоих решений представлены соответствующие ограничения на параметры монохроматической волны и групповую скорость ее движения, при которых данные решения существуют. Показано, что для существования решения с тремя произвольными константами требуются также два ограничения на коэффициенты уравнения Лакшманана–Порсезиана–Дэниеля. Получено, что решения с двумя произвольными константами при определенном значении одной из произвольных констант вырождается в решение для плоской монохроматической волны с огибающей типа солитонной волны.

Ключевые слова: точные решения, уравнение Лакшманана–Порсезиана–Дэниеля, уединенная волна, периодическая волна

DOI: 10.1134/S2304487X21030020

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из популярных уравнений для описания распространения импульса в оптическом волокне является уравнение Лакшманана–Порсезиана–Дэниеля [1–5]. В данной статье рассматривается уравнение Лакшманана–Порсезиана–Дэниеля в виде, предложенном в работе [6]:

$$\begin{gathered} iq_t + iaq_{xxx} + bq_{xxxx} + c|q|^2 q = \\ = \alpha(q_x)^2\overline{q} + \beta|q_x|^2 q + \gamma|q|^2 q_{xx} + \lambda q^2\overline{q}_{xx} + \delta|q|^4 q. \end{gathered} \tag{1}$$

Следуя работе [6], будем искать решения (1), используя переменные бегущей волны:

$$q(x,t) = y(z)e^{-i(\kappa x-\omega t-\theta_0)}, \tag{2}$$

где $z = x - vt$.

Подстановка (2) в (1) приводит (1) к однородному дифференциальному уравнению, для действительной и мнимой части которого имеем

$$\begin{gathered} by'''' + (3a\kappa - 6b\kappa^2)y'' - (\gamma+\lambda)y^2y'' - \\ -(\alpha+\beta)yy'^2 + (b\kappa^4 - a\kappa^3 - \omega)y + \\ + [c + (\alpha-\beta+\gamma+\lambda)\kappa^2]y^3 - \delta y^5 = 0; \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} (a - 4b\kappa)y''' + (4b\kappa^3 - 3a\kappa^2 - v)y' + \\ + 2\kappa(\alpha+\gamma-\lambda)y^2y' = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Система уравнений (3) и (4) является переопределенной и имеет решения только тогда, когда является совместной. Совместность системы дифференциальных уравнений может быть получена несколькими способами. Так, в работе [6] коэффициенты в уравнении (4) полагаются равными нулю. Тогда уравнение (4) тождественно выполняется при любом решении $y(z)$ уравнения (3), и система является совместной. В данной работе будет показано, что система уравнений (3) и (4) допускает также другое условие совместности, использование которого позволяет получить другие точные решения уравнения (1).

2. УСЛОВИЕ СОВМЕСТНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ (3), (4)

Введем в (3) и (4) обозначения:

$$\begin{gathered} p_1 = \frac{1}{b}(6b\kappa^2 - 3a\kappa), \quad p_2 = \frac{1}{b}(\gamma + \lambda), \\ p_3 = \frac{1}{b}(\alpha + \beta), \quad p_4 = \frac{1}{b}(\omega + a\kappa^3 - b\kappa^4), \\ p_5 = -\frac{1}{b}[c + (\alpha - \beta + \gamma + \lambda)\kappa^2], \quad p_6 = \frac{\delta}{b}, \\ p_7 = \frac{2\kappa(\alpha + \gamma - \lambda)}{4b\kappa - a}, \quad p_8 = \frac{4b\kappa^3 - 3a\kappa^2 - v}{4b\kappa - a}. \end{gathered} \tag{5}$$

