

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ  
И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

УДК 539.412, 539.1.09

ИНТЕНСИВНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО  
ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА  
С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ПОТЕНЦИАЛА  
МОНОКРИСТАЛЛА

© 2021 г. Н. П. Калашников<sup>1,\*</sup>, А. С. Ольчак<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup> *Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия*

*\*e-mail: kalash@mephi.ru*

*\*\*e-mail: asolchak@mephi.ru*

Поступила в редакцию 04.11.2021 г.

После доработки 05.11.2021 г.

Принята к публикации 09.11.2021 г.

Предлагаемая статья продолжает серию публикаций авторов, в которых в квантово-классическом приближении рассматриваются эффекты, возникающие при прохождении ультрарелятивистских электронов через монокристаллические структуры. В предыдущей статье цикла рассматривалась кинематика и спектральные характеристики электромагнитного излучения, возникающего при взаимодействии быстрых электронов с периодическими неоднородностями кристаллической решетки, в том числе для случая, когда электроны захватываются в режим каналирования. В настоящей статье предлагаются оценки сечения этого процесса и варианты расчета интенсивности возникающего излучения, рассчитанные несколькими способами. Демонстрируется, что упрощенный квантово-классический подход к расчету характеристик электромагнитных процессов в кристаллах вполне адекватен физике процесса и дает возможность оценить их не только качественные, но и количественные характеристики.

*Ключевые слова:* когерентное взаимодействие, каналирование, монокристалл, электромагнитное излучение, эффект Комптона, метод эквивалентных фотонов

DOI: 10.1134/S2304487X21050060

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что при прохождении ультрарелятивистских электронов через монокристаллическую структуру, возникает несколько разных типов электромагнитного излучения, порождаемых разными причинами и имеющих разные интенсивности и спектральные характеристики [1–6]. Кроме обычного тормозного излучения [1], присутствуют разнообразные ориентационные эффекты, связанные с когерентным взаимодействием релятивистских электронов с атомами кристаллических цепочек и плоскостей [2, 3], с захватом электронов в состояния каналирования [3], с переходами между этими состояниями [3–6] и т.п. В частности, в предшествующих статьях авторов [7, 8] рассматривалась кинематика и спектральные характеристики электромагнитного излучения, возникающего при взаимодействии быстрых электронов с периодическими неоднородностями кристаллической решетки, в том числе для случая, когда электроны движутся в режиме каналирования. Настоящая статья продолжает это рассмотрение. Предлагаются оценки сечения этого процесса и варианты расчета интенсивности возник-

ающего излучения. Демонстрируется, что упрощенный квантово-классический подход к расчету характеристик электромагнитных процессов в кристаллах вполне адекватен физике процесса и дает возможность оценить их не только качественные, но и количественные характеристики.

1. ОЦЕНКА ИНТЕНСИВНОСТИ  
ИЗЛУЧЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО  
ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ  
РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА  
С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ  
НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ПОТЕНЦИАЛА  
КРИСТАЛЛА, МЕТОДОМ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ  
ФОТОНОВ

Напомним суть рассматриваемого эффекта. Релятивистский электрон движется вдоль кристаллической цепочки атомов или под небольшим углом к ней (в режиме осевого каналирования или в близком к этому режиму состоянии). Потенциал периодической цепочки атомов, расположенных вдоль оси  $OZ$  с периодом  $a$ , как любую периодическую функцию, можно предста-

вить в виде суммы гармоник с периодами, обратно кратными  $a$  (ряд Фурье):

$$U(z, \rho) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(\rho) \cos(2\pi kz/a) \quad (1)$$

Здесь индекс  $k$  пробегает весь ряд натуральных чисел. Нулевая гармоника  $U_0(\rho)$  ряда (1), как известно еще из пионерских работ Й. Линдхарда [9], соответствует усредненному непрерывному вдоль  $OZ$  осевому потенциалу. Эффект каналирования традиционно описывается именно как связанное движение в этом непрерывном вдоль оси потенциале. Гармониками (1) от первой и выше при этом, как правило, пренебрегают, хотя их амплитудные потенциалы  $U_k(\rho)$  вполне сопоставимы по величине с усредненным [9], по крайней мере, для первых гармоник  $U_1(\rho)$ ,  $U_2(\rho)$ , что обеспечивает соответствие ряда (1) потенциалу реальной цепочки атомов, имеющему высокие узкие максимумы вблизи ионов цепочки, расположенных с периодом  $a$ .

