

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВСТРЕЧАЮЩЕГОСЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКЕ

© 2021 г. Н. В. Ермолаева^{1,2,**}, Н. А. Кудряшов^{1,*}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ",
Москва, 115409, Россия

² Волгодонский инженерно-технический институт НИЯУ МИФИ,
Волгодонск, Ростовская обл., 347360, Россия

*e-mail: nakudr@gmail.com

**e-mail: NVErmolayeva@mephi.ru

Поступила в редакцию 15.12.2021 г.

После доработки 16.12.2021 г.

Принята к публикации 21.12.2021 г.

В данной работе рассматривается одно из нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которое встречается при описании распространения импульсов в нелинейной оптике. Задача Коши для этого уравнения не решается методом обратной задачи рассеяния, поэтому для поиска точного решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в частных производных используются переменные бегущей волны. Доказано, что рассматриваемое уравнение имеет точное решение в виде периодических и уединенных волн, которые определяются используя эллиптические функции. Приведены значения параметров для существования точных решений данного уравнения. Точные решения дифференциальных уравнений выражаются в терминах эллиптической функции Вейерштрасса. Также приводится формула для описания уединенных волн. Проиллюстрированы точные решения в виде периодических и уединенных волн. Показано, что показатель нелинейности оказывает существенное влияние на форму импульса, распространяющегося в оптическом волокне.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, бегущая волна, эллиптическая функция Вейерштрасса, оптическое волокно, распространение импульсов

DOI: 10.1134/S2304487X21050047

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время изучение нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, используемых для описания распространения импульсов в оптическом волокне, вызывает большой интерес. Это обусловлено интенсивным развитием оптических линий и устройств оптической связи.

В данной работе исследуется уравнение из иерархии нелинейных дифференциальных уравнений Шредингера, предложенной в работе [1], имеющее вид

$$iq_t + \alpha_1 q_{xx} + i\beta_1 q_x + \chi_1 q + \mu_1 |q|^{2n} q + \nu_1 |q|^{-2n} q = 0, \quad (1)$$

где i – мнимая единица ($i^2 = -1$), $q(x, t)$ – функция, описывающая профиль оптического импульса, n – индекс нелинейности, $\alpha_1, \beta_1, \mu_1, \nu_1$ – параметры математической модели.

Отметим, что уравнение (1) включает в себя несколько частных уравнений, описывающих распространение импульсов в оптическом волокне. В частности, уравнение (1) при $\beta_1 = \nu_1 = 0$ рассматривалось в работах [2, 3].

В [1] показано, что задача Коши для уравнения (1) методом обратной задачи рассеяния не решается, поэтому мы будем искать точные решения этого уравнения, используя переменные бегущей волны:

$$q(x, t) = y(z) \cdot \exp(i(kx - \omega t - \theta_0)), \quad z = x - C_0 t, \quad (2)$$

где ω – волновое число, C_0 – скорость волны, θ_0 – фазовая составляющая.

Цель данной работы заключается в построении точных решений уравнения (1) в переменных бегущей волны.

В следующих разделах мы покажем, что для уравнения (1) существуют одиночные и периодические волновые решения, которые выражаются через эллиптическую функцию Вейерштрасса.

2. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (1)

Найдем точное решение уравнения (1) используя переменные бегущей волны (2).

Подставляя $q(x, t)$ в уравнение (1) и приравняв в полученном выражении к нулю действительную и мнимую части, получим следующую систему уравнений:

$$(\beta_1 + 2\alpha_1 k - C_0)y_z = 0, \quad (3)$$

$$\alpha_1 y_{zz} + \mu_1 y^{2n+1} + \nu_1 y^{-2n+1} + (\omega + \chi_1 - \alpha_1 k^2 - \beta_1 k)y = 0. \quad (4)$$

Принимая во внимание, что уравнение (4) является нелинейным мы получаем, что функция $y(z)$ может быть решением переопределенной системы уравнений (3) и (4) при ограничении на параметры.

Из (3) получим значение скорости бегущей волны:

$$C_0 = \beta_1 + 2\alpha_1 k. \quad (5)$$

При выполнении условия (5) уравнения (3) и (4) будут совместными.

