

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МЕЛЬНИКОВА К УРАВНЕНИЮ ТРИКИ–БИСВАСА

© 2021 г. С. Ф. Лаврова^{1,*}, Н. А. Кудряшов^{1,**}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, 115409, Россия

*e-mail: infuriatedot@gmail.com

**e-mail: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию 29.10.2021 г.

После доработки 30.10.2021 г.

Принята к публикации 30.10.2021 г.

В данной работе рассмотрено периодически возмущенное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, полученное путем перехода к переменным бегущей волны в уравнении Трики–Бисваса, используемого для описания распространения импульсов в нелинейной оптике. Проведен анализ устойчивости точек покоя изучаемой системы ОДУ. Получено, что в зависимости от значений управляющих параметров рассматриваемая система уравнений может обладать тремя или пятью стационарными точками, что влияет на структуру ее устойчивого и неустойчивого многообразий. Построена функция Мельникова изучаемой системы уравнений в случае наличия у нее трех точек покоя, когда устойчивое и неустойчивое многообразия невозмущенной системы уравнений совпадают с ее гомоклинической орбитой. Обнаружено, что в рассматриваемой системе всегда реализуется гомоклинический хаос. Для его контроля в систему добавлено затухание. Найдены ограничения на параметры новой системы, при которых в ней реализуется гомоклинический хаос. Построены бассейны притяжения аттракторов. Получено, что они имеют фрактальную структуру при значениях параметра затухания меньше критических, полученных по критерию Мельникова. Результаты численного анализа согласуются с полученными теоретически по методу Мельникова.

Ключевые слова: метод Мельникова, динамическая система, хаос, фрактальные бассейны притяжения аттракторов

DOI: 10.1134/S2304487X2104009X

1. ВВЕДЕНИЕ

В связи с интенсивным развитием волоконной оптики в настоящее время одной из важных изучаемых задач является описание распространения импульсов в оптическом волокне. Динамику такого рода процессов описывает целый ряд нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, основанных на семействе широко известных нелинейных уравнений Шредингера (НУШ). При характеристике распространения пикосекундных импульсов в НУШ учитываются только два физических явления, дисперсия групповой скорости и фазовая самомодуляция. Однако, при рассмотрении фемтосекундных импульсов в нелинейной среде, в уравнении также необходимо учесть эффекты более высокого порядка, существенно меняющие физические характеристики оптических солитонов. Дисперсия Керра является одним из важных физических эффектов в волоконно-оптической системе связи, когда длительность солитонного импульса становится сверхкороткой (< 100 фс) [1]. Это явление связано с зависимостью групповой

скорости от интенсивности и вызывает асимметричное спектральное расширение импульса и искажение формы волны [2].

В последнее время был предложен целый ряд обобщений НУШ для описания распространения фемтосекундных оптических импульсов в нелинейных средах, таких как уравнение Каупа–Ньюэлла [3, 4], Чена–Ли–Лу [5] и Фокаса–Леннелса [6, 7]. Отметим, что исследование фемтосекундных оптических солитонов представляет особый интерес из-за их преимуществ в отношении распространения импульсов на большие расстояния, высокой скорости передачи данных и более быстрого переключения [8]. Недавно Трики и Бисвас представили обобщенную модель для производного уравнения НУШ, включающую в себя эффект дисперсии Керра произвольного порядка, для изучения распространения импульсов за пределы сверхкороткого диапазона в системах оптической связи [9]

$$iu_t + au_{xx} + ib(|u|^{2n}u)_x = 0, \quad (1.1)$$

где a и b – параметры уравнения, $n \in \mathbb{N}$.

В действительности оптические импульсы при распространении как правило подвергаются возмущениям внешней среды, поэтому важно рассмотреть уравнение (1.2) с приложенной внешней силой. Изучению динамики оптических уравнений с внешним воздействием посвящены работы [10–12]. Уравнение (1.2) в присутствии периодического внешнего возмущения примет вид:

$$iu_t + au_{xx} + ib(|u|^{2n}u)_x = fe^{i(\psi(z)-\omega t)} \cos \omega(x - C_0 t), \quad (1.2)$$

где f , ω описывают амплитуду и частоту возмущения.

Чтобы исследовать нелинейную динамику уравнения (1.2), преобразуем его в систему ОДУ. Предположим, что решение уравнения (1.2) имеет следующий вид:

$$u(x, t) = y(z)e^{i(\psi(z)-\omega t)}, \quad z = x - C_0 t, \quad (1.3)$$

где y и $\psi(z)$ – новые неизвестные функции, ω и C_0 – параметры.

Подстановка (1.3) в уравнение (1.2) приводит к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} & -\omega y - C_0 y \psi_z + ay_{zz} - ay\psi_z^2 + by^{2n+1}\psi_z + \\ & + i(-C_0 y_z - 2ay_z \psi_z - ay\psi_{zz} + (2n+1)by^{2n}y_z) = f \cos \omega z. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Приравняв в (1.4) к нулю действительную и мнимую части, получим следующую систему уравнений для определения $y(z)$ и $\psi(z)$:

$$\begin{aligned} & -\omega y - C_0 y \psi_z + ay_{zz} - ay\psi_z^2 + \\ & + by^{2n+1}\psi_z = f \cos \omega z, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$C_0 y_z + 2ay_z \psi_z + ay\psi_{zz} - (2n+1)by^{2n}y_z = 0.$$

Умножив второе уравнение системы (1.5) на $y(z)$ и проинтегрировав его по z , получим следующий первый интеграл

$$C_1 + \frac{C_0}{2}y^2 + ay^2\psi_z - \frac{b(2n+1)}{(2n+2)}y^{2n+2} = 0, \quad (1.6)$$

где C_1 – произвольная постоянная. Выразим из (1.6) ψ_z

$$\psi_z = \frac{b(2n+1)}{a(2n+2)}y^{2n} - \frac{C_0}{2a} - \frac{C_1}{a} \frac{1}{y^2}. \quad (1.7)$$

