

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ОТРАЖЕНИЯ

© 2021 г. К. В. Кан^{1,*}, Н. А. Кудряшов^{1,**}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, 115409, Россия

*e-mail: kan_13@mail.ru

**e-mail: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию 06.12.2021 г.

После доработки 08.12.2021 г.

Принята к публикации 21.12.2021 г.

Изучается распространение уединенных волн, описываемых обобщенным нелинейным уравнением Шредингера с произвольным коэффициентом отражения. Задача Коши для рассматриваемого уравнения не решается, поэтому для поиска аналитического решения используются переменные бегущей волны, с помощью которых уравнение в частных производных приводится к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. С помощью метода простейших уравнений найдено решение полученной системы дифференциальных уравнений в форме уединенных волн. Численное решение построено при учете дискретизации задачи по времени с использованием метода расщепления по физическим параметрам и по пространственной переменной – конечными разностями. Полученное аналитическое решение используется для верификации численного решения задачи о распространении уединенной волны, описываемой обобщенным нелинейным уравнением Шредингера, при периодических граничных условиях. С учетом ограничений на параметры математической модели построены и проанализированы графики аналитического и численного решений.

Ключевые слова: уединенные волны, нелинейное уравнение Шредингера, конечно-разностный метод

DOI: 10.1134/S2304487X21050072

ВВЕДЕНИЕ

Проблема построения точных решений нелинейных математических моделей до настоящего времени остается достаточно актуальной. Это обусловлено тем, что математические модели, в которых используются нелинейные дифференциальные уравнения, описывают целый ряд физических процессов. Одной из важных задач является исследование распространения импульсов в различных оптических устройствах, для описания которого в том числе используется общеизвестное нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) [1]. В частности, в работах [2–6] авторами исследуются оптические солитоны, описываемые НУШ. В работах [7–9] изучается процесс распространения волн на Брэгговской решетке, которая используется в волоконных световодах [10]. В [11] авторы представили конечно-разностный метод для получения численного решения НУШ со степенной нелинейностью. Авторы работы [12] реализовали параллельный алгоритм для нахождения

численного решения системы НУШ с нелинейностями третьей степени.

В данной работе рассматривается обобщенное нелинейное уравнение Шредингера в виде [13]:

$$iu_t + \alpha u_{xx} + (a|u|^n + b|u|^{2n})u = 0, \quad (1)$$

где i – мнимая единица; α , a , b – действительные числа; n – коэффициент отражения.

Дифференциальное уравнение (1) является неинтегрируемым, поэтому существует возможность найти только некоторые классы решений. В первой части работы показано применение обобщенного метода простейших уравнений для нахождения точных решений изучаемого дифференциального уравнения в форме уединенных волн. Во второй части представлена численная реализация математической модели, проведен сравнительный анализ точного решения с численным и изложено обсуждение полученных результатов.

1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (1)

Задача Коши для уравнения (1) не может быть решена методом обратной задачи рассеяния, поэтому для поиска решений делаем переход к переменным бегущей волны:

$$u(x, t) = y(z) \cdot e^{i(kx - \omega t)}, \quad z = x - C_0 t. \quad (2)$$

Подставляя (2) в уравнение (1), получаем систему дифференциальных уравнений, соответствующих действительной и мнимой частям соответственно:

$$\begin{aligned} \alpha y_{zz} + (\omega - \alpha k^2) y + a y^{n+1} + b y^{2n+1} &= 0, \\ (2\alpha k - C_0) y_z &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Полагая коэффициент монома во втором уравнении полученной системы равным нулю, получаем, что

$$C_0 = 2\alpha k. \quad (4)$$

В соответствии с методом, предложенным в [15], решение первого дифференциального уравнения системы (3) ищем в виде $y(z) = F_0 + F_1 R(z)$, где без потери общности полагаем $F_0 = 0$, F_1 является произвольной постоянной, а $R(z)$ – решение дифференциального уравнения

$$R_z^2 = ER^2 - AR^{n+2} + BR^{2n+2} \quad (5)$$

и имеет вид:

$$R(z) = \left[\frac{4Ee^{(z-z_0)n\sqrt{E}}}{2AEe^{(z-z_0)n\sqrt{E}} + (A^2 + 4BE)e^{2(z-z_0)n\sqrt{E}} + 1} \right]^{1/n}. \quad (6)$$

