

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ

© 2021 г. Д. В. Сафонова^{1,**}, Н. А. Кудряшов^{1,**}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия

*e-mail: safonovadashav@gmail.com

**e-mail: nakudryashov@mephi.ru

Поступила в редакцию 23.11.2021 г.

После доработки 24.11.2021 г.

Принята к публикации 07.12.2021 г.

Рассматривается дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка со степенными нелинейностями, используемое для описания распространения высокодисперсных импульсов в оптических волокнах. Проведен групповой анализ уравнения, а именно получены групповые преобразования, допускаемые изучаемым дифференциальным уравнением. Для этого выполнены три шага: поиск системы определяющих уравнений, отыскание координат касательного векторного поля и построение инфинитезимальных операторов. В результате найдены два инфинитезимальных оператора, допускаемых изучаемым уравнением. Таким образом показано, что рассмотренное уравнение инвариантно относительно группы преобразований сдвига по пространственной и временной переменной. Что свидетельствует о возможности понизить размерность исходного уравнения в частных производных, рассмотрев его редукцию в переменных бегущей волны, получив при этом обыкновенное дифференциальное уравнение.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, групповой анализ, инфинитезимальный оператор

DOI: 10.1134/S2304487X21050096

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из эффективных подходов исследования дифференциальных уравнений является групповой анализ. Основой которого является применение локальных преобразований групп Ли, предложенных норвежским ученым Софусом Ли во второй половине 19 века. Существуют различные приложения этой теории для исследования дифференциальных уравнений [1–4]. Исследование симметрии помогает строить аналитические решения дифференциальных уравнений, лежащих в основе математических моделей, встречающихся в различных областях знаний [5–7].

Первым шагом такого исследования является нахождение операторов групп преобразований, допускаемых дифференциальным уравнением. Можно разделить этот этап исследования на три части: построение определяющих уравнений, поиск координат касательного векторного поля, получение допускаемых инфинитезимальных операторов. В данной работе применим этот подход для исследования дифференциального уравнения, описывающего высокодисперсные оптические импульсы.

Уравнение четвертого порядка с нелинейностью третьей и пятой степени для описания оптических импульсов, предложенное в статье [8], имеет вид:

$$i \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + i\beta \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x, t) + \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x, t) + \mu |u(x, t)|^2 u(x, t) + \nu |u(x, t)|^4 u(x, t) = 0, \quad (1)$$

где x и t – независимые переменные (x – пространственная, t – временная), $u(x, t)$ – зависимая переменная, соответствующая волновому профилю, i – мнимая единица, α , β , μ , ν – параметры.

Целью данной работы является построение инфинитезимальных операторов, допускаемых нелинейным дифференциальным уравнением высокого порядка (1).

2. НАХОЖДЕНИЕ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ДОПУСКАЕМЫХ УРАВНЕНИЕМ (1)

Шаг 1. Построение определяющих уравнений.

Для краткости записи перепишем рассматриваемое уравнение (1) в следующем виде

$$iu_t + \alpha u_{xx} + i\beta u_{xxx} + u_{xxxx} + \mu |u|^2 u + \nu |u|^4 u = 0. \quad (2)$$

Введем систему однопараметрических преобразований с параметром a

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + a\xi^1(x, t, u) + o(a), \\ \tilde{t} &= t + a\xi^2(x, t, u) + o(a), \\ \tilde{u} &= u + a\eta(x, t, u) + o(a), \end{aligned} \quad (3)$$

где ξ^1, ξ^2, η координаты вектора касательного векторного поля группы преобразований. Тогда инфинитезимальный оператор будет иметь вид [1–4]

$$X = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial u}. \quad (4)$$

Группы преобразований, допускаемых уравнением (2), строятся с помощью продолжения оператора X до четвертой производной. Учитывая производные, имеющиеся в уравнении (2), получаем следующий вид продолженного оператора

$$X_4 = X + \xi_2 \frac{\partial}{\partial u_t} + \xi_{11} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \xi_{111} \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \xi_{1111} \frac{\partial}{\partial u_{xxxx}}. \quad (5)$$

Действуя оператором X_4 на исходное уравнение (2), получаем уравнение

$$i\xi_2 + \alpha\xi_{11} + i\beta\xi_{111} + \xi_{1111} + \mu\eta(2u^2 + |u|^2) + \nu\eta(4|u|^2 u^2 + |u|^4) = 0, \quad (6)$$

являющееся определяющим при условии выполнения уравнения (2).