Подставляя (1.7) в первое уравнение системы (1.5), получим

$$\begin{aligned} & ay_{zz} + \frac{b^2(2n+1)}{4a(n+1)^2}y^{4n+1} - \frac{bC_0}{2a}y^{2n+1} + \\ & + \frac{bC_1n}{a(n+1)}y^{2n-1} + \left(\frac{C_0^2}{4a} - \omega\right)y - \frac{C_1^2}{ay^3} = \\ & = f \cos \omega z. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Запишем (1.8) в форме динамической системы

$$\begin{aligned} y_z &= v, \\ v_z &= -\frac{b^2(2n+1)}{4a(n+1)^2}y^{4n+1} + \frac{bC_0}{2a}y^{2n+1} - \\ & - \frac{bC_1n}{a(n+1)}y^{2n-1} - \left(\frac{C_0^2}{4a} - \omega\right)y + \frac{C_1^2}{ay^3} + f \cos \omega z. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для упрощения исследования нелинейной динамики этой системы введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} & -\frac{b^2(2n+1)}{4a(n+1)^2} = \alpha < 0, \quad \frac{bC_0}{2a} = \beta, \\ & -\frac{bC_1n}{a(n+1)} = \delta, \quad \frac{\omega}{a} - \frac{C_0^2}{4a^2} = \gamma, \quad \frac{C_1^2}{a} = \rho \end{aligned} \quad (1.10)$$

Тогда (1.9) примет вид

$$\begin{aligned} y_z &= v, \\ v_z &= \alpha y^{4n+1} + \beta y^{2n+1} + \delta y^{2n-1} + \gamma y + \\ & + \frac{\rho}{y^3} + f \cos \omega z. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Для непрерывности правых частей уравнения во всей фазовой плоскости рассмотрим систему уравнений (1.11) при $C_1 = 0$. Тогда $\rho = \delta = 0$ и (1.11) принимает форму

$$\begin{aligned} y_z &= v, \quad v_z = \alpha y^{4n+1} + \beta y^{2n+1} + \gamma y + f \cos \theta, \\ \theta_z &= \omega. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Исследуем нелинейную динамику (1.12) при различных значениях управляющих параметров. Аналитически изучить возникновение хаоса в возмущенных Гамильтоновых системах можно используя Мельникова.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

2.1. Стационарные точки системы уравнений (1.12)

Рассмотрим (1.12) в отсутствии возмущения

$$y_z = v, \quad v_z = \alpha y^{4n+1} + \beta y^{2n+1} + \gamma y. \quad (2.1)$$

Стационарные точки (2.1) находятся на оси y с координатой, удовлетворяющей следующему алгебраическому уравнению

$$\alpha y^{4n+1} + \beta y^{2n+1} + \gamma y = 0. \quad (2.2)$$

Из (2.2) видно, что (2.1) всегда имеет тривиальную стационарную точку $S_0 = (0, 0)$. Помимо этого, в зависимости от различных значений пара-

метров α , β и γ система уравнений может иметь стационарные точки $(S_i, 0)$, $i = 1..4$, где

$$\begin{aligned} S_{1,2} &= \pm \left(\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2n}}, \\ S_{3,4} &= \pm \left(\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \right)^{\frac{1}{2n}}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

устойчивость которых определяется собственными значениями матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha(4n+1)S_i^{4n} + \beta(2n+1)S_i^{2n} + \gamma & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Таблица 1 содержит информацию об устойчивости стационарных точек (2.1). При любых значениях управляющих параметров, не представленных в таблице, рассматриваемая система уравнений не имеет точек покоя кроме тривиальной. Линеаризация и расчет собственных значений предоставляют локальные условия устойчивости. Однако, так как система уравнений (2.1) является Гамильтоновой, глобально ее поведение можно описать с помощью следующего Гамильтониана

$$H(y, v) = \frac{v^2}{2} - \frac{\alpha y^{4n+2}}{2(2n+1)} - \frac{\beta y^{2n+2}}{2(n+1)} - \frac{\gamma y^2}{2}. \quad (2.5)$$

Итак, динамическое поведение невозмущенной системы уравнений (2.1) полностью описано. Рассмотрим (1.12) при периодическом возмущении. Чтобы исследовать нелинейные явления, возникающие в таком случае, воспользуемся результатами работы Мельникова [14].

2.2. Критерии гомоклинической и гетероклинической бифуркации системы уравнений (2.1)

Чтобы применить метода Мельникова к системе уравнений (1.12), запишем ее в форме возмущенной Гамильтоновой системы

$$\begin{aligned} y_z &= v, & v_z &= \alpha y^{4n+1} + \beta y^{2n+1} + \gamma y + \epsilon \tilde{f} \cos \theta, \\ \theta_z &= \omega, \end{aligned} \quad (2.6)$$

в которой мы заменили f на $\tilde{f}$, где $\tilde{f}$ порядка единицы.

Рассмотрим отображение Пуанкаре $P: \Sigma \rightarrow \Sigma$, определенное на поперечном сечении $\{\Sigma = (y, v, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 | \theta = \theta_0 \in [0, 2\pi/\omega)\}$. В связи с видом третьей компоненты системы уравнений (2.6) сечение Σ определено глобально и $\Sigma = \mathbb{R}^2$. Замкнутые орбиты (2.6) соответствуют стационарным

Таблица 1. Устойчивость стационарных точек системы уравнений (2.1) в зависимости от величины управляющих параметров

Точка покоя	Значения параметров				
	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4
1. $\beta > 0, \gamma \in \left(\frac{\beta^2}{4\alpha}, 0\right)$	Центр	Седло	Седло	Центр	Центр
2. $\gamma > 0$	Седло	—	—	Центр	Центр

точкам отображения P и тип устойчивости точек покоя переносится на эти орбиты. Качественная структура P легко определяется для $\epsilon = 0$. В первом случае из таблицы 1 P обладает пятью точками покоя $(S_i, 0)$, $i = 1..5$ и сепаратриса (она же гетероклиническая орбита) Γ_2 является устойчивым и неустойчивым многообразием седловых точек. Во втором случае сепаратриса Γ_1 одновременно является устойчивым и неустойчивым многообразием точки O .

Структура устойчивых и неустойчивых многообразий играет важную роль в определении природы решений (2.6). Их мы изучим при помощи построения функции Мельникова при $\epsilon \neq 0$. Если в систему добавляется возмущение периода $T = \frac{2\pi}{\omega}$, то к гомоклиническим и гетероклиническим орбитам обращаются как к орбитам в сечении Пуанкаре системы. Эти орбиты являются структурно неустойчивыми, то есть они разрушаются при добавлении малого возмущения. Идея гомоклинических и гетероклинических бифуркаций состоит в том, что когда в систему добавлено возмущение, то после разрушения они все же могут снова пересечься. Как правило такие пересечения трансверсальны и одно трансверсальное пересечение может вести к бесконечному количеству таких пересечений.