Уравнение (4) имеет первый интеграл. Для того чтобы найти его, обе части уравнения (4) умножим на dy/dz и проинтегрируем полученное выражение. Получим следующее соотношение:

$$\frac{\alpha_1}{2} y_z^2 + \frac{\mu_1}{2n+2} y^{2n+2} + \frac{\nu_1}{-2n+2} y^{-2n+2} + \frac{\omega + \chi_1 - \alpha_1 k^2 - \beta_1 k}{2} y^2 = C_1, \quad (6)$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

В уравнении (6) положим значение параметра α_1 равным единице и введем новые коэффициенты a, b , и c :

$$\alpha_1 = 1, \quad \mu_1 = a(n+1), \quad \nu_1 = b(n-1), \quad (7)$$

$$\omega + \chi_1 - \alpha_1 k^2 - \beta_1 k = c.$$

С учетом (7) получим следующее дифференциальное уравнение:

$$y_z^2 = ay^{2n+2} + by^{-2n+2} + cy^2, \quad (8)$$

где a, b, c — коэффициенты, которые следует определить.

Найдем общее решение уравнения (8) используя новые переменные:

$$y(z) = V(z)^{1/(2n)}, \quad n \neq 0. \quad (9)$$

Преобразуем уравнение (8) к следующему виду

$$V_z^2 = 4an^2V^3 - 4n^2cV^2 - 4n^2bV. \quad (10)$$

Принимая во внимание новую функцию

$$V(z) = W(z) - \frac{c}{3a}, \quad (11)$$

преобразуем уравнение (10) к виду уравнения для функции Вейерштрасса [4–7]:

$$W_\xi^2 = 4W^3 - g_2W - g_3, \quad \xi = n\sqrt{a}z, \quad (12)$$

где инварианты g_2 и g_3 имеют вид

$$g_2 = \frac{4c^2}{3a^2} - \frac{4b}{a}, \quad g_3 = \frac{4bc}{3a^2} - \frac{8c^3}{27a^3}. \quad (13)$$

Общее решение уравнения (12) выражается через эллиптическую функцию Вейерштрасса

$$W(z) = \wp(n\sqrt{a}(z - z_0), g_2, g_3) \quad (14)$$

С учетом переменных (9), (11), (13) и (14), мы получим точное решение уравнения (4) в виде

$$y(z) = \left[\wp \left(n\sqrt{a}(z - z_0), \frac{4c^2}{3a^2} - \frac{4b}{a}, \frac{4bc}{3a^2} - \frac{8c^3}{27a^3} \right) - \frac{c}{4a} \right]^{1/(2n)}. \quad (15)$$

В случае, когда $b = 0$, получим уединенные волновые решения в виде оптических солитонов

$$y(z) = \left[\frac{c}{a} (\tanh^2(n\sqrt{c}(z - z_0)) - 1) \right]^{1/(2n)}. \quad (16)$$

Можно переписать уравнение (16) в следующем виде

$$y(z) = \left[\frac{64n^4 c^2 \exp(2n\sqrt{c}(z - z_1))}{(\exp(2n\sqrt{c}(z - z_1)) - 16n^4 ac)^2} \right]^{1/(2n)}, \quad (17)$$

где z_1 — также произвольная константа.

Выражение (17) также описывает уединенные волны.

Важно отметить, что общее решение уравнения (15) является точным решением уравнения (4) при выполнении условий (5), (6).

На рис. 1 представлены периодические волновые решения $y(z)$ уравнения (8) при следующих значениях параметров: $a = 6.0$, $b = 4.0$, $c = -5.0$, $z_0 = 4.0$. На рис. 1(а) приведены решения при $n = 0.5$, на рис. 1 (б) — при $n = 0.05$.