Подставляя (5) в первое дифференциальное уравнение системы (3), получаем

$$\begin{aligned} (2bF_1^{2n+1} - 2\alpha BF_1(n+1))R^{2n} + \\ + (2aF_1^{n+1} - \alpha AF_1(n+2))R^n + \\ + 2F_1(\alpha(E - k^2) + \omega) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Приравнявая коэффициенты мономов в уравнении (7), определяем ограничения на следующие параметры математической модели:

$$\begin{aligned} b &= \alpha B(n+1)F_1^{-2n}, \\ a &= \frac{1}{2}\alpha A(n+2)F_1^{-n}, \\ \omega &= \alpha(k^2 - E). \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, с учетом (4) и (8) точное решение дифференциального уравнения (1) можно записать в виде:

$$u(x, t) = F_1 \left[\frac{4Ee^{(x-2\alpha kt - z_0)n\sqrt{E}}}{2AEe^{(x-2\alpha kt - z_0)n\sqrt{E}} + (A^2 + 4BE)e^{2(x-2\alpha kt - z_0)n\sqrt{E}} + 1} \right]^{1/n} e^{i(kx - \alpha(k^2 - E)t)}. \quad (9)$$

2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ, ОПИСЫВАЕМОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ (1)

Представим уравнение (1) в виде:

$$u_t = i(\mathcal{L} + \mathcal{N}(u))u, \quad (10)$$

где

$$\mathcal{L} = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \mathcal{N}(u) = a|u|^n + b|u|^{2n}.$$

Для численного решения задач, описываемых уравнением (10), воспользуемся алгоритмом из работы [14].

Решение дифференциального уравнения (10), позволяющего определить значения искомой функции $u(x, t)$ на каждом последующем временном шаге при известном предшествующем, аппроксимируется следующим образом:

$$u(x, t + \tau) \approx e^{i\tau(\mathcal{L} + \mathcal{N}(u))} \cdot u(x, t), \quad (11)$$

где τ – шаг по времени.

Для дискретизации задачи по пространственной переменной в работе используется конечно-разностный метод. Выбирается расчетная область $x \in [-L/2, L/2]$, которая разбивается на N равных частей с шагом $h = L/N$. Таким образом, получаются узлы разностной сетки x_i , $i = \overline{0, N}$. При этом соотношение (11) может быть записано в виде:

$$U^{m+1} = (\mathcal{F} - \theta i \tau \mathcal{L}_h)^{-1} (\mathcal{F} + i r (1 - \theta)) V^m, \quad (12)$$

где $0 \leq \theta \leq 1$, $r = \tau/h^2$, \mathcal{L} – единичный оператор,

$$\mathcal{L}_h = \alpha \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2}.$$

Поскольку в работе рассматриваются периодические граничные условия, то они записываются для разностной задачи в виде:

$$U_0 = U_N, \quad U_1 = U_{N-1}$$

Таким образом, конечная расчетная формула имеет вид:

$$U^{m+1} = (I - ir\theta S)^{-1}(I + ir(1 - \theta))V^m, \quad (13)$$

где I – единичная матрица, U^{m+1} – вектор значений функции $u(x, t)$ на $(m + 1)$ -м временном слое,

$$V_i^m = e^{i\tau(a|u_i^m + b|u_i^{2m})} \cdot U_i^m, \quad U_i^m = u(x_i, t_m),$$

$$S = \begin{pmatrix} -2\alpha & \alpha & \dots & 1 \\ \alpha & -2\alpha & \alpha & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & \dots & \alpha & -2\alpha & \alpha \\ 1 & \dots & & \alpha & -2\alpha \end{pmatrix},$$

где показаны только ненулевые элементы матрицы.

В качестве начальных данных для поиска численного решения были взяты значения (9) при $t = 0$. Представленный выше алгоритм реализован в виде программного кода для решения задачи распространения импульса в оптической среде, описываемой уравнением (1), при периодических граничных условиях.

Ниже представлены таблицы, в которых показана погрешность проведенных численных вычислений.

В таблицах N – количество разбиений расчетной области, а в третьем и четвертом столбцах записан максимальный модуль разности численного и точного решений при $n = 1, 2$ соответственно.

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод о том, что выбранный метод для численного решения задачи позволяет получить вполне удовлетворительную погрешность при описании распространения импульса в оптиче-

Таблица 1. Погрешность численного решения в зависимости от количества разбиений расчетной области на двухсотом временном слое

	N	$n = 1$	$n = 2$
1	1000	0.009353	0.085114
2	1500	0.008507	0.077832
3	2000	0.008217	0.075413
4	2500	0.008083	0.074318

Таблица 2. Погрешность численного решения в зависимости от количества разбиений расчетной области на пятисотом временном слое

	N	$n = 1$	$n = 2$
1	1000	0.012085	0.109377
2	1500	0.009702	0.088211
3	2000	0.008942	0.081630
4	2500	0.008600	0.078734