Разрыв гомоклинической или гетероклинической орбиты в сечении Пуанкаре приводит к двум устойчивым многообразиям W^s и двум неустойчивым многообразиям W^u соответствующих седловых точек этих орбит. В отсутствии возмущения ($\epsilon = 0$) эти многообразия совпадают, как было упомянуто ранее. Когда движение динамической системы ограничено, динамика при гомоклинической бифуркации качественно такая же, что при гетероклинической бифуркации.

Сформулируем кратко метод Мельникова для двумерных систем с возмущением. Рассмотрим двумерную динамическую систему, описываемую следующими уравнениями

$$\begin{aligned} y_z &= f_1(y, v) + \epsilon g_1(y, v, t, \mu), \\ v_z &= f_2(y, v) + \epsilon g_2(y, v, t, \mu), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где невозмущенное векторное поле $(f_1(y, v), f_2(y, v))$ обладает гетероклинической или гомоклинической орбитой на плоскости, возмущения $(g_1(y, v, t, \mu), g_2(y, v, t, \mu))$ являются T -периодическими по времени, ϵ достаточно малый параметр и μ отвечает за управляющие параметры системы. Добавление в систему возмущения приводит к разрушению сепаратрисы. Идея метода Мельникова состоит в том, чтобы вычислить функцию (называемую теперь функцией Мельникова) расстояния между устойчивым и неустойчивым многообразиями W_u и W_s вдоль невозмущенной орбиты. Если функция Мельникова имеет нули, то эти многообразия пересекутся заново, и уже не в седловой точке сечения Пуанкаре. Однако если W_s и W_u пересекутся однажды, то они пересекутся бесконечное количество раз. В таком случае можно показать, что малые окрестности седловых точек в сечении Пуанкаре растягиваются и сжимаются под действием потока, порождаемого системой, диффеоморфно отображению под названием подкова Смейла. В диссипативных системах такое растяжение и сжатие ведет к фрактальным свойствам движения и является предвестником хаоса.

Предположим, что для изучаемой динамической системы (2.7) можно найти явный вид гомо-

клической орбиты $(y_{hom}, v_{hom}) = (y_{hom}(z), v_{hom}(z))$. Тогда можно показать, что функция

$$M(z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(y_{hom}, v_{hom})g_2(y_{hom}, v_{hom}, z + z_0, \mu) - f_2(y_{hom}, v_{hom})g_1(y_{hom}, v_{hom}, z + z_0, \mu)]dz \quad (2.8)$$

предоставляет нам расстояние между W_s и W_u в сечении Пуанкаре для достаточно малых ϵ . Таким образом, необходимым условием возникновения хаоса в системе уравнений (2.7) является существование таких z_0 , в которых $M(z_0)$ имеет простые нули.

Вернемся к изучаемой нами системе уравнений (2.6). Для начала найдем гомоклиническую орбиту, соединяющую седловую точку $(0, 0)$ саму с собой, то есть линию уровня гамильтониана (2.5)

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\alpha y^{4n+2}}{2(2n+1)} - \frac{\beta y^{2n+2}}{2(n+1)} - \frac{\gamma y^2}{2} = 0, \quad (2.9)$$

где параметры (α, β, γ) удовлетворяют случаю 1 из таблицы 1. Поскольку $dy/dz = v$, мы можем получить соотношение между y и z , проинтегрировав (2.9)

$$z - z_0 = \sqrt{2n^2 + 3n + 1} \times \int_{y(z_0)}^{y(z)} \frac{dy}{y \sqrt{-|\alpha|(n+1)y^{4n} + 2\beta\left(n+\frac{1}{2}\right)y^{2n} + 2\gamma(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)}}, \quad (2.10)$$

где мы учли, что $\alpha < 0$. Введем в интеграле (2.10) замену $y^{2n} = w$. Тогда (2.10) принимает вид

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \frac{\sqrt{2n^2 + 3n + 1}}{2n} \int_{y(z_0)^{\frac{1}{2n}}}^{y(z)^{\frac{1}{2n}}} \frac{dw}{w \sqrt{-|\alpha|(n+1)w^2 + 2\beta\left(n+\frac{1}{2}\right)w + 2\gamma(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)}} = \\ &= \frac{\sqrt{2n^2 + 3n + 1}}{2n} \int_{y(z_0)^{\frac{1}{2n}}}^{y(z)^{\frac{1}{2n}}} \frac{dw}{w \sqrt{(2n+1)(n+1)\gamma + \left(\frac{(2n+1)\beta}{2\sqrt{|\alpha|(n+1)}}\right)^2 - \left(\sqrt{|\alpha|(n+1)}w - \frac{(2n+1)\beta}{2\sqrt{|\alpha|(n+1)}}\right)^2}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} A &= (2n+1)(n+1)\gamma + \left(\frac{(2n+1)\beta}{2\sqrt{|\alpha|(n+1)}}\right)^2, \\ B &= \sqrt{|\alpha|(n+1)}, C = \frac{(2n+1)\beta}{2\sqrt{|\alpha|(n+1)}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

С учетом новых обозначений интеграл в (2.11) примет вид

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \pm \frac{\sqrt{2n^2 + 3n + 1}}{2n} \int_{y(z_0)^{\frac{1}{2n}}}^{y(z)^{\frac{1}{2n}}} \frac{dw}{w \sqrt{A - (Bw - C)^2}} = \\ &= \left[w_1 = w - \frac{C}{B} \right] = \pm \frac{\sqrt{2n^2 + 3n + 1}}{2n} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{w_1(z_0)}^{w_1(z)} \frac{Bdw_1}{\sqrt{A - B^2w_1^2(w_1B + C)}} = \\
& = \left[w_1 = -\frac{4AB^2C - 4ABw_2 + Cw_2^2}{B(4AB^2 - 4BCw_2 + w_2^2)} \right] = \\
& = \pm \frac{\sqrt{2n^2 + 3n + 1}}{2n} \int_{w_2(z_0)}^{w_2(z)} \frac{dw_2}{\sqrt{A - C^2w_2}} = \\
& = \pm \frac{\sqrt{2n^2 + 3n + 1}}{2n} \frac{\ln w_2}{\sqrt{A - C^2}} \Big|_{w_2(z_0)}^{w_2(z)} = \pm \frac{1}{2n\sqrt{\gamma}} \ln \frac{w_2(z)}{w_2(z_0)}.
\end{aligned} \quad (2.13)$$

