

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ
ЧЕНА–ЛИ–ЛЮ

© 2021 г. Н. А. Кудряшов^{1,*}, Н. В. Ермолаева^{1,2,**}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409 Россия

² Волгодонский инженерно-технический институт НИЯУ МИФИ, г. Волгодонск, Ростовская обл., 347360, Россия

*e-mail: nakudr@gmail.com

**e-mail: NVErmolayeva@mephi.ru

Поступила в редакцию 24.10.2021 г.

После доработки 25.10.2021 г.

Принята к публикации 28.10.2021 г.

Рассматривается возмущенное уравнение Чена–Ли–Лю с произвольным показателем преломления, описывающее распространение импульсов в нелинейной оптике. Для поиска решения данного нелинейного дифференциального уравнения в частных производных используются переменные бегущей волны. Разделяя мнимую и действительные части полученного уравнения, и приравнявая их к нулю, получена система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Определены условия совместимости системы ОДУ. Найдены стационарные точки системы уравнений. Получены точные решения математической модели при $n = 1$ и $n = 2$, выраженные через эллиптические функции Якоби и Вейерштрасса. Показано, что найденные решения в случае произвольного показателя преломления имеют форму периодических и уединенных волн (оптических солитонов).

Ключевые слова: возмущенное уравнение Чена–Ли–Лю, произвольный показатель преломления, бегущая волна, точное решение, оптический солитон

DOI: 10.1134/S2304487X21040088

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные волновые процессы различной физической природы имеют большое значение для развития науки и техники. Исследование закономерностей распространения таких волн является актуальной задачей, поскольку волновые процессы являются эффективным средством передачи энергии и информации. Особую роль нелинейные волновые процессы играют в волоконно-оптических линиях связи, где при определенных условиях нелинейные эффекты способствуют увеличению скорости и дальности передачи информации.

Важное значение в оптоволоконной технологии имеет передача информации оптическими солитонами – лазерными импульсами, которые за счет совместного действия нелинейных и дисперсионных эффектов распространяются по световоду без дисперсионного уширения.

Описание динамики нелинейных волновых процессов в оптоволокне является важной задачей. В настоящее время известен целый ряд нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которые используются при описании динамики этих процессов [1–3].

Данная работа посвящена исследованию возмущенного уравнения Чена–Ли–Лю с произвольным показателем преломления, описывающего распространение импульсов в оптическом волокне [3].

Возмущенная модель Чена–Ли–Лю с произвольным показателем преломления описывается следующим уравнением в частных производных

$$iq_t + aq_{xx} + ib(|q|^{2n}q_x) + i[\alpha q_x + \lambda(|q|^{2n}q)_x + \beta(|q|^{2n})_x q] = 0, \quad (1)$$

где $q(x, t)$ – комплексная функция для профиля оптической волны, a, b, α, λ и β – параметры уравнения.

Уравнение (1) является обобщением хорошо известного возмущенного уравнения Чена–Ли–Лю [3], которое следует из уравнения (1) при $n = 1, \alpha = \lambda = \beta = 0$. Стандартная модель Чена–Ли–Лю является интегрируемым уравнением в частных производных [4–6]. Результаты исследований этой модели можно найти в работах [7–10]. Однако, как правило, показатель преломления при распространении импульса в оптическом волокне принимается равным фиксированному значению, тогда как его реальные значения могут отли-

чатся. В связи с этим в недавних работах [11–14] были рассмотрены математические модели с произвольным коэффициентом отражения.

Целью данной работы является отыскание точных аналитических решений в виде оптических солитонов нелинейных волновых процессов, описываемых уравнением (1).

Настоящая работа имеет следующую структуру. Во втором разделе представлена система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая уравнению (1) с учетом редукции бегущей волны и найдены условия совместности системы уравнений. В третьем разделе найдены стационарные точки для системы уравнений. В четвертом и пятом разделах представлены общие решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения при $n = 1$ и $n = 2$. В шестом разделе приведены формулы для уединенных волн при произвольном показателе преломления.