В работе [8] взаимодействие электрона с цепочкой ионов рассматривалось в т.н. сопутствующей системе отсчета (ССО), движущейся вдоль оси  $OZ$  со скоростью, равной продольной  $z$ -компоненте скорости электрона. В ССО взаимодействие электрона с  $k$ -й потенциальной гармоникой (1) можно описать, как взаимодействие совершающего относительно медленное нерелятивистское поперечное движение электрона с плоскими электромагнитными волнами, имеющими длины  $\lambda = a/k\gamma$ . В лабораторной системе отсчета (ЛСО) волны, соответствующие гармоникам потенциала (1), имеют длины волн  $\lambda = a/k$ . В ССО в знаменателях выражений для длин волн гармоник за счет эффекта Доплера появляется Лоренц-фактор  $\gamma = E/mc^2 \gg 1$  (где  $E$  – релятивистская энергия электрона,  $m$  – масса электрона,  $c$  – скорость света в вакууме). На квантовом языке волнам-гармоникам (1) в ССО соответствуют потоки эквивалентных фотонов [1, 3] с энергиями

$$\hbar\omega_k = 2\pi\hbar c\gamma/\lambda = 2\pi\hbar c\gamma k/a; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Типичные межатомные расстояния в кристаллах  $a$  составляют единицы Ангстрем. Соответственно, энергии эквивалентных фотонов (2) с малыми  $k$  составляют единицы кэВ.

Интересующее нас излучение возникает именно при взаимодействии быстрого электрона с периодическими неоднородностями потенциала – то есть, с гармониками потенциала (1). Это излучение можно рассматривать как результат эффекта обратного комптоновского рассеяния эквивалентных фотонов (2) на покоящемся (или медленно движущемся) в ССО электроны. Именно так этот эффект рассматривался в [8], где было показано, что энергии “обратно рассеянных” эквивалентных фотонов (превращающихся при

этом в реальные) в ЛСО будут превышать энергии (2) еще в  $\sim 2\gamma$  раз.

Дифференциальное сечение рассеяния фотонов с высокими энергиями на покоящемся электроны задается известным результатом Клейна–Нишины [1]:

$$\frac{d\sigma_k}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 \left( \frac{h\nu'}{h\nu} \right)^2 \times \left( \frac{h\nu}{h\nu'} + \frac{h\nu'}{h\nu} - \sin^2\theta \right), \quad (3)$$

где  $\nu$  – частота фотона до рассеяния,  $\nu'$  – частота фотона после рассеяния;  $r_e = ke^2/mc^2$  – Комптоновский радиус электрона, причем  $k$  – константа закона Кулона, равная 1 в Гауссовой физической системе единиц.

Интересующие нас высокоэнергетические фотоны, которые в ЛСО излучаются в направлении “вперед”, в ССО соответствуют фотонам, рассеянным “назад”, т.е. под углами  $\theta > 90^\circ$ .

При  $h\nu \gg mc^2$  (в ССО это будет именно так, если электроны имеют энергию  $E \sim 10^3 mc^2$  и более [8]) формула (3) упрощается, поскольку  $h\nu/h\nu' \gg \sin^2\theta \gg h\nu'/h\nu$ . Проинтегрировав (3) по углам  $\theta > 90^\circ$  можно рассчитать полное релятивистское инвариантное сечение рассеяния “назад”

$$\sigma = \pi(h\nu/h\nu')^2 r_e^2 = \pi(h\nu/h\nu')(e^2/mc^2)^2. \quad (4)$$

В нашей задаче отношение частот “налетающего” эквивалентного фотона и рассеянного назад фотона реального составляет  $h\nu/h\nu' \sim E/(mc^2)^2$  [8] и сечение (4) принимает вид:

$$\sigma = \pi(E/(mc^2)^2)^2 r_e^2 = \pi E e^4 / a^2 (mc^2)^4. \quad (5)$$

С помощью сечения (5) можно оценить интенсивность возникающего излучения. Гармоники потенциала (1) в ЛСО эквивалентны гармоническим электромагнитным волнам с амплитудами напряженности электрического поля примерно равными  $A_k \sim U_0/a$  для гармоник с небольшими  $k$ . Электромагнитные волны с амплитудой  $A_k$  имеют плотность энергии (в физической системе единиц, где постоянная закона Кулона  $k = 1$ , а также  $\hbar = c = 1$ )  $w_k = A_k^2/8\pi \sim U_0^2/8\pi a^2$ . Этой плотности энергии можно поставить в соответствие плотность числа эквивалентных фотонов, соответствующих  $k$ -м гармоникам потенциала (1)

$$n_k \sim w_k a / 2\pi\hbar c\gamma k \sim 10^{-2} U_0^2 / ak. \quad (6)$$

Каждый электрон, пролетая кристалл, проходит сквозь потоки эквивалентных фотонов нескольких гармоник плотности (6). Вероятность испустить фотон на длине пролета  $L$  максимальна для первых гармоник и очевидно оценивается как

$$P_k \sim n_k \sigma L \sim 10^{-2} e^4 U_0^2 E L / a^2 (mc^2)^4. \quad (7)$$

Численный фактор  $\sim 10^{-2}$  возникает при подстановках и перемножении численных констант.