Выражая из (2.13) w_2 через z и учитывая (2.12), получим

$$w_2(z) = \pm w_2(z_0) e^{2n\sqrt{\gamma}(z-z_0)}. \quad (2.14)$$

Для нахождения гомоклинической орбиты $(y_{hom}(z), v_{hom}(z))$ выберем начальное условие $w_2(z_0)$ так, чтобы оно лежало на оси y ($v(z_0) = 0$)

$$w_2(z_0) = \frac{(\sqrt{2n+1}\sqrt{4\gamma(n+1)^2|\alpha| + (2n+1)\beta^2}\beta + 4\gamma(n+1)^2|\alpha| + (2n+1)\beta^2)(2n+1)}{2\beta n + \sqrt{2n+1}\sqrt{4\gamma(n+1)^2|\alpha| + (2n+1)\beta^2} + \beta} \quad (2.15)$$

Итак,

$$y(z) = \pm \left(-\frac{8(n+1)(2n+1)\beta\gamma w_2(z)}{4\gamma w_2(z)^2(n+1)^2|\alpha| + (w_2(z)+2)^2(2n+1)\beta^2} \right)^{\frac{1}{2n}}. \quad (2.16)$$

Объединение (2.14), (2.15), (2.16) приводит к окончательному явному выражению для гомоклинической орбиты $(y_{hom}(z), v_{hom}(z))$

$$\begin{aligned}
(y_{hom}(z), v_{hom}(z)) = & \pm \left(\left(\frac{C_1}{C_2 \cosh 2\sqrt{\gamma}n(z-z_0) + C_3} \right)^{\frac{1}{2n}}, \right. \\
& \left. - \frac{\frac{1}{C_1^{2n}} C_2 \sqrt{\gamma} \sinh 2\sqrt{\gamma}n(z-z_0)}{(C_2 \cosh 2\sqrt{\gamma}n(z-z_0) + C_3)^{\frac{1}{2n}+1}} \right),
\end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned}
C_1 &= 8 \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\gamma(n+1)^2|\alpha| + (2n+1)\beta^2} \times \right. \\
& \times (2\gamma(n+1)^2|\alpha| + (2n+1)\beta^2) \sqrt{2n+1} + \\
& \left. + \beta \left(n + \frac{1}{2} \right) (4\gamma(n+1)^2|\alpha| + (2n+1)\beta^2) \right) \gamma(n+1), \\
C_2 &= (4\gamma(n+1)^2|\alpha| + (2n+1)\beta^2) \sqrt{2n+1} \times \\
& \times \beta \sqrt{4\gamma(n+1)^2|\alpha| + (2n+1)\beta^2} + 6(n+1)^2 \times \\
& \times \gamma \beta^2 (2n+1)|\alpha| + (2n+1)\beta^4 + 8\gamma^2 \alpha^2 (n+1)^4, \\
C_3 &= -2\beta \sqrt{4\gamma(n+1)^2|\alpha| + 2(n+1/2)\beta^2} \times \\
& \times (2\gamma(n+1)^2|\alpha| + 2(n+1/2)\beta^2) \sqrt{2n+1} - \\
& - 2(2n+1)(4\gamma(n+1)^2|\alpha| + (2n+1)\beta^2)\beta^2.
\end{aligned} \quad (2.18)$$

Учитывая что $(f_1, f_2) = (v, \alpha y^{4n+1} + \beta y^{2n+1} + \gamma y)$, а $(g_1, g_2) = (0, \tilde{f} \cos \omega z)$, построим функцию Мельникова системы уравнений (2.6) вдоль левой (M^+) и правой (M^-) гомоклинических орбит (2.17)

$$\begin{aligned}
M(z_0)^\pm &= - \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f} v_{hom}(z) \cos \alpha(z+z_0) dz = \\
&= \pm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f} C_1^{\frac{1}{2n}} C_2 \sqrt{\gamma} \sinh 2\sqrt{\gamma}nz \cos \alpha(z+z_0) dz}{(C_2 \cosh 2\sqrt{\gamma}nz + C_3)^{\frac{1}{2n}+1}} = \\
&= \mp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f} C_1^{\frac{1}{2n}} C_2 \sqrt{\gamma} \sinh 2\sqrt{\gamma}nz \sin \omega z \sin \omega z_0 dz}{(C_2 \cosh 2\sqrt{\gamma}nz + C_3)^{\frac{1}{2n}+1}} = \\
&= \mp I_1 \sin \alpha z_0,
\end{aligned} \quad (2.19)$$

где мы учли, что v_{hom} является нечетной функцией и

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f} C_1^{\frac{1}{2n}} C_2 \sqrt{\gamma} \sinh 2\sqrt{\gamma}nz \sin \omega z dz}{(C_2 \cosh 2\sqrt{\gamma}nz + C_3)^{\frac{1}{2n}+1}}.$$

Таким образом полученная нами функция Мельникова (2.19) всегда имеет простые нули $z_0 = \left\{ \frac{2\pi k}{\omega} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ и гомоклинический хаос в исследуемой системе (2.6) возникает при любых амплитудах возмущающей силы.

