

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ИСТОЩЕНИЯ ЗАПАСОВ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ С РАЗНОЙ СЕБЕСТОИМОСТЬЮ ДОБЫЧИ

© 2021 г. Н. С. Ростовский^{1,*}, Н. Г. Литвинова¹

¹ Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

*e-mail: NSRostovskii@mephi.ru

Поступила в редакцию 26.04.2021 г.

После доработки 28.04.2021 г.

Принята к публикации 11.05.2021 г.

Оценка времени истощения запасов полезных ископаемых и темпов их добычи является актуальной задачей для добывающих отраслей. Различие условий добычи и методов извлечения полезных ископаемых приводит к значительному разбросу их себестоимости и, как следствие, разной интенсивности добычи в зависимости от цены спроса, себестоимости добычи и иных характеристик рынка. Для прогнозирования динамики истощения невозобновляемых полезных ископаемых (урана, железа, никеля, меди и прочих) с учетом различной себестоимости добычи на разных месторождениях, предложена модель в виде нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. Исходными (известными) параметрами модели являются: разведанный остаточный объем ископаемого ресурса, текущая рыночная цена данного ископаемого извлекаемого традиционными методами, годовой объем добычи ресурса и себестоимость добычи в начальный период прогнозирования. В работе приведены результаты численного моделирования добычи некоторого условного ресурса для модельной функции распределения себестоимости, цен спроса на ресурс и интенсивности добычи от ожидаемого дохода добывающих компаний с учетом влияния исторических цен. Показано, что интенсивность добычи и скорость истощения месторождения существенно зависят от скачков себестоимости и характера влияния исторических цен.

Ключевые слова: себестоимость добычи природных ресурсов, модель динамики истощения ресурса

DOI: 10.1134/S2304487X2103010X

ВВЕДЕНИЕ

Для оценки состояния месторождения принято оценивать запасы полезного ископаемого, под которым понимается количество рентабельно извлекаемого сырья для действующих цен спроса [1]. Количество запасов можно получить на основании многочисленных специальных выполненных проб, с учетом технико-экономических факторов в процессе освоения нового месторождения. При этом запасы, имеющие практическую для извлечения ценность, зависят от конкретных условий, определяющих себестоимость и предельно допустимой себестоимости добычи, учитывая текущую экономическую ситуацию в мире и соотношения этой себестоимости с рыночной ценой [2, 3]. При этом геологические запасы, достоверно оцененные на конкретном месторождении, чья себестоимость получения готовой продукции превышает возможную цену его реализации на рынке, не влияет на рынок. Модели для прогнозирования темпа разработки и истощения месторождений с учетом текущей и будущей себестоимости добычи, дают возможность оценить и скорректировать стратегические планы добыва-

ющих компаний, определить оптимальную интенсивность разработки, скорость изменения себестоимости и рентабельности.

Математические модели динамики истощения ограниченного ресурса впервые упоминаются еще в работах Джозефа Таунсенда (1739–1816 гг.) и Томаса Мальтуса (1766–1834 гг.). Значительное продвижение в этом направлении оказали работы Кинга Хабберта (1903–1989 гг.) [4, 5]. В предложенной им модели на основе исходных данных из прошлой истории добычи определяется скорость добычи полезного ископаемого (нефти или газа) от времени. Как было показано в этой модели добыча сначала быстро наращивается, затем достигает максимума и после этого уменьшается вплоть до окончательного истощения ресурса. Модель К. Хабберта хорошо себя зарекомендовала и инициировала дискуссии о сроках истощения невозобновляемых ресурсов. Для корректного прогнозирования по данной модели требуются данные о начальных годах освоения ресурса, которые часто отличаются волатильностью и не всегда доступны в открытых источниках, что отражается в погрешностях при прогнозировании добычи. Развитие