Тогда систему (3), (4) можно записать в виде

$$y'''' = p_1 y'' + p_2 y^2 y'' + p_3 y y'^2 + p_4 y + p_5 y^3 + p_6 y^5; \tag{6}$$

$$y''' = p_7 y^2 y' + p_8 y'. \tag{7}$$

Из (7), дифференцируя, получаем равенство для y'''':

$$y'''' = 2p_7 y y'^2 + p_7 y^2 y'' + p_8 y''. \tag{8}$$

Интегрируя (7), получаем равенство для y'':

$$y'' = \frac{p_7}{3} y^3 + p_8 y + C_1. \tag{9}$$

Умножая уравнение на y' и интегрируя (9) еще раз, имеем

$$(y')^2 = \frac{p_7}{6} y^4 + p_8 y^2 + 2C_1 y + 2C_2. \tag{10}$$

Поскольку выражение (10) получено интегрированием выражения (7), решение (10) является также решением (7), (9) и (8). Потребуем, чтобы решение (10) также являлось решением (6), то есть чтобы система (6) и (7) была совместна. Тогда производные первого, второго и четвертого порядков, входящие в (6), должны удовлетворять выражениям (8), (9) и (10). Подставив (8), (9) и (10) в (6), получаем условие совместности системы:

$$P_5 y^5 + P_4 y^3 + P_3 y^2 + P_2 y + P_1 \equiv 0,$$

откуда, при $y(z) \neq \mathrm{const}$,

$$P_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 5, \tag{11}$$

где

$$\begin{gathered} P_5 = p_6 + \frac{1}{3} p_2 p_7 - \frac{2}{3} p_7^2 + \frac{1}{6} p_3 p_7, \\ P_4 = p_2 p_8 - \frac{10}{3} p_7 p_8 + p_5 + p_3 p_8 + \frac{1}{3} p_1 p_7, \\ P_3 = C_1(p_2 + 2p_3 - 5p_7), \\ P_2 = 2p_3 C_2 - 4p_7 C_2 + p_1 p_8 - p_8^2 + p_4, \\ P_1 = C_1(p_1 - p_8). \end{gathered} \tag{12}$$

Будем использовать условия (11) для построения точных решений.

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (1)

В предыдущем разделе были получены условия (11), при выполнении которых решение $y(z) \neq \neq \mathrm{const}$ уравнения (10) является решением системы (6), (7). В уравнении (10) присутствуют две произвольные постоянные C_1 и C_2, полученные в результате интегрирования уравнения (7). Поскольку значение постоянной C_1 влияет как на решение уравнения (10), так и на условия совместности (11), далее рассмотрим два отдельных случая: случай $C_1 = 0$ и случай $C_1 \neq 0$.

3.1. Случай $C_1 = 0$ в уравнении (10)

При $C_1 = 0$ из (11) и (12) получаем

$$P_5 = p_6 + \frac{1}{3} p_2 p_7 - \frac{2}{3} p_7^2 + \frac{1}{6} p_3 p_7 = 0, \tag{13}$$

$$P_4 = p_2 p_8 - \frac{10}{3} p_7 p_8 + p_5 + p_3 p_8 + \frac{1}{3} p_1 p_7 = 0, \tag{14}$$

$$P_2 = 2p_3 C_2 - 4p_7 C_2 + p_1 p_8 - p_8^2 + p_4 = 0. \tag{15}$$

Из (13) с учетом (5) находим значение κ:

$$\kappa = \frac{a(\sqrt{\kappa^{*2} + 96\delta b} \pm \kappa^*)}{4b(\sqrt{\kappa^{*2} + 96\delta b} \pm \kappa^* \mp 4(\gamma + \alpha - \lambda))}, \tag{16}$$

где

$$\kappa^* = \beta + \alpha + 2\gamma + 2\lambda.$$

Из (14) и (15) с учетом (5) находим значения v и ω:

$$\begin{gathered} v = [-32b^2(3\beta - \alpha - \gamma + \lambda)\kappa^4 + \\ + 24ab(3\beta + 2\lambda)\kappa^3 - 12a^2(\beta + \alpha + \gamma)\kappa^2 + \\ + 3c(4b\kappa - a)^2][-4b(3\beta - 2\alpha - 2\gamma + 8\lambda)\kappa + \\ + 3a(\beta + \alpha + \gamma + \lambda)]^{-1}; \end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered} \omega = \frac{32b\kappa^3(-2b\kappa + a)^3 + v[(4b\kappa - a)^3 + a^3 + 4b^2 v]}{4b(4b\kappa - a)^2} - \\ - \frac{2C_2[4b(\beta - \gamma + \lambda)\kappa - a(\alpha + \beta)]}{4b\kappa - a} \end{gathered} \tag{18}$$