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ УРАВНЕНИЮ ЧЕНА–ЛИ–ЛЮ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Найдем точное решение уравнения (1) используя переменные бегущей волны

$$q(x, t) = y(z)e^{i(kx - \omega t)}, \quad z = x - C_0 t, \quad (2)$$

где $y(z)$ – функция для описания профиля оптического импульса, ω и k – параметры, z – переменная, зависящая от x и t , C_0 – скорость распространения волны.

Подставляя $q(x, t)$ в уравнение (1) и приравнявая в полученном выражении к нулю действительную и мнимую части, получим систему уравнений для функции $y(z)$ в виде

$$(2ak - C_0 + \alpha)y_z + (b + 2\beta n + \lambda + 2\lambda n)y^{2n}y_z = 0, \quad (3)$$

$$\alpha y_{zz} + (\omega - \alpha k - ak^2)y + k(\lambda + b)y^{2n+1} = 0. \quad (4)$$

Видно, что система уравнений (3) и (4) переопределена, потому что неизвестная функция $y(z)$ должна быть решением уравнений (3) и (4). Кроме того, уравнение (3) является нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка, в то время как уравнение (4) – нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка.

Отметим наличие первого интеграла уравнения (3) в виде

$$(2ak - C_0 + \alpha)y + \frac{b + 2\beta n + \lambda - 2\lambda n}{2n + 1}y^{2n+1} = C_1, \quad (5)$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Система уравнений (3) и (4) будет совместной в случае

$$C_0 = 2ak + \alpha, \quad b = -\lambda - 2n(\beta + \lambda). \quad (6)$$

При выполнении условия (6) решение уравнения (1) сводится к решению уравнения (4).

3. СТАЦИОНАРНЫЕ ТОЧКИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Перепишем уравнение (4) с учетом условия (6) в виде

$$y_{zz} + \frac{\omega - \alpha k - \alpha k^2}{a}y + \frac{2n(\beta + \lambda)}{a}y^{2n+1} = 0. \quad (7)$$

Итак, нам нужно решить следующее уравнение

$$y_{zz} - \nu y + \mu y^{2n+1} = 0, \quad (8)$$

где ν и μ определяются формулами

$$\nu = \frac{\alpha k + \alpha k^2 - \omega}{a}, \quad \mu = \frac{2nk(\lambda + \beta)}{a}. \quad (9)$$

Уравнение (8) можно записать в виде динамической системы

$$y_z = p, \quad p_z = \nu y - \mu y^{2n+1}. \quad (10)$$

Стационарные точки системы уравнений (10) находятся путем решения системы алгебраических уравнений

$$p = 0, \quad \nu y - \mu y^{2n+1} = 0. \quad (11)$$

Для системы уравнений (10) имеются следующие стационарные точки:

$$O_1 = (0, 0) \quad O_{2,3} = \left(0, \pm \left(\frac{\nu}{\mu} \right)^{\frac{1}{2n}} \right). \quad (12)$$

Из формулы (12) получаем, что имеются три стационарные точки O_1 , O_2 и O_3 при $\nu/\mu > 0$, а также одна стационарная точка при $\nu/\mu < 0$ [15].

Отметим, что все стационарные точки будут находиться на оси y . Точка $O(0, 0)$ является точкой покоя системы (10).