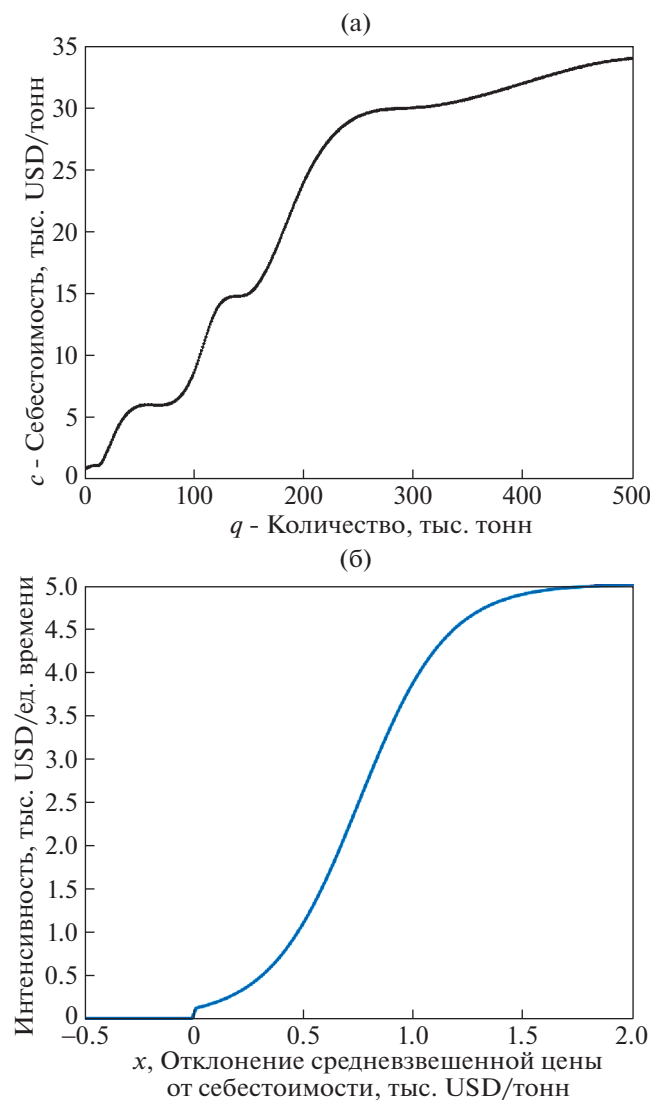


Рис. 1. а) Зависимость распределения объемов полезного ископаемого от себестоимости добычи; б) интенсивность добычи в зависимости от x .

данной модели нашло отражение в работе Харитонova В.В., Ульянина Ю.А., Сливы Д.Е. [6] посвященной добычи урана. Эта модель в меньшей степени опирается на историческую информацию по добыче ресурса. В статье был выполнен прогноз истощения энергетических ресурсов, учитывая заданный темп развития ядерной энергетики, с допущением, что в первую очередь будут истощаться месторождения с минимальной себестоимостью добычи, далее необходимо будет подключать месторождения со все большей себестоимостью добычи, что приведет к росту себестоимости добычи и, вероятно, рыночных котировок на уран. Дальнейшее развитие этой модели нашло отражение в работе Иванова В.В., Крынева А.В., Сливы Д.Е., Ульянина Ю.А., Харитонova В.В., которая учиты-

вает дифференциацию разведанных запасов природного урана по себестоимости его добычи [7].

В настоящей работе предложена модель, в которой при известных: начальной интенсивности добычи; распределения ресурсов по себестоимости; типа зависимости цен от текущей себестоимости, можно прогнозировать уровень добычи в последующих периодах. А также определяется динамика изменения текущей себестоимости по мере добычи и истощении ископаемых (урана, железа, меди и прочих).

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Добычающие компании, как правило, проводят анализ объемов полезных ископаемых в месторождениях; сортируют эти запасы в зависимости от себестоимости их добычи; и, естественно, разрабатывают те из них, которые на текущий момент имеют минимальную себестоимость. Таким образом, можно ввести функцию распределения запасов ресурсов по их себестоимости.

Тем самым, текущий объем добытых ископаемых $q(t)$ (начиная с некоторого момента) можно однозначно связать с текущей себестоимостью $c(t)$. Введем функцию имеющихся текущих запасов от текущей себестоимости добычи

$$q(c(t)), \quad (1)$$

и обратно введем функцию себестоимости $c(q)$ как функцию от добытых объемов. На рис. 1а представлен пример такой функции для некоторого условного ископаемого. Тогда актуальной себестоимостью в текущий момент t будет самая левая точка на графике рис. 1а.