Результат (7) можно интерпретировать так: вероятность испустить фотон рассматриваемого типа будет близка к единице при пролете электроном кристалла толщиной  $L \sim 10^2 a^2 (mc^2)^4 / e^4 U_0^2 E$ . Взяв типичные для многих кристаллов значения  $U_0/mc^2 \sim 10^{-2}$  [3, 6],  $amc/\hbar \sim 10^2$ , получаем численную оценку эффективной длины испускания фотона  $L \sim 10$  см для  $E/mc^2 \sim 10^3$ , что заметно больше, чем характерная длина испускания фотона при спонтанных переходах между каналированными состояниями ( $\sim 1$  см, [7]). Следует, однако, отметить, что спектральные характеристики рассматриваемого излучения [8] сильно отличаются от характеристик излучения при спонтанных переходах между каналированными состояниями [4–7], а найденная характерная длина излучения  $L \sim 10^2 a^2 (mc^2)^4 / e^4 U_0^2 E$  падает с ростом энергии электрона.

## 2. ОЦЕНКА ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ПОТЕНЦИАЛА КРИСТАЛЛА, МЕТОДОМ КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В классической электродинамике любая заряженная частица, испытывающая ускорение  $w$ , испускает электромагнитные волны с интенсивностью, определяемой известной формулой Лармора (см., например, [10]):

$$I [\text{Вт}] = (2e^2/3c^3)w^2. \quad (8)$$

Продольное ускорение  $w$ , которое испытывает электрон, движущийся в электростатическом потенциале (1), задается всеми ненулевыми гармониками этого потенциала. Полагая, что главную роль играет первая гармоника, это ускорение в ССО составляет примерно

$$w = eE(dU_1(z)/dz)/(mc^2)^2 \sim \sim 2\pi eEU_0 \cos(2\pi z/a)/a(mc^2)^2 \quad (9)$$

Усредненная по времени (или по  $z$ ) полная интенсивность излучения составит в ССО:

$$I = (2e^2/3c^3)w^2 \sim 10^1 e^4 EU_0^2/a^2 (mc^2)^2 \quad (10)$$

Переходя в ЛСО, учитывая эффект Доплера и деля интенсивность излучения на характерные энергии испускаемых вперед фотонов, получаем оценку вероятности излучения, совпадающую с оценкой (7) с точностью до численного коэффициента, который в обоих случаях оценивался приблизительно по порядку величины. Отметим, что упрощенные оценки, как выясняется, способны давать полезные и количественно адекват-

ные результаты, независимо от направления упрощения – в классическую или в квантовую сторону.

## 3. ТОЧНЫЙ ПОДХОД К РАСЧЕТУ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ПРОЦЕССА ИСПУСКАНИЯ ФОТОНА ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ПОТЕНЦИАЛА КРИСТАЛЛА, МЕТОДАМИ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Квантовая электродинамика (в рамках теории возмущений) предлагает точный метод расчета матричных элементов и сечений практически любых релятивистских электродинамических процессов, в том числе и процесса испускания фотона при взаимодействии релятивистского электрона с периодическими неоднородностями потенциала кристалла. Это так называемый метод диаграмм, предложенный и разработанный Ричардом Фейнманом [1, 11]. Рассматриваемому в данной статье процессу в методе Фейнмана соответствуют диаграммы, похожие на диаграммы комптоновского рассеяния, но имеющие важные и усложняющие вычисления отличия. Электронным линиям на диаграммах рис. 1 (жирные сплошные линии со стрелками) соответствуют не плоские волны, как в процессах, происходящих в вакууме, а волновые функции, являющиеся решениями квадратированного релятивистского уравнения Шредингера с усредненным потенциалом системы ионных цепочек, образующих кристалл (нулевая гармоника потенциала (1)).