Для системы уравнений (10) существует гамильтониан в виде

$$H = p^2 - \nu y^2 + \frac{\mu}{n+1}y^{2n+2}. \quad (13)$$

Этот гамильтониан соответствует первому интегралу уравнения (8) в форме

$$y_z^2 - \nu y^2 + \frac{\mu}{n+1}y^{2n+2} = C_2. \quad (14)$$

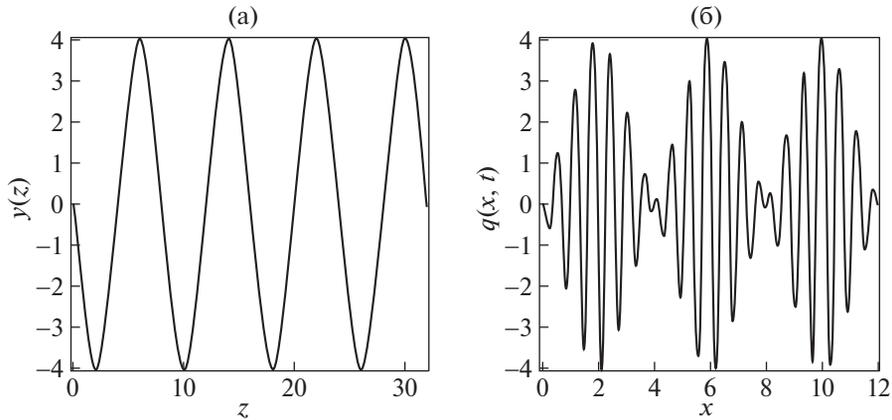


Рис. 1. а) Решение (20) уравнений (8) при $\mu = 0.1, \nu = 0.5, z_0 = 4.0, k = 10$; б) решение $q(x, t)$ уравнения (1) при $\mu = 0.1, \nu = 0.5, z_0 = 4.0, C_2 = 5.0$ и $k = 10.0$.

В общем случае решение дифференциального уравнения первого порядка (14) может быть представлено в виде квадратуры

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C_2 + \nu y^2 - \frac{\mu}{n+1} y^{2n+1}}} = z - z_0, \quad (15)$$

где z_0 – произвольная константа.

Интеграл (15) в общем случае не вычисляется. Однако некоторые аналитические решения могут быть получены используя эллиптические функции.

4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (14) ПРИ $n = 1$

Используя новую переменную

$$y(z) = V(z)^{\frac{1}{n}}, \quad (16)$$

уравнение (14) преобразуется к виду

$$V_z^2 - \nu n^2 V^2 + \frac{\mu n^2}{n+1} V^4 - C_2 n^2 V^{2-\frac{2}{n}} = 0. \quad (17)$$

Найдем решение уравнения (14) в случае $n = 1$. Из уравнения (17) при $n = 1$ получим уравнение в виде

$$V_z^2 - \nu V^2 + \frac{\mu}{2} V^4 - C_2 = 0. \quad (18)$$

Общее решение уравнения (18) выражается через эллиптическую функцию Якоби в виде [16, 17]

$$V(z) = \frac{C_2 \sqrt{2}}{\sqrt{C_2 \sqrt{2\mu C_2 + \nu^2} - \nu}} \times \text{sn} \left\{ \frac{(z - z_0)}{2} \sqrt{2\sqrt{2\mu C_2 + \nu^2} - 2\nu}; S \right\}, \quad (19)$$

$$S = \frac{\sqrt{(\nu \sqrt{2\mu C_2 + \nu^2} - \mu C_2 - \nu^2) C_2 \mu}}{\mu C_2 + \nu^2 - \nu \sqrt{2\mu C_2 + \nu^2}}.$$

Периодическое решение $y(z)$ уравнения (14) при $n = 1$ можно записать принимая во внимание эллиптический синус в виде

$$y(z) = \frac{C_2 \sqrt{2}}{\sqrt{C_2 \sqrt{2\mu C_2 + \nu^2} - \nu}} \times \text{sn} \left\{ \frac{(z - z_0)}{2} \sqrt{2\sqrt{2\mu C_2 + \nu^2} - 2\nu}; S \right\}, \quad (20)$$

$$S = \frac{\sqrt{(\nu \sqrt{2\mu C_2 + \nu^2} - \mu C_2 - \nu^2) C_2 \mu}}{\mu C_2 + \nu^2 - \nu \sqrt{2\mu C_2 + \nu^2}}.$$

Периодические решения (20) уравнения (14) имеют две произвольных постоянных C_2 и z_0 . Это решение соответствует решению $q(x, t)$ при $n = 1$. Решение уравнения (20) при $\mu = 0.1, \nu = 0.5, z_0 = 4.0, k = 10$ показано на рис. 1а. На рис. 1б представлено решение $q(x, t)$ уравнения (1) при $\mu = 0.1, \nu = 0.5, z_0 = 4.0, C_2 = 5.0$ и $k = 10.0$.