Обозначим $k(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ — скорость добычи имеющихся запасов как интенсивность разработки. Предполагая, что существуют непрерывные производные первого порядка с учетом (1) имеем

$$k(t) = \frac{dq(t)}{dt} = q'_c(c) \cdot \frac{dc(t)}{dt}. \quad (2)$$

Текущую цену спроса на ресурс обозначим — $P(t)$. Можно сделать естественное предположение, что для добывающей отрасли, чем выше цена спроса $P(t)$ над текущей себестоимостью добычи $c(q(t))$, тем интенсивней идет разработка, а при цене спроса близкой или меньше себестоимости, добыча прекращается. То есть степень превышения цены спроса над себестоимостью — это стимул к производству (величина интенсивности добычи) и она ограничена только имеющимися максимальными мощностями добывающих компаний $k_{\max}$. Отметим также, что, как правило, добывающие компании имеют значительную долю контрактов в виде долговременных. Поэтому вместо текущей

рыночной цены ориентируются на некоторую усредненную за определенный период цену $\bar{P}(t)$. Пример поведения такой функции представлен на рис. 1б. описывающей функцию, зависящую от степени отклонения усредненной цены от текущей (наилучшей себестоимости)

$$k(t) = f(\bar{P}(t) - c(t)). \quad (3)$$

Полагая, что (3) непрерывно дифференцируемая функция обозначим

$$x = \bar{P}(t) - c(t), \quad f' = \frac{df}{dx}. \quad (4)$$

В зависимости от типа ископаемого можно рассмотреть несколько вариантов усреднения текущих цен спроса в момент t , введя функцию забывания $\varphi(t - \tau)$. Обозначим $\bar{P}(t)$ усредненную с учетом функции забывания цену на добытый продукт

$$\bar{P}(t) = \int_{t-T}^t P(\tau) \cdot \varphi(t - \tau) \cdot d\tau. \quad (5)$$

Рассмотрим динамику изменения темпов, объема добычи и себестоимости ресурса. Согласно сделанным выше предположениям, изменение объема добытого сырья приводит к изменению себестоимости

$$\Delta q \cong \frac{dq}{dt} \cdot \Delta t, \quad \Delta c \cong \frac{dc}{dq} \cdot \Delta q. \quad (6)$$

Реализация вновь добытого ресурса, в свою очередь приводит (согласно (6)) к изменению усредненной цены и с учетом изменившейся себестоимости к изменению темпов добычи

$$\begin{aligned} \Delta k(t) &= k(t + \Delta t) - k(t) = \\ &= f(\bar{P}(t + \Delta t) - c(t + \Delta t)) - f(\bar{P}(t) - c(t)). \end{aligned}$$

То есть приближенно

$$\begin{aligned} \Delta k(t) &\cong f' \cdot \Delta(\bar{P}(t) - c(t)) = \\ &= f'(\bar{P}(t) - c(t)) \cdot \left(\frac{d\bar{P}}{dt} - \frac{dc}{dt} \right) \cdot \Delta t. \end{aligned} \quad (7)$$

Обозначим производные

$$c'_q(q) = \frac{dc}{dq}, \quad c'_t(t) = \frac{dc}{dt}, \quad \bar{P}'_t(t) = \frac{d\bar{P}(t)}{dt}.$$

Учитывая (2) получим:

$$c'_t(t) = c'_q(q(t)) \cdot \frac{dq}{dt} = c'_q(q(t)) \cdot k(t).$$

Следовательно

$$\Delta k(t) \cong f'(\bar{P}(t) - c(t)) \cdot (\bar{P}'_t(t) - c'_q(q) \cdot k(t)) \cdot \Delta t. \quad (8)$$

Откуда получим дифференциальное уравнение первого порядка для интенсивности добычи с начальными условиями

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) + f'(\bar{P}(t) - c(q(t))) \cdot c'_q(q(t)) \cdot k(t) - \\ - f'(\bar{P}(t) - c(q(t))) \cdot \bar{P}'_t(t) = 0, \\ k_0 = k(0). \end{aligned} \quad (9)$$

Заменяя интенсивность, согласно (2), получим дифференциальное уравнение второго порядка (10) для определения объема добытого сырья $q(t)$ в зависимости от времени при заданных начальных значениях (11).