$$\hbar c^2 \Delta \psi(r) + 2E(\epsilon_n - U_0(r))\psi(r) = 0, \quad (11)$$

а вершине, помеченной литерой  $W$ , соответствует взаимодействие с остальными (ненулевыми) гармониками потенциала (1). Еще сложнее ситуация с линией – пропагатором, соединяющей две вершины диаграмм (рис. 1). Ей соответствует сложно определяемая функция Грина уравнения (11). Только штрихованные фотонные линии представимы в виде плоских волн, и то с определенной натяжкой, учитывая, что входящей штрихованной линии на диаграммах соответствует не реальный фотон, а “эквивалентный” (взаимодействие с ненулевыми гармониками потенциала (1)). Все прочие математические компоненты диаграмм рис. 1 определяются сложно. Математическая техника вычисления матричных элементов, соответствующих Фейнмановским диаграммам, подробно описана, например, в [1, 12]. Несложно убедиться, что сосчитать матричные элементы процесса, соответствующего диаграммам рис. 1 с учетом упомянутых усложнений, возможно только численно. Попытка сделать это предпринималась, например, в одной из ранних работ авторов [12]. Тем более непросто рассчитать таким спосо-

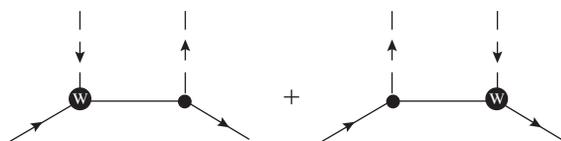


Рис. 1. Диаграммы Фейнмана для комптоновского рассеяния эквивалентного фотона на каналированном электроном.

бом физические измеримые характеристики излучения — вероятность, характерную длину — которые можно было бы сравнить с экспериментом. Отметим, что упрощенные подходы, описанные выше, дают возможность получить такие оценки практически элементарно, причем физически прозрачным и понятным образом.

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе, продолжающей серию публикации авторов [7, 8], оценены интенсивность и характерная длина электромагнитного излучения, возникающего при взаимодействии релятивистского электрона с периодическими неоднородностями потенциала кристалла. Такое излучение представляет особый интерес постольку, поскольку оно обладает выражено дискретным спектром (особенно в случае, когда электрон захвачен в каналированное состояние, [8]) и весьма высокими характерными энергиями испускаемых прямо вперед фотонов  $\hbar\omega_i = 2\pi\hbar c\gamma^2/a$ .

Показано, что:

1. Вероятность излучения растет, а характерная длина излучения снижается с ростом энергии излучающего электрона.

2. При энергиях электрона  $E \sim \text{ГэВ}$  эти характеристики (вероятность и характерная длина излучения) сопоставимы с аналогичными характеристиками для излучения при спонтанных переходах между каналированными состояниями, но

спектры двух типов излучения сильно различаются [7, 8], что должно позволить легко различать их при экспериментальном исследовании.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках Программы “ПРИОРИТЕТ 2030”.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980. 704 с.
2. Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф. Электродинамика высоких энергий в веществе. М.: ГРФМЛ. Наука, 1993. 344 с.
3. Тер-Микаелян М.Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. Ереван: Изд. Арм. АН, 1969. 457 с.
4. Калашников Н.П. Когерентные взаимодействия заряженных частиц в монокристаллах. М.: Атомиздат, 1981. 224 с.
5. Оцуки Е.-Х. Взаимодействие заряженных частиц с твердыми телами. М.: МИР, 1985. 280 с.
6. Andersen J.U., Bonderup E., Loegsgaard E. et al. // NIM. 1982. V. 194. P. 209–224.
7. Калашников Н.П., Ольчак А.С. Классический подход для описания излучения каналированных частиц // Вестник НИЯУ МИФИ, 2021. Т. 10. № 2. С. 97–103.
8. Калашников Н.П., Ольчак А.С. Обратное комптоновское рассеяние фотонов и эквивалентных фотонов на каналированных частицах // Вестник НИЯУ МИФИ. 2021. Т. 10. № 4. С. 289–294.
9. Линдхард Й. Влияние кристаллической решетки на движение быстрых заряженных частиц // УФН. 1969. Т. 99. № 2. С. 249–296.
10. Калашников Н.П., Смондырев М.А. Основы физики. Т. 2. М.: Лаборатория знаний, 2012. 606 с.
11. Фейнман Р. Квантовая электродинамика. М.: МИР, 1964. 219 с.
12. Kalashnikov N.P., Olchak A.S. Ultrarelativistic electron and positron radiation in planar channeling // Nuclear Instruments and Methods, 1980. V. 170. № 1. P. 27–30.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta “МИФИ”, 2021, vol. 10, no. 5, pp. 385–389