При $C_1 = 0$ из (10) имеем:

$$(y')^2 = \frac{p_7}{6} y^4 + p_8 y^2 + 2C_2. \qquad (19)$$

Сделаем преобразование $z \to \frac{1}{m} z'$, тогда

$$(y_{z'})^2 - \frac{p_7}{6m^2}(y^2 - y_1^2)(y^2 - y_2^2) = 0, \qquad (20)$$

где

$$y_1 = \sqrt{y^* + \sqrt{y^{*2} - \frac{24C_2(4b\kappa - a)}{\kappa(\gamma + \alpha - \lambda)}}},$$
$$y_2 = \sqrt{y^* - \sqrt{y^{*2} - \frac{24C_2(4b\kappa - a)}{\kappa(\gamma + \alpha - \lambda)}}}; \qquad (21)$$

и

$$y^* = \frac{3v + 9a\kappa^2 - 12b\kappa^3}{2\kappa(\gamma + \alpha - \lambda)}.$$

Решение уравнения (20) имеет вид

$$y(z') = BY(z'), \qquad (22)$$

где $Y(z)$ – эллиптический косинус Якоби, являющийся решением уравнения

$$(Y_z)^2 = (1 - Y^2)(1 - S^2 + S^2Y^2). \qquad (23)$$

Из (20) и (22) имеем:

$$(Y_{z'})^2 = \frac{B^2 p_7}{6m^2}\left(Y^2 - \frac{y_1^2}{B^2}\right)\left(Y^2 - \frac{y_2^2}{B^2}\right),$$

откуда из сравнения с (23) получаем

$$S^2 = \frac{B^2 p_7}{6m^2};$$
$$2S^2 - 1 = -\frac{p_7(y_1^2 + y_2^2)}{6m^2};$$
$$S^2 - 1 = -\frac{p_7 y_1^2 y_2^2}{6B^2 m^2}.$$

Пусть $y_1^2 > y_2^2$, тогда

$$B = \pm y_1, \quad m = \sqrt{-\frac{p_7}{6}(y_1^2 - y_2^2)}, \quad S = \sqrt{\frac{y_1^2}{y_1^2 - y_2^2}}.$$

Решение уравнения (19) с учетом (5) и преобразования $z \to \frac{1}{m} z'$ имеет вид

$$y(z) = \pm y_1 \mathrm{cn}\left\{(z - z_0)\sqrt{-\frac{2\kappa(\alpha + \gamma - \lambda)}{6(4b\kappa - a)}(y_1^2 - y_2^2)}; \sqrt{\frac{y_1^2}{y_1^2 - y_2^2}}\right\}. \qquad (24)$$

Из (2) получаем решение (1) при $C_1 = 0$ и $C_2 \neq 0$:

$$q(x,t) = \pm y_1 e^{-i(\kappa x - \omega t - \theta_0)} \times$$
$$\times \mathrm{cn}\left\{(x - vt - x_0)\sqrt{-\frac{2\kappa(\alpha + \gamma - \lambda)}{6(4b\kappa - a)}(y_1^2 - y_2^2)}; \sqrt{\frac{y_1^2}{y_1^2 - y_2^2}}\right\}, \qquad (25)$$

где y_1 и y_2 определены в соответствии с выражениями (21) через параметры исходного уравнения (1) и произвольную константу C_2, а параметры κ, v, ω определяются через параметры исходного уравнения (1) в соответствии с выражениями (16), (17), (18).