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) + f'(\bar{P}(t) - c(q(t))) \cdot c'_q(q(t)) \cdot \dot{q}(t) - \\ - f'(\bar{P}(t) - c(q(t))) \cdot \bar{P}'_t(t) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\dot{q}(0) = k(0) = k_0, \quad q(0) = q_0. \quad (11)$$

Решая задачу (10)–(11) для $q(t)$, также находим, согласно (2), интенсивность добычи $k(t)$ и текущее значение себестоимости добычи $c(q(t))$.

2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ДОБЫЧИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЗАБЫВАНИЯ

Ниже представлены результаты численного моделирования динамики добычи в зависимости только от одного функционального параметра: $\varphi(t - \tau)$ — функции забывания. Длительность моделирования составляла $T_{max} = 130$ временных шагов — $\Delta t = 1$.

При расчетах использовались следующие соотношения для зависимости интенсивности отклонения средней цены от себестоимости:

$$x(t) = \bar{P}(t) - c(t), \quad (12)$$

$$k(x) = k_{max} \cdot (\text{th}(2.5(x - 0.75)) + 1), \quad \text{при } x \geq 0, \quad (13)$$

$$k(x) = 0, \quad \text{при } x < 0.$$

Предполагалось, что рынок следит за текущей себестоимостью и закладывает в цену как маржу продавца (первое слагаемое), так и оценку средневзвешенной цены за определенный период T (второе слагаемое):

$$p(t) = 1.1c(t) + 0.5\bar{P}(t), \quad T = 12. \quad (14)$$

В зависимости от типа ископаемого ниже представлены три варианта усреднения текущих цен спроса (рис. 2а) в момент t , для разных функций забывания $\varphi(t - \tau)$:

1 вариант. Быстрое забывание — более актуальны текущие цены (синяя линия);

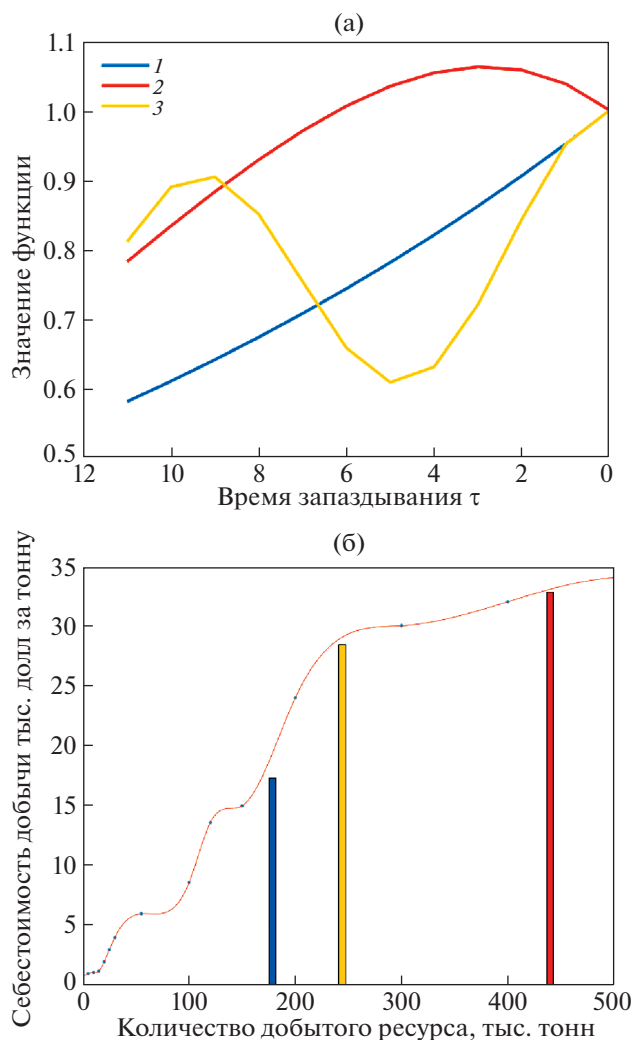


Рис. 2. а) Варианты функций забываний; б) себестоимость добычи к финальной точке расчета.

2 вариант. Медленное забывание — фиксирование большинства цен в долгосрочных контрактах (оранжевая линия);

3 вариант. Забывание и вспоминание — присутствует сезонный фактор (желтая линия).

На рис. 2б столбиками показаны уровни добытого ресурса (к моменту окончания моделирования T_{max}) и соответствующие этому моменту себестоимости добычи (соответствие цветов на графике то же, что и на рис. 2а).