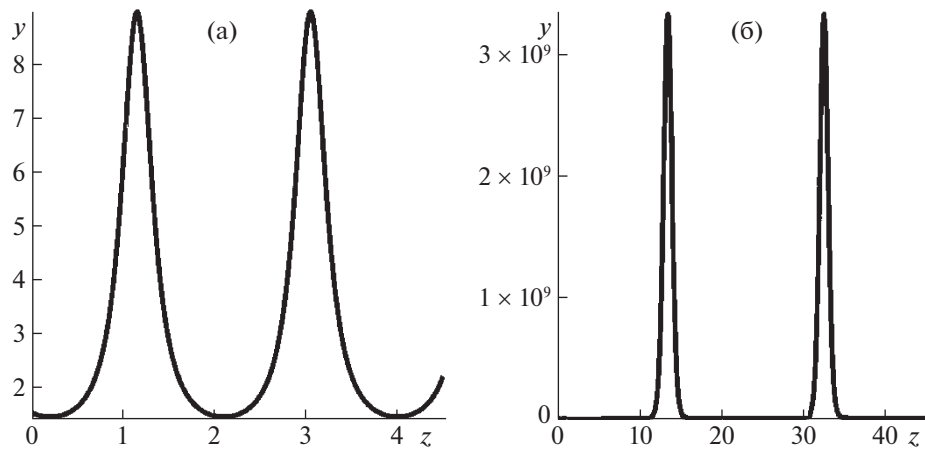


Рис. 1. Периодические волновые решения (15) уравнения (4) при $a = 6.0$, $b = 4.0$, $c = -5.0$, $z_0 = 4.0$, $g_2 = 7.0$, $g_3 = -3.0$: а) при $n = 0.5$; б) при $n = 0.05$.

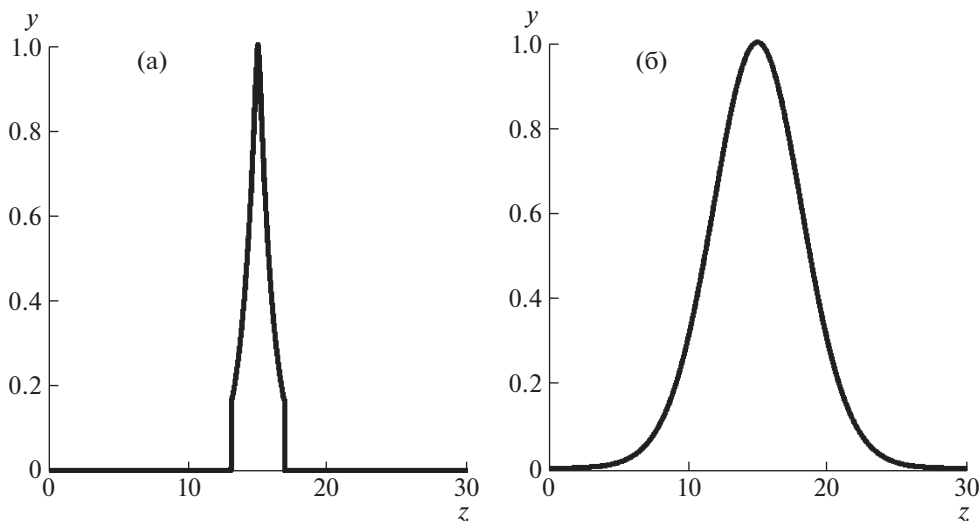


Рис. 2. Солитонные решения (16) уравнения (4) при $a = -1.0$, $b = 0.0$, $c = 1.0$, $z_0 = 15.0$: а) при $n = 10.0$; б) при $n = 0.1$.

На рис. 2 представлены одиночные волны при $a = -1.0$, $b = 0.0$, $c = 1.0$, $z_0 = 15.0$ при различных значениях показателя нелинейности n .

Из рис. 2 видно, что показатель нелинейности оказывает существенное влияние на форму импульса, распространяющегося в оптическом волокне. Таким образом, варьируя значение показателя n , можно контролировать форму и длину волны импульса распространения.

3. ВЫВОДЫ

В статье представлено решение дифференциального уравнения второго порядка в частных

производных (1), которое используется в качестве математической модели для описания импульса распространения в оптическом волокне. Характерной особенностью исследуемого дифференциального уравнения является то, что оно имеет выражения с произвольной степенью нелинейности. Задача Коши для рассматриваемого уравнения не может быть решена с помощью обратного преобразования рассеяния. Поэтому, для построения точных решений уравнения используются переменные бегущей волны. Для нахождения точных решений был осуществлен ряд замен, в ходе которых было получено обыкновенное дифференциальное уравнение (8). Общее

решение уравнения (8) выражается через эллиптическую функцию Вейерштрасса.