2.3. Контроль гомоклинического хаоса в системе (2.6)

Для избежания структурной неустойчивости, порожденной в рассматриваемой системе уравнений гомоклинической бифуркацией, по аналогии с широко известным уравнением Дуффинга, до-

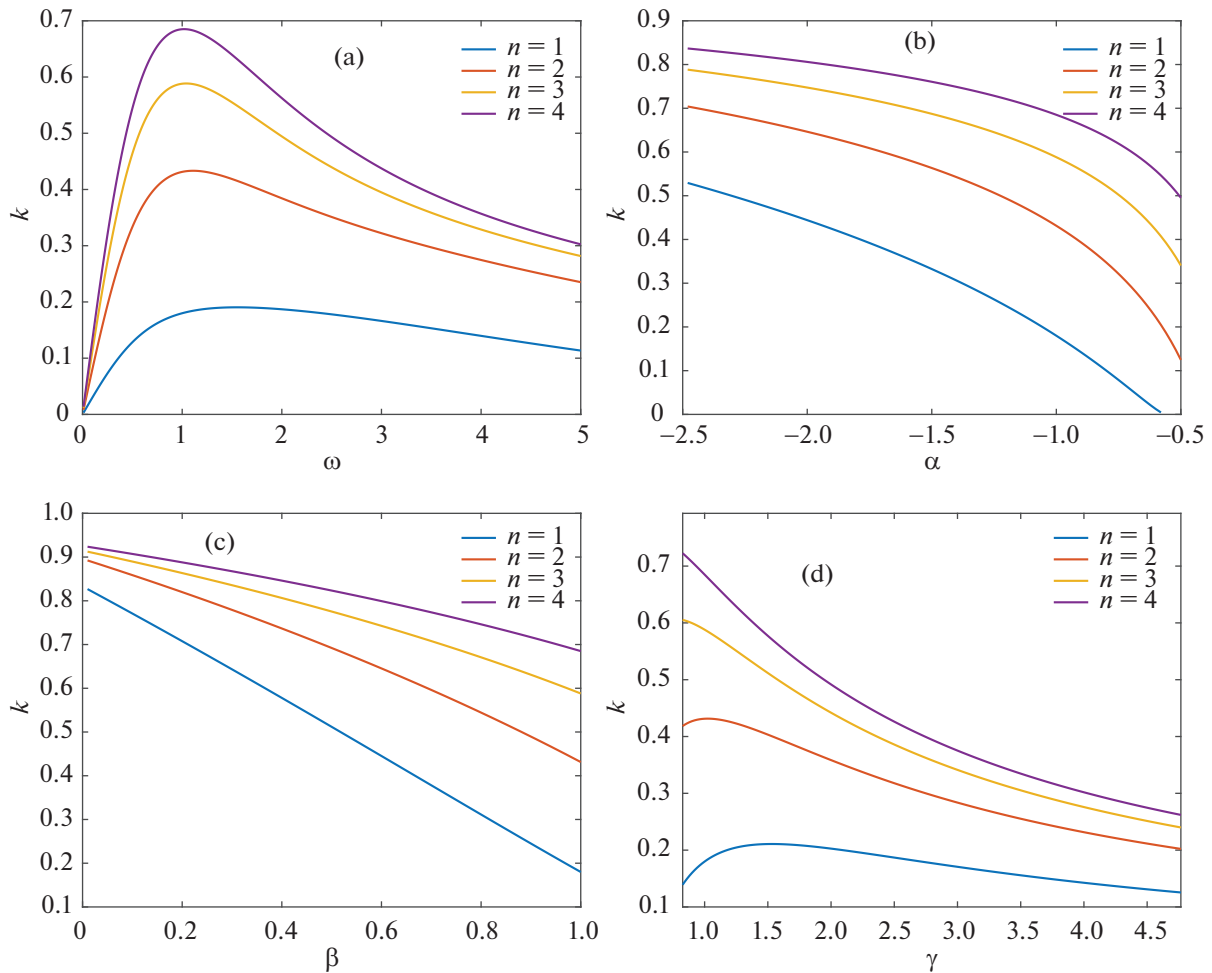


Рис. 1. Зависимость критического значения параметра k от различных управляющих параметров системы при фиксированных $\alpha = -1$ (кроме рис. 1b), $\beta = 1$ (кроме рис. 1c), $\omega = 1$ (кроме рис. 1a), $\gamma = 1$ (кроме рис. 1d), $f = 0.1$: а) $\omega - k$; б) $\alpha - k$; в) $\beta - k$; д) $\gamma - k$.

бавим в уравнение (2.6) дополнительный член $-\epsilon kv$

$$\begin{aligned} y_z &= v, \\ v_z &= \alpha y^{4n+1} + \beta y^{2n+1} + \gamma y + \epsilon(\tilde{f} \cos \theta - kv), \\ \theta_z &= \omega. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Тогда функция Мельникова $M_k^\pm(z_0)$ вдоль левой (M_k^-) и правой (M_k^+) гомоклинических орбит (2.17) примет вид

$$\begin{aligned} M_k^\pm(z_0) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-\tilde{f} v_{hom}(z) \cos \omega(z + z_0) + kv_{hom}^2(z)) dz = \\ &= \mp I_1 \sin \omega z_0 + k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_1^2 dz}{(C_2 \cosh(2\sqrt{\gamma}nz) + C_3)^2} = \\ &= \mp I_1 \sin \omega z_0 + k I_2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Из вида функции (2.21) легко понять, что она имеет простые нули z_0 не при любых значениях параметра k . Условие гомоклинической бифуркации для системы (2.20) имеет следующий вид

$$k < \frac{|I_1|}{|I_2|}, \quad (2.22)$$

где

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_1^2 dz}{(C_2 \cosh(2\sqrt{\gamma}nz) + C_3)^2}.$$

Таким образом, при значениях параметра k под кривой $k_c = \frac{|I_1(\omega, \gamma, \beta, n, \gamma)|}{|I_2(\omega, \gamma, \beta, n, \gamma)|}$ динамическая система (2.20) претерпевает гомоклиническую бифуркацию и в ней возможен переходный хаос Мельникова. Рис. 1a–1d содержат графики критического значения k_c как функции от ω (рис. 1a), α (рис. 1b), β (рис. 1c) и γ (рис. 1d) при четырех