Как видно из рис. 2–4 динамика добычи сильно зависит от типа функции забывания.

На рис. 3а, б представлены цены на ресурс и объемы добытого ресурса соответственно. Самый медленный темп роста цены и объема добытого ископаемого для варианта 1 — синий цвет. При завышенных оценках (вариант 2 оранжевый цвет на рис. 3а, б) — максимальный темп роста цены и

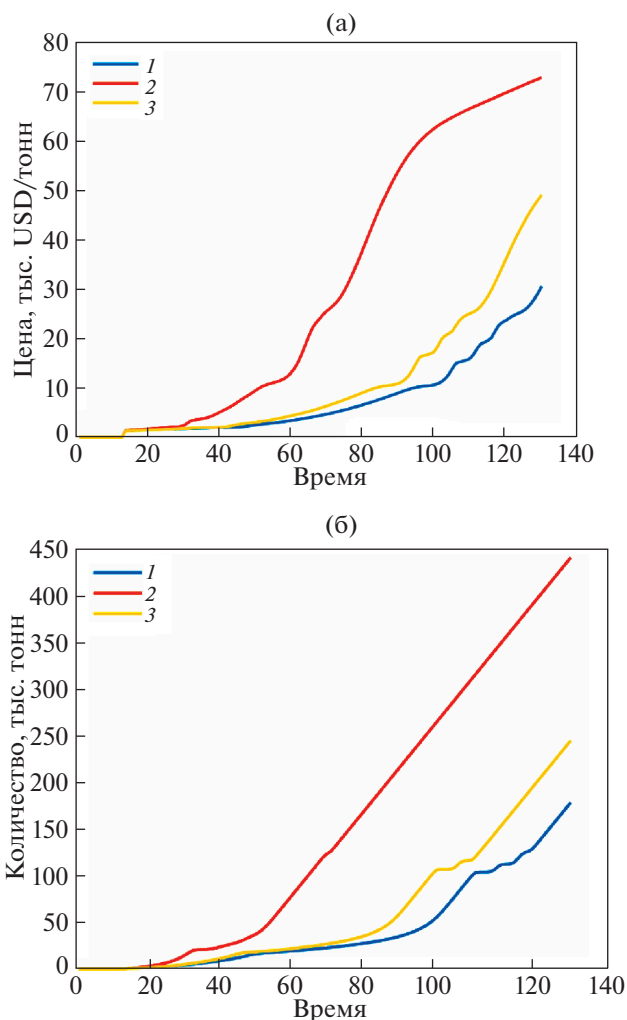


Рис. 3. а) Цена ископаемого в зависимости от времени; б) объем добытого ископаемого в зависимости от времени.

максимальный объем добычи. При наличии сезонности (вариант — 3, желтый цвет на рис. 3а, б) — промежуточное поведение.

Максимальный рост себестоимости (рис. 4а) и выработки ископаемых наблюдается при завышенных оценках усредненной стоимости (вариант 2), наименьший — при плавном забывании исторических цен (вариант 1), и промежуточный — при наличии сезонного фактора (вариант 3).

На рис. 4б представлена интенсивность добычи. При самом медленном темпе добычи (вариант — 1 синий цвет на рис 4б) — видна медленная адаптация к растущей себестоимости (рис. 4а), с частыми отказами от покупки (и соответственно прекращении добычи) при переходе себестоимости к более высоким уровням. Для варианта 2 (оранжевый цвет на рис 4а) — характерна быстрая разработка и истощение запасов с низкой себестоимостью.