## Radiation Intensity Arising from the Interaction of a Relativistic Electron with Periodic Inhomogeneities of the Single Crystal Potential

N. P. Kalashnikov<sup>a, #</sup> and A. S. Olchak<sup>a, ##</sup>

<sup>a</sup> National Research Nuclear University MEPHI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

<sup>#</sup>e-mail: kalash@mephi.ru

<sup>##</sup>e-mail: asolchak@mephi.ru

Received November 4, 2021; revised November 5, 2021; accepted November 9, 2021

**Abstract**—The channeling effect is considered in the so-called accompanying reference system moving with the velocity equal to the longitudinal component of the channeled particle velocity. In such a system, particle

motion is finite and similar to the vibrational motion in a one-dimensional potential (plane channeling) or the two-dimensional finite motion in the central field (axial channeling). For relativistic electrons, such motion can be considered both in quantum and classical approximations. In classical consideration, it is possible to calculate quite simply such important characteristics of motion and electromagnetic radiation as the intensity of the resulting electromagnetic radiation, its spectral characteristics, and characteristic times of electron energy loss. The characteristic lifetimes of quantum channeled states and the probability of transitions between them can be estimated using the results of the classical approach, whereas directly in the quantum approach, this can be done only numerically. The simplified analytical consideration is applied to calculate the spectral characteristics and radiation intensity, which accompanies the axial channeling electrons of GeV energies. It is shown that this mechanism can lead to the conversion of a significant part of the energy of the electron beam into high-energy gamma-ray photons when passing the oriented single crystal target about 1 cm thick.

*Keywords:* coherent interaction, channeling, single crystal, electromagnetic radiation, quantum mechanics, gamma radiation

DOI: 10.1134/S2304487X21050060

#### REFERENCES

1. Beresteckij V.B., Lifshic E.M., Pitaevskij L.P., *Kvantovaya elektrodinamika* [Quantum electrodynamics] Moscow, Nauka Publ., 1980, 704 p.
2. Ahiezer A.I., SHul'ga N.F., *Elektrodinamika vysokih energij v veshchestve* [Electrodynamics of high energies in matter], Moscow, GRFML. Nauka Publ., 1993, 344 p.
3. Ter-Mikaelyan M.L., *Vliyanie sredy na elektromagnitnye processy pri vysokih energiayah* [The influence of the medium on electromagnetic processes at high energies], Erevan: Izd. Arm. AN. Publ., 1969, 457 p.
4. Kalashnikov N.P., *Kogerentnye vzaimodejstviya zaryazhennykh chastic v monokristallah* [Coherent interactions of charged particles in single crystals], Moscow, Atomizdat Publ., 1981, 224 p.
5. Ocuki E.-H., *Vzaimodejstvie zaryazhennykh chastic s tverdymi telami* [Interaction of charged particles with solids], Moscow: MIR Publ., 1985, 280 p.
6. Andersen J.U., Bonderup E., Loegsgaard E. et al., *NIM*, 1982, vol. 194, pp. 209–224.
7. Kalashnikov N.P., Ol'chak A.S., *Klassicheskij podhod dlya opisaniya izlucheniya kanalirovannykh chastic* [The classical approach for describing the radiation of channeled particles], *Vestnik NIYaU MIFI*, 2021, vol. 10, no. 2, pp. 97–103 (in Russian).
8. Kalashnikov N.P., Ol'chak A.S., *Obratnoe komptonovskoe rasseyanie fotonov i ekvivalentnykh fotonov na kanalirovannykh chasticah* [Inverse Compton scattering of photons and equivalent photons on channeled particles], *Vestnik NIYaU MIFI*, 2021, vol. 10, no. 4, pp. 289–294 (in Russian).
9. Lindhard J., *Vliyanie kristallicheskoj reshetki na dvizhenie bystrykh zaryazhennykh chastic* [Effect of the crystal lattice on the motion of fast charged particles], *UFN*, 1969, vol. 99, no. 2, pp. 249–296 (in Russian).
10. Kalashnikov N.P., Smondyrev M.A., *Osnovy fiziki* [Fundamentals of Physics], Moscow: Laboratoriya znaniy Publ., 2012, vol. 2, 606 p.
11. Fejnman R., *Kvantovaya elektrodinamika* [Quantum electrodynamics], Moscow: MIR Publ., 1964, 219 p.
12. Kalashnikov N.P., Olchak A.S., *Ultrarelativistic electron and positron radiation in planar channeling*, *Nuclear Instruments and Methods*, 1980, vol. 170, no. 1, pp. 27–30.