Выразим координаты продолженного касательного векторного поля $\xi_2, \xi_{11}, \xi_{111}, \xi_{1111}$ через ξ^1, ξ^2, η [2]:

$$\xi_1 = D_x(\eta) - u_x D_x(\xi^1) - u_t D_x(\xi^2), \quad (7)$$

$$\xi_2 = D_t(\eta) - u_x D_t(\xi^1) - u_t D_t(\xi^2), \quad (8)$$

$$\xi_{11} = D_x(\xi_1) - u_{xx} D_x(\xi^1) - u_{xt} D_x(\xi^2), \quad (9)$$

$$\xi_{111} = D_x(\xi_{11}) - u_{xxx} D_x(\xi^1) - u_{xxt} D_x(\xi^2), \quad (10)$$

$$\xi_{1111} = D_x(\xi_{111}) - u_{xxxx} D_x(\xi^1) - u_{xxxt} D_x(\xi^2). \quad (11)$$

Принимая во внимание, что u зависит от x и t , а ξ^1, ξ^2 и η зависят от x, t, u , и то, что

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \dots, \quad (12)$$

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{tt} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xxt} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \dots$$

получаем следующие выражения для $\xi_1, \xi_2, \xi_{11}, \xi_{111}, \xi_{1111}$

$$\xi_1 = \eta_x + u_x(\eta_u - \xi_x^1) - u_x^2 \xi_u^1 - u_t \xi_x^2 - u_x u_t \xi_u^1, \quad (13)$$