В работе продемонстрированы примеры точных решений в виде периодических и уединенных волн. Установлено, что показатель нелинейности оказывает значительное влияние на форму импульса, распространяющегося в оптическом волокне.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект государственного задания № 0723-2020-0036).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kudryashov N.A. Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber // *Optik*, 2019. V. 194. 163060.
2. Biswas A., Vega-Guzman J., Mahmood M.F., Khan S., Ekici M., Zhou Q., Moshokoa S.P., Belik M.R. Solitons in optical fiber Bragg gratings with dispersive reflectivity // *Optik* 2019. V. 182. P. 119–123.
3. Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., Belik M.R. Solitons in optical fiber Bragg gratings with dispersive reflectivity by extended trial function method // *Optik*, 2019. V. 182. P. 88–94.
4. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations. Boca Ration-New York, Chapman and Hall/CRC Press, 2003. 814 p.
5. Kudryashov N.A. Traveling wave reduction for the modified KdV hierarchy: Lax pair and first integrals. // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulat*, 2019. V. 73. P. 472–480.
6. Kudryashov N.A. General solution of the traveling wave reduction for the Kundu-Mukherjee-Naskar model // *Optik*, 2019. V. 186. P. 22–27.
7. Kudryashov N.A. General solution of the traveling wave reduction for the Chen-Lee-Liu equation // *Optik*, 2019. V. 186. P. 339–349.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2021, vol. 10, no. 5, pp. 407–411

Exact Solutions of One of the Nonlinear Differential Equations in Nonlinear Optics

N. V. Ermolaeva^{a,b,#} and N. A. Kudryashov^{a,##}

^a National Research Nuclear University MEPHI (Moscow Engineering Physics Institute),
Moscow, 115409 Russia

^b Volgodonsk Engineering Technical Institute, National Research Nuclear University MEPHI
(Moscow Engineering Physics Institute),
Volgodonsk, Rostovskaya oblast, 347360 Russia

[#]e-mail: NVErmolayeva@mephi.ru

^{##}e-mail: nakudr@gmail.com

Received December 15, 2021; revised December 16, 2021; accepted December 21, 2021

Abstract—One of the nonlinear partial differential equations used to describe the propagation of pulses in nonlinear optics is considered. The Cauchy problem for this equation cannot be solved by the method of the inverse scattering problem; for this reason, traveling wave variables are used to find the exact solution of the nonlinear second-order partial differential equation. It is proved that the considered equation has exact solutions in the form of periodic and solitary waves, which are determined using elliptic functions. The values of the parameters for the existence of exact solutions of this equation are given. Exact solutions of differential equations are expressed in terms of the Weierstrass elliptic function. A formula for describing solitary waves is also given. Exact solutions in the form of periodic and solitary waves are illustrated. It is shown that the nonlinearity index has a significant effect on the shape of a pulse propagating in an optical fiber.

Keywords: nonlinear differential equation, traveling wave, Weierstrass elliptic function, optical fiber, pulse propagation

DOI: 10.1134/S2304487X21050047

REFERENCES

1. Kudryashov N.A., Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber, *Optik*, 2019, vol. 194, 163060.
2. Biswas A., Vega-Guzman J., Mahmood M.F., Khan S., Ekici M., Zhou Q., Moshokoa S.P., Belik M.R., Solitons in optical fiber Bragg gratings with dispersive reflectivity, *Optik*, 2019, vol. 182, pp. 119–123.
3. Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., Belik M.R., Solitons in optical fiber Bragg gratings with dispersive reflectivity by extended trial function method, *Optik*, 2019, vol. 182, pp. 88–94.
4. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, Boca Ration-New York, Chapman and Hall/CRC Press, 2003, 814 p.
5. Kudryashov N.A., Traveling wave reduction for the modified KdV hierarchy: Lax pair and first integrals, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulat*, 2019, vol. 73, pp. 472–480.
6. Kudryashov N.A., General solution of the traveling wave reduction for the Kundu-Mukherjee-Naskar model, *Optik*, 2019, vol. 186, pp. 22–27.
7. Kudryashov N.A., General solution of the traveling wave reduction for the Chen-Lee-Liu equation, *Optik*, 2019, vol. 186, pp. 339–349.