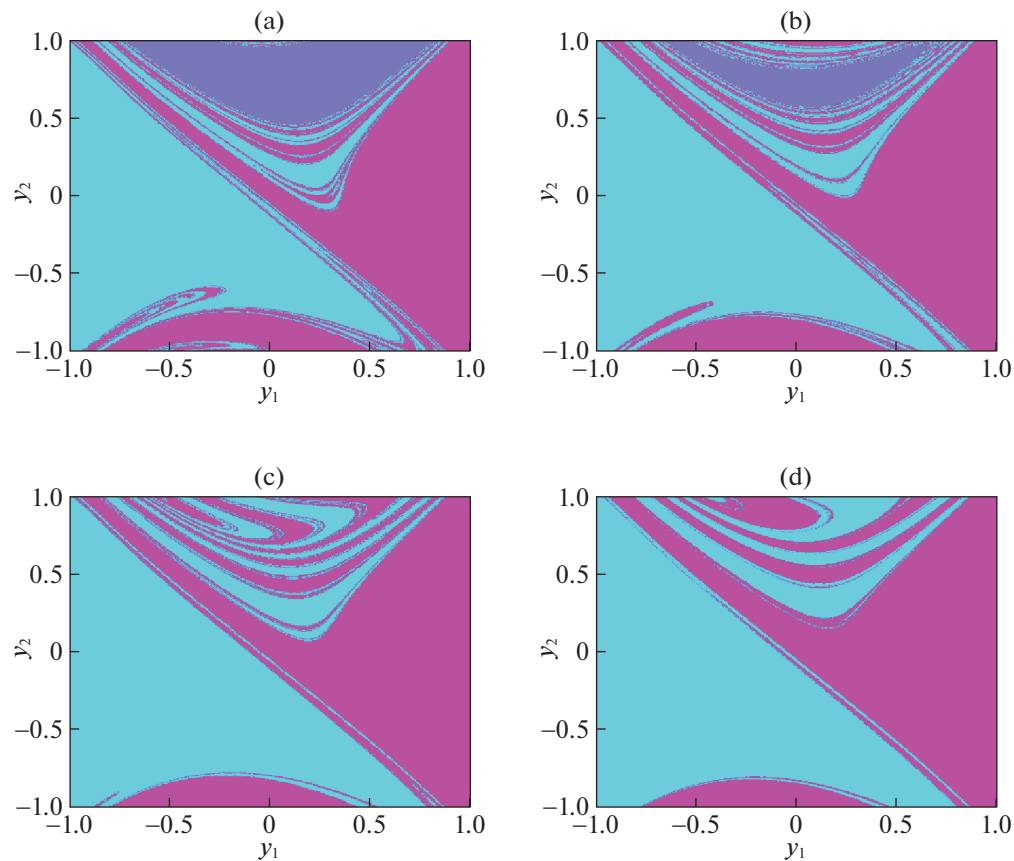


Рис. 2. Бассейны притяжения системы при $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = 1, f = 0.1, \omega = 1, n = 2$ и различных значениях k : а) $k = 0.05$; б) $k = 0.06$; в) $k = 0.07$; д) $k = 0.08$.

различных значениях показателя преломления n . Из рисунков видно, что с ростом n увеличивается и значение k , нужное для контроля хаоса в системе.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.
ПОСТРОЕНИЕ ГРАНИЦ БАСЕЙНОВ
ПРИТЯЖЕНИЯ

Гомоклинические и гетероклинические бифуркации оказывают влияние на форму бассейнов притяжения динамических систем. Нелинейные системы могут одновременно обладать несколькими аттракторами, такими как, например, устойчивая стационарная точки или предельный цикл. Если внешнее воздействие, приложенное к системе, является периодическим и имеет достаточно малую величину, то, в зависимости от начального условия, в конце концов траектория решения динамической системы окажется на одном из аттракторов.

Когда в динамической системе происходит гомоклиническая бифуркация, устойчивое и неустойчивое многообразия системы пересекаются бесконечное количество раз в сечении Пуанкаре.

Предположим, что исследуемая система имеет несколько аттракторов. Выбор начального условия с разных сторон от устойчивого многообразия приводит к различным окончательным характеристам движения. Гомоклиническая и гетероклиническая бифуркации ведут к сложным пересечениям устойчивого и неустойчивого многообразий. Поэтому при этих бифуркациях границы бассейнов притяжения также будут иметь очень сложную форму; их границы также называют фрактальными границами бассейнов притяжения. Такая чувствительность к начальным условиям может стать предвестником хаотической динамики.

Численное моделирование было проведено для определения структуры бассейнов притяже-

Таблица 2. Значение критического значения параметра k

n	2	3	4
k_c	0.043	0.059	0.069

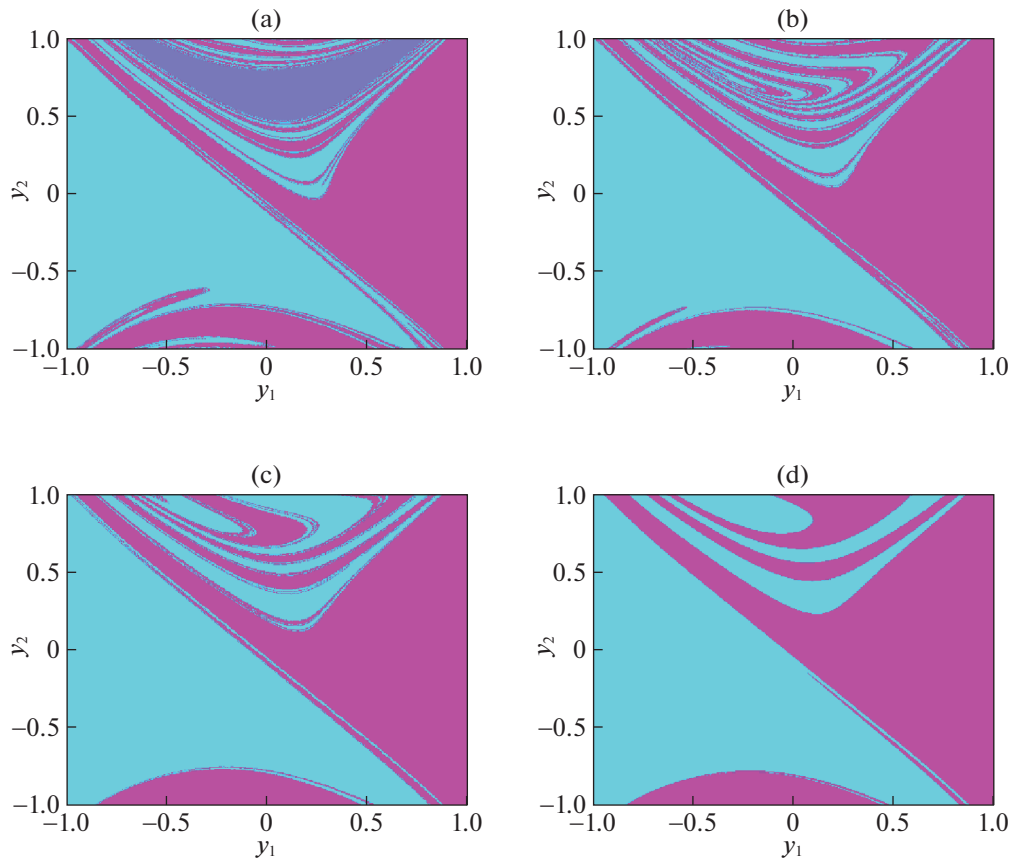


Рис. 3. Бассейны притяжения системы при $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $f = 0.1$, $\omega = 1$, $n = 3$ и различных значениях k : а) $k = 0.06$; б) $k = 0.07$; в) $k = 0.08$; д) $k = 0.09$.