$$\xi_2 = \eta_t + u_t(\eta_u - \xi_t^2) - u_t^2 \xi_u^2 - u_x \xi_t^1 - u_x u_t \xi_u^1, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \xi_{11} &= D_x^2(\eta) - u_x D_x^2(\xi^1) - u_t D_x^2(\xi^2) - \\ &- 2u_{xx} D_x(\xi^1) - 2u_{xt} D_x(\xi^2) = \eta_{xx} + u_x(2\eta_{xu} - \xi_{xx}^1) + \\ &+ u_x^2(\eta_{uu} - 2\xi_{xu}^1) - u_x^3 \xi_{uu}^1 + u_{xx}(\eta_u - 2\xi_x^1) - \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &- 3u_x u_{xx} \xi_u^1 - u_t \xi_{xx}^2 - 2u_t u_x \xi_{xu}^2 - \\ &- u_t u_x^2 \xi_{uu}^2 - u_t u_{xx} \xi_u^2 - 2u_{xt} \xi_x^2 - 2u_{xt} u_x \xi_u^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{111} &= D_x^3(\eta) - u_x D_x^3(\xi^1) - u_t D_x^3(\xi^2) - \\ &- 3u_{xx} D_x^2(\xi^1) - 3u_{xt} D_x^2(\xi^2) - 3u_{xxx} D_x(\xi^1) - \\ &- 3u_{xxt} D_x(\xi^2) = \eta_{xxx} + u_x(3\eta_{xuu} - \xi_{xxx}^1) + \\ &+ u_x^2(3\eta_{xuu} - 3\xi_{xuu}^1) + u_x^3(\eta_{uuu} - 3\xi_{xuu}^1) - \\ &- u_x^4 \xi_{uuu}^1 + u_{xx}(3\eta_{xu} - 3\xi_{xx}^1) + \\ &+ u_x u_{xx}(3\eta_{uu} - 9\xi_{xu}^1) - 6u_x^2 u_{xx} \xi_{uu}^1 + \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &+ u_{xxx}(\eta_u - 3\xi_x^1) - 4u_x u_{xxx} \xi_u^1 - \\ &- 3u_{xx}^2 \xi_u^1 - u_t \xi_{xxx}^2 - 3u_t u_{xx} \xi_{xu}^2 - 3u_t u_x^2 \xi_{uu}^2 - \\ &- u_t u_x^3 \xi_{uu}^2 - 3u_t u_{xx} \xi_u^2 - u_t u_{xxx} \xi_u^2 - \\ &- 3u_t u_x u_{xx} \xi_{uu}^2 - 3u_{xt} \xi_{xx}^2 - 6u_{xt} u_x \xi_{xu}^2 - \\ &- 3u_{xt} u_x^2 \xi_{uu}^2 - 3u_{xt} u_{xx} \xi_u^2 - 3u_{xxt} \xi_x^2 - 3u_{xxt} u_x \xi_u^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{1111} &= D_x^4(\eta) - u_x D_x^4(\xi^1) - u_t D_x^4(\xi^2) - 4u_{xx} D_x^3(\xi^1) - \\ &- 4u_{xt} D_x^3(\xi^2) - 6u_{xxx} D_x^2(\xi^1) - 6u_{xxt} D_x^2(\xi^2) - \\ &- 4u_{xxxx} D_x(\xi^1) - 4u_{xxxt} D_x(\xi^2) = \\ &= \eta_{xxxx} + u_x(4\eta_{xxuu} - \xi_{xxxx}^1) + u_x^2(6\eta_{xuuu} - 4\xi_{xxxx}^1) + \\ &+ u_x^3(4\eta_{xuuu} - 6\xi_{xuuu}^1) + u_x^4(\eta_{uuuu} - 4\xi_{xuuu}^1) - \\ &- u_x^5 \xi_{uuuu}^1 + u_{xx}(6\eta_{xuu} - 4\xi_{xxx}^1) + \\ &+ u_x u_{xx}(12\eta_{xuu} - 18\xi_{xuu}^1) + u_x^2 u_{xx}(6\eta_{uuu} - 24\xi_{xuu}^1) - \\ &- 10u_x^3 u_{xx} \xi_{uuu}^1 + u_{xxx}(4\eta_{xu} - 6\xi_{xx}^1) + \\ &+ u_x u_{xxx}(4\eta_{uu} - 16\xi_{xu}^1) - 10u_x^2 u_{xxx} \xi_{uu}^1 + \\ &+ u_{xxxx}(\eta_u - 4\xi_x^1) - 5u_x u_{xxxx} \xi_u^1 + \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &+ u_{xx}^2(3\eta_{uu} - 12\xi_{xu}^1) - 15u_x u_{xx}^2 \xi_{uu}^1 - \\ &- 10u_{xx} u_{xxx} \xi_u^1 - u_t \xi_{xxxx}^2 - 4u_t u_{xx} \xi_{xuu}^2 - \\ &- 6u_t u_x^2 \xi_{xuu}^2 - 4u_t u_x^3 \xi_{xuu}^2 - u_t u_x^4 \xi_{xuu}^2 - \\ &- 6u_t u_{xx} \xi_{xu}^2 - 4u_t u_{xxx} \xi_u^2 - u_t u_{xxxx} \xi_u^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- 12u_t u_x u_{xx} \xi_{xuu}^2 - 4u_t u_x u_{xxx} \xi_{uu}^2 - 6u_t u_x^2 u_{xx} \xi_{uu}^2 - \\ &- 3u_t u_{xx}^2 \xi_{uu}^2 - 4u_{xt} \xi_{xxx}^2 - 12u_{xt} u_x \xi_{xuu}^2 - \\ &- 12u_{xt} u_x^2 \xi_{xuu}^2 - 4u_{xt} u_x^3 \xi_{xuu}^2 - 12u_{xt} u_{xx} \xi_{xu}^2 - \\ &- 4u_{xt} u_{xxx} \xi_u^2 - 12u_{xt} u_x u_{xx} \xi_{uu}^2 - 6u_{xxt} \xi_{xx}^2 - \\ &- 12u_{xxt} u_x \xi_{xu}^2 - 6u_{xxt} u_x^2 \xi_{xu}^2 - 6u_{xxt} u_{xx} \xi_u^2 - \\ &- 4u_{xxxt} \xi_x^2 - 4u_{xxxt} u_x \xi_u^2. \end{aligned}$$