В случае $C_2 = -\nu^2/2\mu$ решение (20) упрощается и принимает вид

$$y(z) = \sqrt{-\frac{2}{\mu}} \tanh \left\{ \sqrt{-\frac{2}{\mu}} (z - z_0) \right\}. \quad (21)$$

Решение (21) при $\mu < 0$ является примером группового солитона.

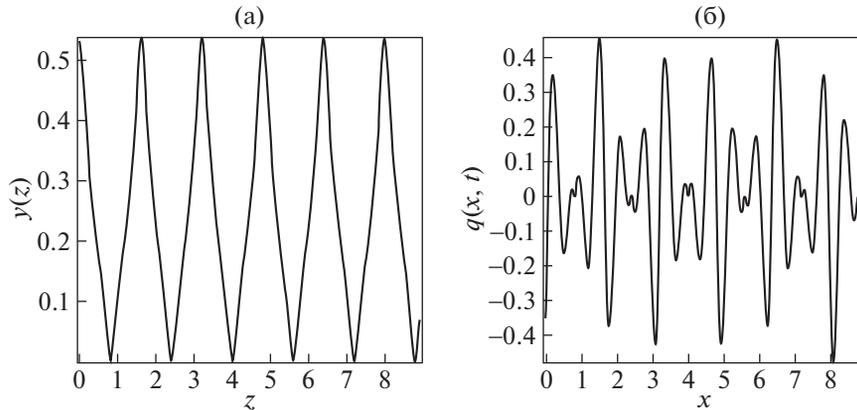


Рис. 2. а) Решение (27) уравнений (8) при $n = 2$, $\mu = -9.9$, $\nu = -10.4$, C_2 , $z_0 = 4.0$; б) решение $q(x, t)$ при $n = 2$, $\mu = -9.9$, $\nu = -10.4$, $C_2 = 0.4$, $z_0 = 4.0$ и $k = 10.0$.

5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (14) ПРИ $n = 2$

Рассмотрим решение уравнения (14) при $n = 2$. В этом случае уравнение (17) приводится к виду

$$V_z^2 - 4\nu V^2 + \frac{4\mu}{3} V^4 - 4C_2 V = 0. \quad (22)$$

Используя переменную в форме

$$V(z) = \left[W(z) - \frac{\nu}{3C_2} \right]^{-1}, \quad (23)$$

получим следующее уравнение

$$\frac{W_z^2}{C_2} = 4W^3 - \frac{4\nu^2}{3C_2^2} W - \frac{4\mu}{3C_2} + \frac{8\nu^3}{27C_2^2} \quad (24)$$

Общее решение уравнения (24) является эллиптической функцией Вейерштрасса в виде [16, 17]

$$W(z) = \wp(\sqrt{C_2}(z - z_0), g_2, g_3), \quad (25)$$

где инварианты g_2 и g_3 определяются с помощью формул

$$g_2 = \frac{4\nu^2}{3C_2^2}, \quad g_3 = \frac{4\mu}{3C_2} - \frac{8\nu^3}{27C_2^2}. \quad (26)$$

Общее решение уравнения (14) при $n = 2$ выражается формулой

$$y(z) = \left[\wp(\sqrt{C_2}(z - z_0), g_2, g_3) - \frac{\nu}{3C_2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (27)$$

Периодические волны, описываемые формулой (27) и соответствующие $q(x, t)$ при $n = 2$, $\mu = -9.9$, $\nu = -10.4$, $z_0 = 4.0$ показаны на рис. 2а. Решение $q(x, t)$ при $n = 2$, $\mu = -9.9$, $\nu = -10.4$, $C_2 = 0.4$, $z_0 = 4.0$ и $k = 10.0$ представлено на рис. 2б.

6. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (14) В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

При произвольном значении показателя преломления n мы можем найти решение уравнения (8) при $C_2 = 0$. В этом случае имеем следующее уравнение

$$V_z^2 - \nu n^2 V^2 + \frac{\mu n^2}{n+1} V^4 = 0. \quad (28)$$

Решение уравнения (28) принимает вид [12, 13]

$$V(z) = \frac{4\nu(n+1)}{4\nu(n+1)e^{(n\sqrt{\nu}(z-z_0))} + \mu e^{(n\sqrt{\nu}(z-z_0))}}. \quad (29)$$

Решение уравнения (14) при произвольном n можно записать в виде

$$y(z) = \left[\frac{4\nu(n+1)}{4\nu(n+1)e^{n\sqrt{\nu}(z-z_0)} + \mu e^{-n\sqrt{\nu}(z-z_0)}} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (30)$$

С учетом формулы (2) получим решение уравнения (1) для $q(x, t)$ в виде

$$q(x, t) = \left[\frac{4\nu(n+1)}{4\nu(n+1)e^{n\sqrt{\nu}(x-C_0t-z_0)} + \mu e^{-n\sqrt{\nu}(x-C_0t-z_0)}} \right]^{\frac{1}{n}} \times e^{i(kx-\omega t-z_0)}. \quad (31)$$

Решения (30) и (31) показаны на рис. 3 при $n = 2$, $\mu = 0.4$, $\nu = 4.0$, $z_0 = 5.0$ и $\omega = 8.0$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе найдены некоторые точные решения возмущенного уравнения Чена–Ли–Лю с произвольным показателем преломления в виде периодических и уединенных волн.

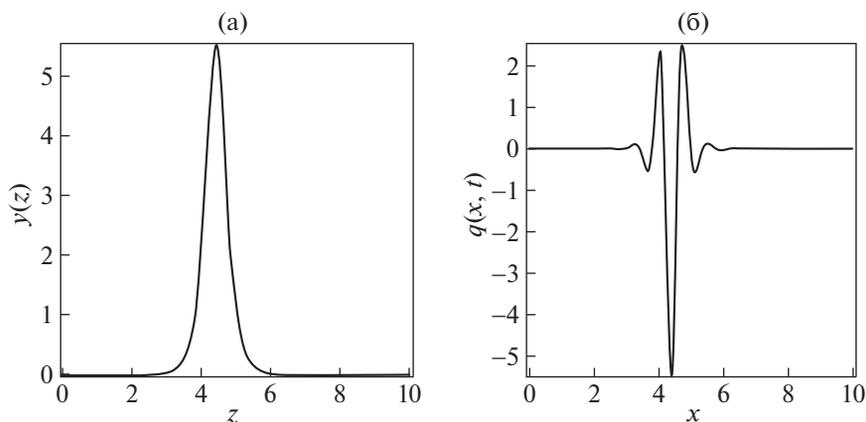


Рис. 3. а) Решение (30) уравнений (8) при $n = 2$, $\mu = 0.4$, $\nu = 4.0$, $z_0 = 5.0$, б) решение (31) при $n = 2$, $\mu = 0.4$, $\nu = 4.0$, $z_0 = 5.0$ и $k = 8.0$.