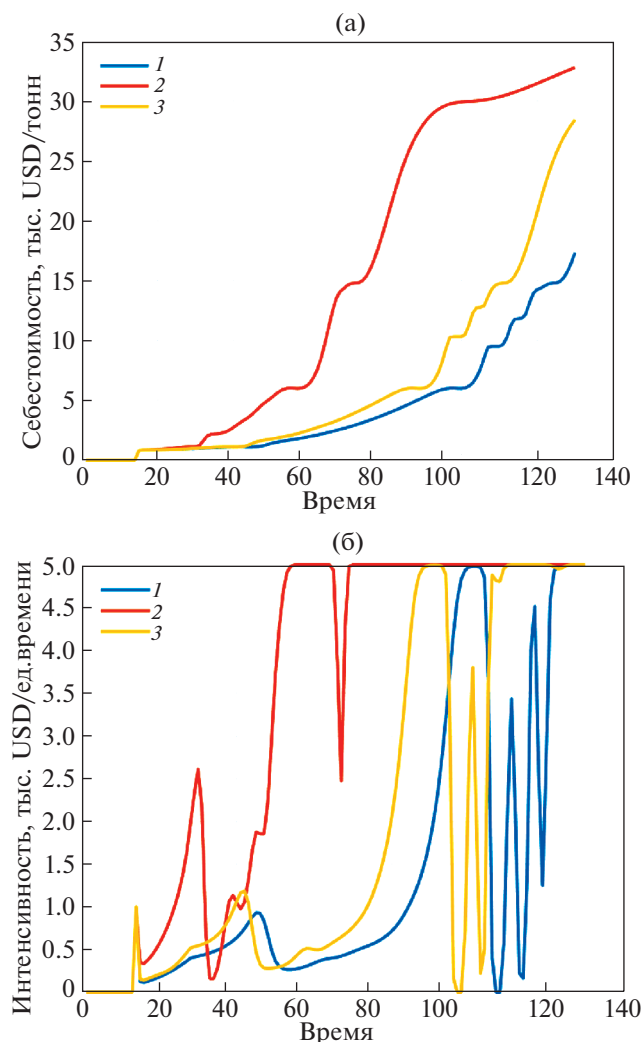


Рис. 4. а) Себестоимость добычи в зависимости от времени; б) интенсивность добычи ископаемого в зависимости от времени.

стью, и далее переход к добыче с высокой себестоимостью. А для интенсивности (оранжевый цвет на рис 4б) краткосрочные откаты в интенсивности добычи быстро преодолеваются и переходят к максимальному темпу добычи. Для варианта 3 — наблюдается промежуточное поведение (желтый цвет на рис 4б), то есть откаты в интенсивности разработки преодолеваются и переходят к максимальному темпу добычи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в рамках предложенной модели результаты показывают, что максимальный рост себестоимости и выработки ископаемых наблюдается при завышенных оценках усредненной стоимости, наименьший — при плавном забывании исторических цен, например, когда нет дол-

госрочных контрактов на поставку, и промежуточный — при наличии сезонного фактора. Данная модель позволяет при известных оценках себестоимости добычи имеющихся запасов полезных ископаемых (таких как уран, никель, медь, литий, себестоимость добычи которых существенно зависит от условий и методов добычи) и при известной статистике цен на рынке (в зависимости от себестоимости) прогнозировать интенсивность добычи, скорость истощения запасов и изменение себестоимости добычи.

В этой модели не рассматривается влияние на динамику добычи имеющихся или создающихся запасов этих ресурсов. То есть, считается, что добытые ресурсы практически сразу находят себе применение. Также в модели не учитывается регулирование добычи путем введения квот или иных ограничений со стороны государств и изменение производственных мощностей добывающих компаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Конторович А.Э., Энов М.И., Эдер Л.В.* Долгосрочные и среднесрочные факторы и сценарии развития глобальной энергетической системы в XXI веке. Геология и геофизика, 2014. Т. 55. № 5–6. С. 689–700.
2. *Новикова О.В., Попова М.Н.* Анализ современных представлений о продолжительности “нефтяной эры” и прогноз нефтедобычи в России в первой половине XXI века. Электронный научный журнал “Георесурсы. Геоэнергетика. Геополитика”, 2010. Вып. 2 (2). С. 12.
3. *Харитонов В.В., Кабашев К.В., Маликов Р.Р.* Долгосрочные тренды истощения традиционных энергетических ресурсов и перспективы ядерной энергетики: Монография, М.: НИЯУ МИФИ, 2016. 96 с.
4. *Hubbert M. King.* Nuclear Energy and the Fossil Fuels. American Petroleum Institute. Publication № 95. Shell Development Company. June, 1956. P. 1–40.
5. *Hubbert M. King.* Energy Resources. A Report to the Committee on Natural Resources; National Academy of Sciences, National Research Council: Washington, DC, USA, 1962. P. 1–141.
6. *Харитонов В.В., Ульянин Ю.А., Слива Д.Е.* Аналитическое моделирование динамики истощения невозобновляемых традиционных энергетических ресурсов. Вестник НИЯУ МИФИ, 2019. № 4. С. 370–379.
7. *Иванов В.В., Крянев А.В., Слива Д.Е., Ульянин Ю.А., Харитонов В.В.* Математическое моделирование процесса истощения добываемых ресурсов на примере природного урана. Письма в ЭЧАЭ, 2020. Т. 17. № 2 (227). С. 226–230.