Подставляя выражения (14)–(17) в (6) и учитывая (2), можно получить систему уравнений для определения координат ξ^1 , ξ^2 , η . Из коэффициента при $|u|^4$ находим, что $\eta = 0$. Из коэффициентов при u_{xxx} и $u_{xxx}u_x$ получаем, что $\xi_x^2 = 0$ и $\xi_u^2 = 0$. Поэтому уйдут все слагаемые с производными u по t , которые возникают от ξ_{11} , ξ_{111} и ξ_{1111} . Слагаемые с u_t останутся только от ξ_2 . Заметим, что u_t связана с производными u по x уравнением (2). Поэтому из коэффициента при $|u|^4 u$, который получается из u_t , находим, что $\xi_t^2 = 0$. А из коэффициента при $|u|^4 uu_x$, который получается из $u_t u_x$, находим, что $\xi_u^1 = 0$. Таким образом, слагаемое с u_{xxx} осталось только от ξ_{1111} . Далее, принимая во внимание $\eta = 0$, находим, что $\xi_x^1 = 0$. Учитывая это, получаем, что слагаемое с u_x остается только от ξ_2 , поэтому $\xi_t^1 = 0$. Таким образом, составляем систему для определения координат касательного векторного поля

$$\begin{cases} \xi_x^1 = 0, & \xi_t^1 = 0, & \xi_u^1 = 0, \\ \xi_x^2 = 0, & \xi_t^2 = 0, & \xi_u^2 = 0, \\ \eta = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Уравнение (18) является определяющей системой для координат касательного векторного поля.

Шаг 2. Определение координат касательного векторного поля.

Решая систему определяющих уравнений (18) получаем, что координаты касательного векторного поля не зависят от x , t , u и имеют следующий вид

$$\xi^1 = C_1, \quad \xi^2 = C_2, \quad \eta = 0, \quad (19)$$

где C_1 и C_2 постоянные интегрирования.

Шаг 3. Построение инфинитезимальных операторов, допускаемых уравнением (2).

Полагая в (19) $C_1 = 1$ и $C_2 = 0$, а затем $C_1 = 0$ и $C_2 = 1$, получаем два оператора

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}. \quad (20)$$

Эти операторы показывают, что уравнение (2) допускает группы преобразований сдвига по x и по t . Поскольку решая уравнения Ли с координатами, соответствующими оператору X_1

$$\frac{d\tilde{x}}{da} = 1, \quad \tilde{x}|_{a=0} = x \quad (21)$$

получаем группу преобразований сдвига по x

$$\tilde{x} = x + a, \quad \tilde{t} = t, \quad \tilde{u} = u. \quad (22)$$

Аналогично, используя координаты, соответствующие оператору X_2 , получаем группу преобразований сдвига по t

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{t} = t + a, \quad \tilde{u} = u. \quad (23)$$

Заметим, что уравнение (2) также допускает операторы составленные из суммы X_1 и X_2 , умноженных на числа. Поэтому допускается оператор

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (24)$$

Решая уравнение $dx = c_0 dt$, получаем инвариант

$$I = x - c_0 t. \quad (25)$$

Наличие инвариантов (25) свидетельствует о том, что исходное уравнение в частных производных имеет решение в переменных бегущей волны: $u(x, t) = v(z)$, $z = x - c_0 t$. При этом переходя к новой переменной $z = x - c_0 t$, исходное уравнение в частных производных преобразуется к обыкновенному дифференциальному уравнению. Точные решения уравнения (2) в переменных бегущей волны построены в статье [9].

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка, которое используется для описания распространения импульсов в оптических средах. Для этого уравнения выполнен групповой анализ. Получены два инфинитезимальных оператора, допускаемых рассмотренным уравнением. Эти операторы соответствуют группам преобразования сдвига по пространственной и временной переменным.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10039) и Министерства науки и высшего образования РФ (проект государственного задания № 0723-2020-0036).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
2. Olver P.J. Applications of Lie groups to differential equations. New York: Springer, 1993.
3. Bluman G.W., Kumei S. Symmetries and differential equations. New York: Springer, 1989.
4. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Интеллект, 2010. 364 с.
5. Ghanbari B., Kumar S., Niwas M., Baleanu D. The Lie symmetry analysis and exact Jacobi elliptic solutions for