ния динамической системы (2.21) при различных значениях параметра затухания k и коэффициента преломления n , а также при фиксированных значениях $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $f = 0.1$, $\omega = 1$ (рис. 2–3). Невозмущенная система обладает тремя аттракторами в окрестностях точек S_0 , S_3 и S_4 . Для малых возмущений аттракторами системы станут предельные циклы, расположенные рядом с S_0 , S_3 или S_4 соответственно. На рис. 2–4 представлены бассейны притяжения динамической системы (2.21), где розовый цвет означает сходимость к левому аттрактору, голубой — к правому, а фиолетовый — к центральному. Из иллюстраций видно, что при $k > k_c$ бассейны притяжений имеют гладкую структуру. При уменьшении затухающего параметра k регулярная структура бассейнов притяжения разрушается и становится фрактальной. Полученные численно бифуркационные значения k_c совпадают с полученными аналитически по порядку величины, однако для $n = 2$ имеем, что предсказание по методу Мельникова превышает аналитическое почти в два ра-

за. Полученные расхождения можно объяснить использованием метода Мельникова, имеющего только первый порядок точности.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрено возмущенное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, полученное путем перехода к переменным бегущей волны в уравнении Трики–Бисваса. Построена функция Мельникова исследуемого уравнения. Обнаружено, что в изучаемой системе при любых значениях параметров возникает гомоклинический хаос. Предложен способ контроля полученного хаоса при помощи добавления дополнительного члена в уравнение. Для проверки теоретически полученных результатов построены бассейны притяжения изучаемой динамической системы. Результаты численного анализа согласуются с теоретическими, полученными по методу Мельникова.