При $C_2 = 0$ решение (24) вырождается в уединенную волну:

$$y(z) = \sqrt{\frac{3v + 9a\kappa^2 - 12b\kappa^3}{\kappa(\gamma + \alpha - \lambda)}} \times$$
$$\times \mathrm{ch}^{-1}\left\{\sqrt{\frac{4b\kappa^3 - 3a\kappa^2 - v}{4b\kappa - a}}(z - z_0)\right\},$$

и решением (1) будет

$$q(x,t) = e^{-i(\kappa x - \omega t - \theta_0)}\sqrt{\frac{3v + 9a\kappa^2 - 12b\kappa^3}{\kappa(\gamma + \alpha - \lambda)}} \times$$
$$\times \mathrm{ch}^{-1}\left\{\sqrt{\frac{4b\kappa^3 - 3a\kappa^2 - v}{4b\kappa - a}}(x - vt - x_0)\right\}, \qquad (26)$$

где κ, v, ω находятся через параметры исходного уравнения (1) в соответствии с выражениями (16), (17), (18).

3.2. *Случай $C_1 \neq 0$ в уравнении (10)*

Пусть $C_1 \neq 0$, тогда параметр κ должен одновременно обращать в нуль коэффициенты P_5 и P_3. Подставив (5) в (12), из $P_3 = 0$ получаем

$$\kappa = \frac{a(2\beta + 2\alpha + \gamma + \lambda)}{2b(4\beta - \alpha - 3\gamma + 7\lambda)}. \qquad (27)$$

Решение (27) должно удовлетворять также уравнению $P_5 = 0$. Подставив (27) в выражение для P_5, получаем два варианта ограничений на коэффициенты уравнения (1):

$$\gamma + \alpha - \lambda = 0; \qquad (28)$$

$$b = \frac{1}{50\delta}(\beta + \alpha - 2\gamma - 2\lambda)(2\beta + 2\alpha + \gamma + \lambda). \qquad (29)$$

Аналогично, значение параметра v должно обращать в нуль одновременно коэффициенты P_1 и P_4. Система $P_1 = 0$, $P_4 = 0$ совместна при условии (28) и

$$c = 125a^2\delta^2(-28\alpha^2 - 6\alpha\beta - 3\alpha\gamma + 57\alpha\lambda +$$
$$+ 22\beta^2 - 53\beta\gamma + 7\beta\lambda + 43\gamma^2 - 34\gamma\lambda - 77\lambda^2)\times$$
$$\times(\gamma + \lambda + 2\alpha + 2\beta)^{-1}(-\beta - \alpha + 2\gamma + 2\lambda)^{-2}\times \tag{30}$$
$$\times(\alpha - 4\beta + 3\gamma - 7\lambda)^{-2}.$$

С учетом условия (28) получаем следующие значения κ и v:

$$\kappa = \frac{a}{4b}, \quad v = -\frac{a^3}{8b^2},$$

при которых (4) тождественно равно нулю, и способ определения совместности системы (3), (4), использованный в данной работе, неприменим. Условие (28) рассматривается в работе [6]. В этой же статье воспользуемся ограничениями (29) и (30).

Из $P_1 = 0$ находим значение v:

$$v = -\frac{1}{b}\kappa(20b^2\kappa^2 - 15ab\kappa + 3a^2). \tag{31}$$

Из $P_2 = 0$ получаем значение ω:

$$\omega = \kappa^3(b\kappa - a) - \frac{2C_2[4b\kappa(\beta - \gamma + \lambda) - a(\alpha + \beta)]}{(4b\kappa - a)} \tag{32}$$

Значения параметров (27), (31) и (32) вместе с условиями (29) и (30) обращают в нуль все коэффициенты (12).

Пусть y_1, y_2, y_3, y_4 – корни полинома $\frac{p_7}{6}y^4 + p_8y^2 + 2C_1y + 2C_2$. С учетом (27) и (31), p_7 и p_8 равны

$$p_7 = \frac{2\beta + 2\alpha + \gamma + \lambda}{5b},$$
$$p_8 = \frac{3a^2(2\beta - 3\alpha - 4\gamma + 6\lambda)(2\beta + 2\alpha + \gamma + \lambda)}{2b^2(4\beta - \alpha - 3\gamma + 7\lambda)}. \tag{33}$$