- the Kawahara-KdV type equations // *Results in Physics*. 2021. V. 23. 104006.
6. Yasar E., Yildirim Y., Khalique C.M. Lie symmetry analysis, conservation laws and exact solutions of the seventh-order time fractional Sawada-Kotera-Ito equation // *Results in Physics*. 2016. V. 6. P. 322–328.
 7. Hashemi M.S., Haji-Badali A., Alizadeh F., Inc M. Nonclassical Lie symmetry and conservation laws of the nonlinear time-fractional Korteweg-de Vries equation // *Commun. Theor. Phys*. 2021. V. 73. 095006.
 8. Kudryashov N.A. Construction of nonlinear equations for description of propagation pulses in optical fiber // *Optik*. 2019. V. 192. 162964.
 9. Кудряшов Н.А., Сафонова Д.В. Точные решения нелинейного дифференциального уравнения для описания оптических импульсов с нелинейностью третьей и пятой степени // *Вестник НИЯУ МИФИ*. 2020. Т. 9. № 1. С. 25–31.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2021, vol. 10, no. 5, pp. 403–406

Group Analysis of the Fourth-Order Differential Equation for Describing Optical Pulses

D. V. Safonova^{a,#} and N. A. Kudryashov^{a,##}

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: safonovadashav@gmail.com

^{##}e-mail: nakudryashov@mephi.ru

Received November 23, 2021; revised November 24, 2021; accepted December 7, 2021

Abstract—The fourth-order partial differential equation with power-law nonlinearities is investigated. It is used to describe the propagation of highly dispersed pulses in optical fibers. A group analysis of this equation is performed and the group transformations allowed by the differential equation are constructed in three steps. In the first step, a system of governing equations is obtained. In the second step, the coordinates of a tangent vector field are sought for. In the third step, infinitesimal generators are constructed. As a result, two infinitesimal generators allowed by the equation are found. Thus, it is shown that the considered equation is invariant under space and time translations. This indicates that the dimension of the original partial differential equation can be lowered by considering its reduction in traveling wave variables. As a result, an ordinary differential equation is obtained.

Keywords: nonlinear differential equation, group analysis, infinitesimal generator

DOI: 10.1134/S2304487X21050096

REFERENCES

1. Ovsyannikov L.V., *Gruppovoy analiz differentsialnykh uravneniy* [Group analysis of differential equations], Moscow: Nauka Publ., 1978. 400 p.
2. Olver P.J., *Applications of Lie groups to differential equations*, New York: Springer, 1993.
3. Bluman G.W., Kumei S., *Symmetries and differential equations*, New York: Springer, 1989.
4. Kudryashov N.A., *Metody nelineynoy matematicheskoy fiziki* [Methods of nonlinear mathematical physics], Dolgoprudniy, Intellect Publ., 2010. 364 p.
5. Ghanbari B., Kumar S., Niwas M., Baleanu D., The Lie symmetry analysis and exact Jacobi elliptic solutions for the Kawahara-KdV type equations, *Results in Physics*, 2021, vol. 23, 104006.
6. Yasar E., Yildirim Y., Khalique C.M., Lie symmetry analysis, conservation laws and exact solutions of the seventh-order time fractional Sawada-Kotera-Ito equation, *Results in Physics*, 2016, vol. 6, pp. 322–328.
7. Hashemi M.S., Haji-Badali A., Alizadeh F., Inc M., Nonclassical Lie symmetry and conservation laws of the nonlinear time-fractional Korteweg-de Vries equation, *Commun. Theor. Phys.*, 2021, vol. 73, 095006.
8. Kudryashov N.A., Construction of nonlinear equations for description of propagation pulses in optical fiber, *Optik*, 2019, vol. 192, 162964.
9. Kudryashov N.A., Safonova D.V., *Tochniye resheniya nelineynogo differentsialnogo uravneniya dlya opisaniya opticheskikh impulsov s nelineynostyu tretey i pyatoy stepeni* [Exact Solutions of a Nonlinear Differential Equation with Third and Fifth Degree Nonlinearities for Description of Optical Pulses], *Vestnik NIYaU MIFI*, 2020, vol. 9, no. 1, pp. 25–31 (in Russian).