Полученные решения могут быть использованы в волоконной оптике при моделировании солитонного режима распространения импульсов в высокоскоростных волоконно-оптических линиях связи.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (государственный проект) № 0723-2020-0036, а также при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по исследовательскому проекту № 18-29-10025.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biswas A.* Optical soliton perturbation with Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation by traveling wave hypothesis // *Optik*. 2018. V. 171. P. 217–220.
2. *Kudryashov N.A.* First integrals and solutions of the traveling wave reduction for the Triki–Biswas equation // *Optik*. 2019. V. 185. P. 275–281.
3. *Biswas A.* Chirp-free bright optical soliton perturbation with Chen–Lee–Liu equation by traveling hypothesis and semi-inverse variational principle // *Optik*. 2018. V. 172. P. 772–776.
4. *Tsuchida T., Wadati M.* New integrable systems of derivative nonlinear Schrödinger equations with multiple components // *Phys. Lett. A*. 1999. V. 257 (1–2). P. 53–64.
5. *Fan E.* A family of completely integrable multi-Hamiltonian systems explicitly related to some celebrated equations // *J. Math. Phys.* 2001. V. 42 (9). P. 4327–4344.
6. *Yang B., Zhang W.-G., Zhang H.-Q., Pei S.-B.* Generalized Darboux transformation and rational soliton solutions for Chen–Lee–Liu equation // *Appl. Math. Comput.* 2014. V. 242. P. 863–876.
7. *Kudryashov N.A.* General solution of the traveling wave reduction for the perturbed Chen–Lee–Liu equation // *Optik*, 2019. V. 186. P. 339–349.
8. *Triki H., Babatin M.M., Biswas A.* Chirped bright solitons for Chen–Lee–Liu equation in optical fibers and PCF // *Optik*. 2018. V. 149. P. 300–303.
9. *Triki H., Hamaizja Y., Zhou Q., Biswas A., Ullahd M.Z., Moshokoa S.P., Belic M.* Chirped dark and gray solitons for Chen–Lee–Liu equation in optical fibers and PCF // *Optik*. 2018. V. 155. P. 329–333.
10. *Jawad A.J.M., Biswas A., Zhou Q., Alfiras M., Moshokoa S.P., Belic M.* Chirped singular and combo optical solitons for Chen–Lee–Liu equation with three forms of integration architecture // *Optik*. 2018. V. 178. P. 172–177.
11. *Kudryashov N.A.* A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber // *Optik*. 2019. V. 189. P. 42–52.
12. *Kudryashov N.A.* Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities // *Optik*. 2020. V. 212. P. 164750.
13. *Kudryashov N.A.* Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrödinger equations // *Appl. Math. Comput.* 2020. V. 371. P. 124972.
14. *Biswas A., Ekici M., Dakova A., Khan S., Moshokoa S.P., Alshehri H.M., Belic M.R.* Highly dispersive optical soliton perturbation with Kudryashov’s sextic-power law nonlinear refractive index by semi-inverse variation // *Results Phys.* 2021. V. 27. P. 104539.
15. *Arrowsmith D.K., Place C.M.* Ordinary Differential Equations. A Qualitative Approach with Applications, Chapman and Hall. London, New York, 1982.
16. *Kudryashov N.A.* The Lakshmanan–Porsezian–Daniel model with arbitrary refractive index and its solution // *Optik*. 2021. V. 241. P. 167043.
17. *Kudryashov N.A.* Construction of nonlinear differential equations for description of propagation pulses in optical fiber // *Optik*. 2019. V. 192. P. 162964.

Soliton Solutions of the Chen–Li–Liu Equation with an Arbitrary Refractive Index

N. A. Kudryashov^{a,#} and N. V. Ermolaeva^{a,b,##}^a National Research Nuclear University MEPHI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia^b Volgodonsk Engineering Technical Institute, National Research Nuclear University MEPHI (Moscow Engineering Physics Institute), Volgodonsk, Rostovskaya oblast, 347360 Russia[#]e-mail: nakudr@gmail.com^{##}e-mail: NVErmolayeva@mephi.ru

Received October 24, 2021; revised October 25, 2021; accepted October 28, 2021

Abstract—The perturbed Chen–Li–Liu equation with an arbitrary refractive index describing the propagation of pulses in an optical fiber is considered. The traveling wave reduction is used to find a solution of this nonlinear partial differential equation. Separating the imaginary and real parts of the resulting equation and equating them to zero, a system of ordinary differential equations is constructed. The compatibility conditions of the system of ordinary differential equations are determined. Stationary points of the system of equations are found. Exact solutions of the mathematical model are obtained for $n = 1$ and 2 expressed in terms of the Jacobi and Weierstrass elliptic functions. It is shown that the solutions found in the case of an arbitrary refractive index have the form of periodic and solitary waves (optical solitons).