Modeling of the Dynamics of Depletion of Mineral Reserves with Different Production Costs

N. S. Rostovsky^{a, #} and N. G. Litvinova^a

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: NSRostovskii@mephi.ru

Received April 26, 2021; revised April 28, 2021; accepted May 11, 2021

Abstract—It is an urgent task for the extractive industries to estimate the time of depletion of mineral reserves and the rate of their production. The difference in mining conditions and methods for extracting minerals leads to a significant spread in their cost and, consequently, different production intensities depending on the demand price, production cost, and other market characteristics. A model is proposed in the form of a non-linear differential equation of the second-order to predict the dynamics of the depletion of non-renewable minerals (uranium, iron, nickel, copper, and others), considering different production costs in different fields. The initial (known) parameters of the model are the explored residual volume of the fossil resource, the current market price of this fossil recoverable by traditional methods, the annual volume of resource extraction, and the production cost in the initial forecasting period. It presents the results of numerical modeling of the production of a certain conditional resource for the model function of the distribution of cost, demand prices for the resource, and the intensity of production from the expected income of mining companies, taking into account the influence of historical prices. It is shown that the intensity of production and the rate of depletion of the field significantly depends on the surges in the cost and the nature of the influence of historical prices.

Keywords: exhaustion of natural resources, model, dynamics of resource depletion

REFERENCES

1. Kontorovich A.E., Epov M.I., Eder L.V. *Dolgosrochnye i srednesrochnye faktory i stsennari razvitiya global'noi energeticheskoi sistemy v XXI veke*. [Long-term and medium-term factors and scenarios for the development of the global energy system in the CAHI century]. *Geologiya i geofizika*, 2014. vol. 55. no 5–6. pp. 689–700. (in Russian)
2. Novikova O.V., Popova M.N. *Analiz sovremennykh predstavlenii o prodolzhitel'nosti "neftyanoi ery" i prognoz neftedobychi v Rossii v pervoi polovine XXI veka*. [Analysis of modern ideas about the duration of the "oil era" and forecast of oil production in Russia in the first half of the XXI century]. *Elektronnyi nauchnyi zhurnal "Georesursy. Geoenergetika. Geopolitika"*, 2010, V. 2 (2). pp. 12. (in Russian)
3. Kharitonov V.V., Kabashev K.V., Malikov R.R. *Dolgosrochnye trendy ischerpaniya traditsionnykh energeticheskikh resursov i perspektivy yadernoi energetiki*. [Long-term trends in the depletion of traditional energy resources and the prospects for nuclear power]. Moscow, NIYaU MIFI Publ, 2016. 96 p.
4. Hubbert M. King. *Nuclear Energy and the Fossil Fuels*. American Petroleum Institute. Publication No. 95. *Shell Development Company*. June, 1956. pp. 1–40.
5. Hubbert M. King. *Energy Resources. A Report to the Committee on Natural Resources*; National Academy of Sciences, National Research Council: Washington, DC, USA, 1962. pp. 1–141.
6. Kharitonov V.V., Ul'yanin Yu.A., Sliva D.E. *Analiticheskoe modelirovanie dinamiki ischerpaniya nevozobnovlyaemykh traditsionnykh energeticheskikh resursov*. [Analytical modeling of the dynamics of the depletion of non-renewable traditional energy resources]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2019. no 4. pp. 370–379. (in Russian)
7. Ivanov V.V., Kryanev A.V., Sliva D.E., Ul'yanin Yu.A., Kharitonov V.V. *Matematicheskoe modelirovanie protsessy ischerpaniya dobyvaemykh resursov na primere prirodnogo urana*. [Mathematical modeling of the process of depletion of extracted resources by the example of natural uranium]. *Pis'ma v EChAE*, 2020, vol. 17. no. 2 (227), pp. 226–230. (in Russian)