Обозначив

$$s_0 = \left(\frac{p_8^3}{p_7^3} - \frac{12C_2p_8}{p_7^2} + \frac{9C_1^2}{p_7^2} + \sqrt{-\frac{64C_2^3}{p_7^3} + \frac{81C_1^4 - 216C_1^2C_2p_8 + 96{C_2}^2p_8^2}{p_7^4} + \frac{18{C_1}^2p_8^3 - 36C_2p_8^4}{p_7^5}}\right)^{\frac{1}{3}},$$
$$s = \frac{s_0}{2} + \frac{1}{2s_0}\left(\frac{4C_2}{p_7} + \frac{p_8^2}{p_7^2}\right) - \frac{p_8}{p_7}, \tag{34}$$

для y_1, y_2, y_3, y_4 получаем

$$y_{1,2} = \sqrt{s} \pm \sqrt{-s - \frac{3C_1}{\sqrt{s}p_7} - \frac{3p_8}{p_7}},$$
$$y_{3,4} = -\sqrt{s} \pm \sqrt{-s + \frac{3C_1}{\sqrt{s}p_7} - \frac{3p_8}{p_7}}. \tag{35}$$

Тогда решение уравнения (10) при ограничениях (29) и (30) можно выразить через эллиптический синус Якоби [7]:

$$y(z) = y_1 + (y_2 - y_1)\left[1 - \frac{y_2 - y_3}{y_1 - y_3}\times\right.$$
$$\times \mathrm{sn}^2\left\{\sqrt{\frac{p_7}{24}(y_2 - y_4)(y_1 - y_3)}(z - z_0);\right.$$
$$\left.\left.\sqrt{\frac{(y_1 - y_4)(y_2 - y_3)}{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}}\right\}\right]^{-1},$$

и решением (1) будет

$$q(x,t) = e^{-i(\kappa x - \omega t - \theta_0)}\left(y_1 + (y_2 - y_1)\left[1 - \frac{y_2 - y_3}{y_1 - y_3}\times\right.\right.$$
$$\times \mathrm{sn}^2\left\{\frac{p_7}{24}(y_4 - y_2)(y_1 - y_3)(z - z_0);\right. \tag{36}$$
$$\left.\left.\left.\sqrt{\frac{(y_1 - y_4)(y_2 - y_3)}{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}}\right\}\right]^{-1}\right),$$

где y_1, y_2, y_3, y_4 определяются в соответствии с (35), (34) и (33) через параметры исходного уравнения (1) и произвольные константы C_1 и C_2. Параметры κ, v и ω в (2) определяются в соответствии с (27), (31) и (32).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен альтернативный к использованному в работе [6] подход к нахождению решений уравнения Лакшманана–Порсезиана–Дэниеля в виде плоской монохроматической волны с огибающей, зависящей от переменной бегущей волны. Показано, что такие решения существуют при условии (11). С учетом этого условия были найдены решения (25), (36) в виде плоской монохроматической волны с огибающей в виде периодической волны и условия их существования. Решение (25) при $C_2 = 0$ вырождается в решение (26) в виде плоской монохроматической волны с огибающей в виде уединенной волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alqahtani R.T., Babatin M.M., Biswas A.*, Bright optical solitons for Lakshmanan–Porsezian–Daniel model by semi-inverse variational principle, Optik. 2018. V. 154. P. 109–114.

2. *Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., Triki H., Majid F.B., Zhou Q., Moshokoa S.P., Mirzazadeh M., Belic M.*, Optical solitons with Lakshmanan—Porsezian—Daniel model using a couple of integration schemes, Optik. 2018. V. 158. P. 705—711.
3. *Biswas A., Yildirim Y., Yasar E., Zhou Q., Moshokoa S.P., Belic M.*, Optical solitons for Lakshmanan—Porsezian—Daniel model by modified simple equation method, Optik. 2018. V. 160. P. 24—32.
4. *Jawad A.J.M., Abu-AlShaeer M.J., Biswas A., Zhou Q., Moshokoa S., Belic M.*, Optical solitons to Lakshman-an—Porsezian—Daniel model for three nonlinear forms, Optik. 2018. V. 160. P. 197—202.
5. *Bansal A., Biswas A., Triki H., Zhou Q., Moshokoa S.P., Belic M.*, Optical solitons and group invariant solutions to Lakshmanan—Porsezian—Daniel model in optical fibers and PCF, Optik. 2018. V. 160. P. 86—91.
6. *Zayed E.M.E., Alngar M.E.M., Biswas A., Yıldırım Y., Guggilla P., Khan S., Alzahrani A.K., Belic M.R.*, Cubic—quartic optical soliton perturbation with Lakshmanan—Porsezian—Daniel model, Optik. 2021. V. 233. P. 166385.
7. *Kudryashov N.A.*, Optical solitons of model with integrable equation for wave packet envelope, Chaos, Solitons & Fractals. 2020. V. 141. P. 110325.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2021, vol. 10, no. 3, pp. 260—264