Keywords: perturbed Chen–Li–Liu equation, arbitrary refractive index, traveling wave, exact solution, optical soliton

DOI: 10.1134/S2304487X21040088

REFERENCES

1. Biswas A. Optical soliton perturbation with Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation by traveling wave hypothesis. *Optik*, 2018, vol. 171, pp. 217–220.
2. Kudryashov N.A. First integrals and solutions of the traveling wave reduction for the Triki–Biswas equation. *Optik*, 2019, vol. 185, pp. 275–281.
3. A. Biswas, Chirp-free bright optical soliton perturbation with Chen–Lee–Liu equation by traveling hypothesis and semi-inverse variational principle, *Optik*, 2018, vol. 172, pp. 772–776.
4. Tsuchida T., Wadati M. New integrable systems of derivative nonlinear Schrödinger equations with multiple components. *Phys. Lett. A*, 1999, vol. 257 (1–2), pp. 53–64.
5. Fan E. A family of completely integrable multi-Hamiltonian systems explicitly related to some celebrated equations. *J. Math. Phys.*, 2001, vol. 42 (9), pp. 4327–4344.
6. Yang B., Zhang W.-G., Zhang H.-Q., Pei S.-B. Generalized Darboux transformation and rational soliton solutions for Chen–Lee–Liu equation. *Appl. Math. Comput.*, 2014, vol. 242, pp. 863–876.
7. Kudryashov N.A. General solution of the traveling wave reduction for the perturbed Chen–Lee–Liu equation. *Optik*, 2019, vol. 186, pp. 339–349.
8. Triki H., Babatin M.M., Biswas A. Chirped bright solitons for Chen–Lee–Liu equation in optical fibers and PCF. *Optik*, 2018, vol. 149, pp. 300–303.
9. Triki H., Hamaizja Y., Zhou Q., Biswas A., Ullahd M.Z., Moshokoa S.P., Belic M. Chirped dark and gray solitons for Chen–Lee–Liu equation in optical fibers and PCF. *Optik*, 2018, vol. 155, P. 329–333.
10. Aliyu A.I., Inc M., Yusuf A., Bayram M., Baleanu D. Symmetry reductions, explicit solutions convergence analysis and conservation laws via multipliers approach to the Chen–Lee–Liu model in nonlinear optics. *Modern Physics Letters B*, 2019, vol. 33(04), pp. 1950035.
11. Kudryashov N.A. A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber. *Optik*, 2019, vol. 189, P. 42–52.
12. Kudryashov N.A. Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities. *Optik*, 2020, vol. 212, P. 164750.
13. Kudryashov N.A. Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrödinger equations. *Appl. Math. Comput.*, 2020, vol. 371, P. 124972.
14. Biswas A., Ekici M., Dakova A., Khan S., Moshokoa S.P., Alshehri H.M., Belic M.R. Highly dispersive optical soliton perturbation with Kudryashov's sextic-power law nonlinear refractive index by semi-inverse variation. *Results Phys.*, 2021, vol. 27, P. 104539.
15. Arrowsmith D.K., Place C.M. *Ordinary Differential Equations. A Qualitative Approach with Applications*, Chapman and Hall. London, New York, 1982.
16. Kudryashov N.A. The Lakshmanan–Porsezian–Daniel model with arbitrary refractive index and its solution. *Optik*, 2021, vol. 241, P. 167043.
17. Kudryashov N.A. First integrals and general solution of the traveling wave reduction for Schrödinger equation with anti-cubic nonlinearity. *Optik*, 2019, vol. 185, pp. 665–671.