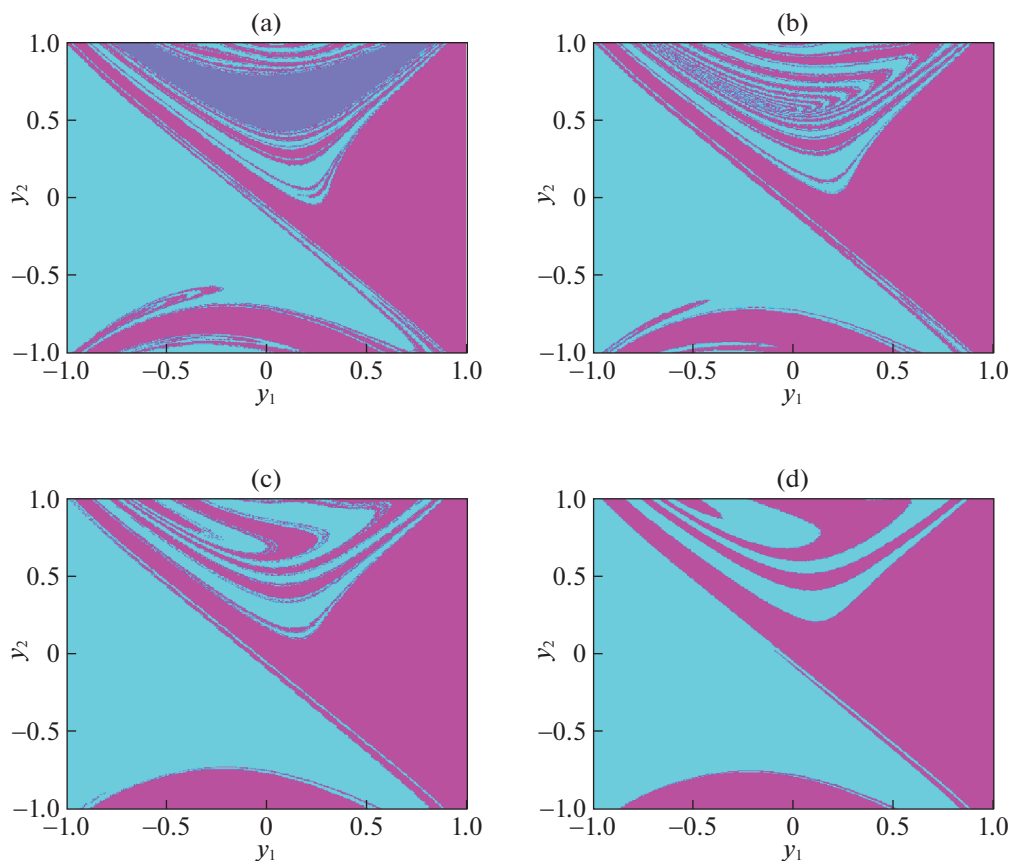


Рис. 4. Бассейны притяжения системы при $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $f = 0.1$, $\omega = 1$, $n = 3$ и различных значениях k : а) $k = 0.06$; б) $k = 0.07$; в) $k = 0.08$; д) $k = 0.09$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10025) и Министерства науки и высшего образования РФ (проект государственного задания № 0723-2020-0036).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Han S.H., Park Q.H. Effect of self-steepening on optical solitons in a continuous wave background // *Physical Review E*. 2011. V. 83. № 6. 066601.
2. De Oliveira J.R. et al. Self-steepening of optical pulses in dispersive media // *JOSA B*. 1992. V. 9. № 11. P. 2025–2027.
3. Kaup D.J., Newell A.C. An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation // *Journal of Mathematical Physics*. 1978. V. 19. № 4. P. 798–801.
4. Biswas A. et al. Sub pico-second pulses in mono-mode optical fibers with Kaup–Newell equation by a couple of integration schemes // *Optik*. 2018. V. 167. P. 121–128.
5. Chen H.H., Lee Y.C., Liu C.S. Integrability of nonlinear Hamiltonian systems by inverse scattering method // *Physica Scripta*. 1979. V. 20. № 3–4. P. 490.
6. Xu J., Fan E. Long-time asymptotics for the Fokas–Lenells equation with decaying initial value problem: without solitons // *Journal of Differential Equations*. 2015. V. 259. № 3. P. 1098–1148.
7. Biswas A. et al. Optical soliton solutions to Fokas–lenells equation using some different methods // *Optik*. 2018. V. 173. P. 21–31.
8. Wong P. et al. Higher-order-effects management of soliton interactions in the Hirota equation // *Physical Review E*. 2015. V. 91. № 3. 033201.
9. Triki H., Biswas A. Sub pico-second chirped envelope solitons and conservation laws in monomode optical fibers for a new derivative nonlinear Schrödinger's model // *Optik*. 2018. V. 173. P. 235–241.
10. Yin J., Zhao L. Dynamical behaviors of the shock compacton in the nonlinearly Schrödinger equation with a source term // *Physics Letters A*. 2014. V. 378. P. 3516–3522.
11. Yin J., Tang W.K. Perturbation-induced chaos in nonlinear Schrödinger equation with single source and its characterization // *Nonlinear Dynamics*. 2017. V. 90. P. 1481–1490.
12. Kudryashov N.A., Lavrova S.F. Dynamical properties of the generalized model for description of propagation pulses in optical fiber with arbitrary refractive index // *Optik*. 2021. V. 245. 167679.
13. Лаврова С.Ф., Кудряшов Н.А. Метод Мельникова для обобщенного уравнения Дуффинга // *Вестник*

Национального исследовательского ядерного университета “МИФИ”. 2021. Т. 10. № 2. С. 135–142.
<https://doi.org/10.1134/S2304487X21020073>

14. Мельников В.К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Труды ММО. Москва: ГИФМЛ, 1963. Т. 12. С. 3–52.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta “MIFI”, 2021, vol. 10, no. 4, pp. 308–317

Application of the Melnikov Method to the Triki–Biswas Equation

S. F. Lavrova^{a, #} and N. A. Kudryashov^{a, ##}

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: infuriatedot@gmail.com

^{##}e-mail: nakudr@gmail.com

Received October 29, 2021; revised October 30, 2021; accepted October 30, 2021

Abstract—A second order periodically perturbed ordinary differential equation, which is a traveling wave reduction of the Triki–Biswas equation, used to describe the propagation pulses in nonlinear optics has been considered. A stability analysis of the studied system of ordinary differential equations is carried out. It has been found that, depending on the control parameters, the considered system of equations can have three or five stationary points, which affects the structure of its stable and unstable manifolds. The Melnikov function of the system of equations under study is constructed for the case of three stationary points, where the stable and unstable manifolds of the unperturbed system of equations coincide with its homoclinic orbit. It has been found that homoclinic chaos always occurs in the system under consideration. To control it, a damping term has been added to the system. Constraints are found on the parameters of the new system at which homoclinic chaos is realized in it. Basins of attraction have been plotted. It has been found that they have a fractal structure when the damping parameter are less than the critical ones obtained by the Melnikov criterion. The results of the numerical analysis are in agreement with those obtained theoretically by the Melnikov method.

Keywords: Melnikov method, dynamical systems, chaos, fractal basin boundaries

DOI: 10.1134/S2304487X2104009X

REFERENCES

1. Han S.H., Park Q.H. Effect of self-steepening on optical solitons in a continuous wave background. *Physical Review E*, 2011, vol. 83, no. 6, 066601.
2. De Oliveira, J. R., et al. Self-steepening of optical pulses in dispersive media. *JOSA B*, 1992, vol. 9, No. 11, pp. 2025–2027.
3. Kaup D.J., Newell A.C. An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation. *Journal of Mathematical Physics*, 1978, vol. 19, no. 4, pp. 798–801.
4. Biswas A. et al. Sub pico-second pulses in mono-mode optical fibers with Kaup–Newell equation by a couple of integration schemes. *Optik*, 2018, vol. 167, pp. 121–128.
5. Chen H.H., Lee Y.C., Liu C.S. Integrability of nonlinear Hamiltonian systems by inverse scattering method. *Physica Scripta*, 1979, vol. 20, no. 3–4, p. 490.
6. Xu J., Fan E. Long-time asymptotics for the Fokas–Lenells equation with decaying initial value problem: without solitons. *Journal of Differential Equations*, 2015, vol. 259, no. 3, pp. 1098–1148.
7. Biswas A. et al. Optical soliton solutions to Fokas–Lenells equation using some different methods. *Optik*, 2018, vol. 173, pp. 21–31.
8. Wong P. et al. Higher-order-effects management of soliton interactions in the Hirota equation. *Physical Review E*, 2015, vol. 91, no. 3, 033201.
9. Triki H., Biswas A. Sub pico-second chirped envelope solitons and conservation laws in monomode optical fibers for a new derivative nonlinear Schrödinger’s model. *Optik*, 2018, vol. 173, pp. 235–241.
10. Yin J., Zhao L. Dynamical behaviors of the shock compacton in the nonlinearly Schrödinger equation with a source term. *Physics Letters A*, 2014, vol. 378, pp. 3516–22.
11. Yin J., Tang W.K. Perturbation-induced chaos in nonlinear Schrödinger equation with single source and its characterization. *Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 90, pp. 1481–90.
12. Kudryashov N. A., Lavrova S.F. Dynamical properties of the generalized model for description of propagation pulses in optical fiber with arbitrary refractive index. *Optik*, 2021, vol. 245, 167679.
13. Lavrova S.F., Kudryashov N.A. Metod Mel’nikova dlya obobshchennogo uravneniya Duffinga [Melnikov method for the generalized Duffing equation]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2021, vol. 10, no. 2, pp. 135–142. <https://doi.org/10.1134/S2304487X21020073> (in Russian)
14. Mel’nikov V.K. On the stability of a center for time-periodic perturbations. *Trudy moskovskogo matematicheskogo obshchestva*, 1963, vol. 12, pp. 3–52. (in Russian)