Exact Solutions of the Lakshmanan—Porsezian—Daniel Equation

A. A. Bayramukov[a,#], N. A. Kudryashov[a,##], and A. A. Kutukov[a,###]

[a] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[#]*e-mail: alim.bayr@gmail.com*

[##]*e-mail: nakudr@gmail.com*

[###]*e-mail: alexkutuk@gmail.com*

Received June 9, 2021; revised June 16, 2021; accepted June 22, 2021

Abstract—The Lakshmanan—Porsezian—Daniel equation, which is used to describe pulse propagation through optical fibers apart from the nonlinear Schrödiger equation, is considered. Assuming that the Lakshmanan—Porsezian—Daniel equation holds a solution in the form of a monochromatic wave with an envelope as a function of the travelling wave variable, this partial differential equation is reduced to the overdetermined system of two ordinary differential equations for the envelope of the monochromatic wave. The method to obtain consistency of the ordinary differential equation system, which is different from assuming that coefficients of one of the equations are zero, is presented. Using the consistency condition obtained, two periodic solutions for the envelope of the monochromatic wave are derived from the ordinary differential equation system. These solutions are expressed in terms of the Jacobi elliptic functions and contain two and three arbitrary constants, respectively. The existence criteria for these solutions are presented. It is shown that one of the presented solutions degenerates to a soliton solution for a particular value of one of the arbitrary constants.

Keywords: exact solutions, Lakshmanan—Porsezian—Daniel equation, solitary wave, periodic wave

DOI: 10.1134/S2304487X21030020

REFERENCES

1. Alqahtani R.T., Babatin M.M., Biswas A., Bright optical solitons for Lakshmanan—Porsezian—Daniel model by semi-inverse variational principle, *Optik*, 2018, vol. 154, pp. 109—114.
2. Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., Triki H., Majid F.B., Zhou Q., Moshokoa S.P., Mirzazadeh M., Belic M., Optical solitons with Lakshmanan—Porsezian—Daniel model using a couple of integration schemes, *Optik*, 2018, vol. 158, pp. 705—711.
3. Biswas A., Yildirim Y., Yasar E., Zhou Q., Moshokoa S.P., Belic M., Optical solitons for Lakshmanan—Porsezian—Daniel model by modified simple equation method, *Optik*, 2018, vol. 160, pp. 24—32.
4. Jawad A.J.M., Abu-AlShaeer M.J., Biswas A., Zhou Q., Moshokoa S., Belic M., Optical solitons to Lakshman-an—Porsezian—Daniel model for three nonlinear forms, *Optik*, 2018, vol. 160, pp. 197—202.
5. Bansal A., Biswas A., Triki H., Zhou Q., Moshokoa S.P., Belic M., Optical solitons and group invariant solutions to Lakshmanan—Porsezian—Daniel model in optical fibers and PCF, *Optik*, 2018, vol. 160, pp. 86—91.
6. Zayed E.M.E., Alngar M.E.M., Biswas A., Yıldırım Y., Guggilla P., Khan S., Alzahrani A.K., Belic M.R., Cubic—quartic optical soliton perturbation with Lakshmanan—Porsezian—Daniel model, *Optik*, 2021, vol. 233, pp. 166385.
7. Kudryashov N.A., Optical solitons of model with integrable equation for wave packet envelope, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2020, vol. 141, pp. 110325.