ской среде. Из данных, приведенных в таблицах, видно, что погрешность вычислений уменьшается при увеличении числа разбиений расчетной области, что обуславливает сходимость метода. Графики на рис. 1 (а), (б) позволяют заметить, что на правой границе присутствует некоторое расхождение точного решения с численным. Данное явление объясняется тем, что размер расчетной области ($x \in [-L/2, L/2]$, $L = 10$) выбран так, что импульс располагается достаточно близко к границам расчетной области. Это можно исправить путем увеличения размеров расчетной области и

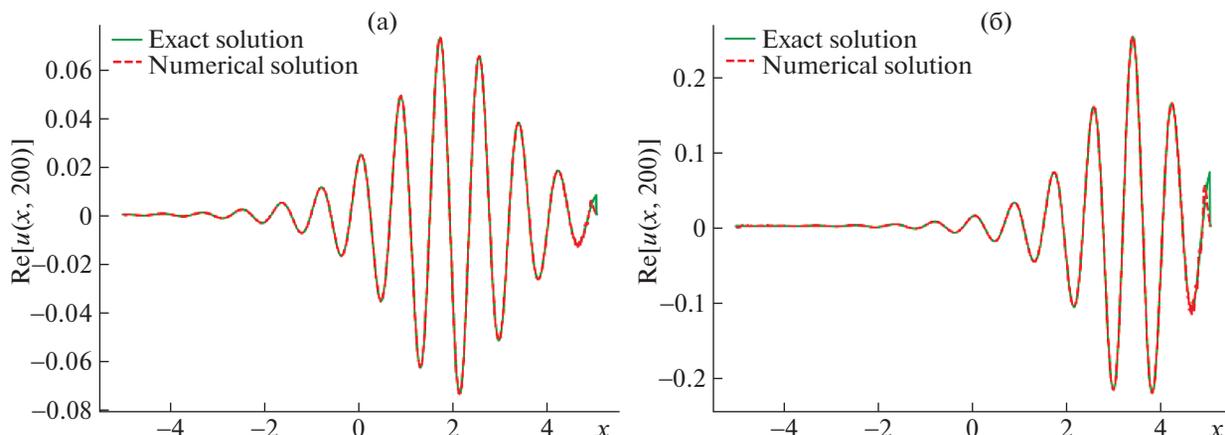


Рис. 1. Графики действительных частей точного решения (9) и численного решения при $\alpha = 1.0$, $z_0 = 5.0$, $B = 2.4$, $A = 5.0$, $E = 1.0$, $k = 7.5$, $L = 10$, $N = 2500$, $F_1 = 1.0$; (а) $n = 1$, (б) $n = 2$.

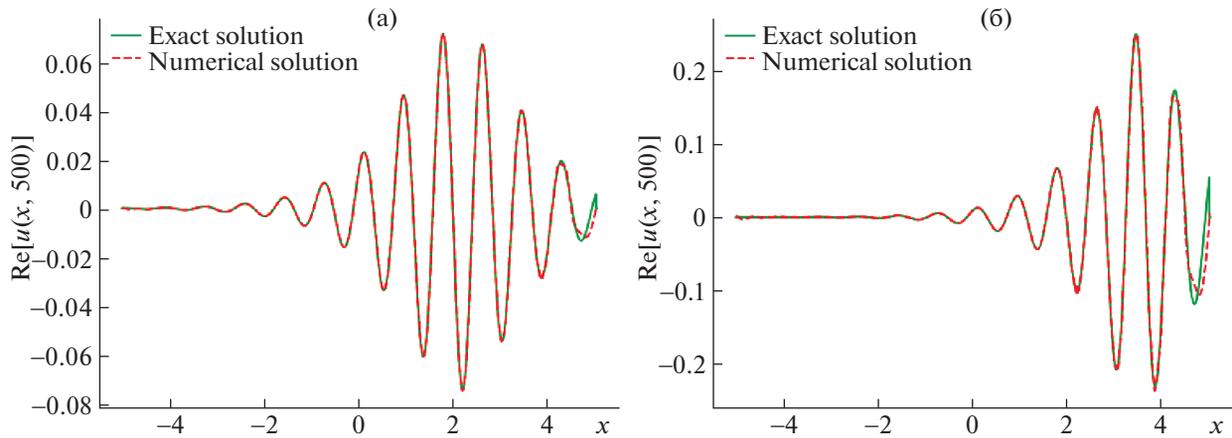


Рис. 2. Графики действительных частей точного решения (9) и численного решения при $\alpha = 1.0$, $z_0 = 5.0$, $B = 2.4$, $A = 5.0$, $E = 1.0$, $k = 7.5$, $L = 10$, $N = 1500$, $F_1 = 1.0$; (a) $n = 1$, (б) $n = 2$.

задания начальных условий таким образом, чтобы импульс был расположен на значительном отдалении от границ расчетной области.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрено обобщенное нелинейное уравнение Шредингера с произвольным коэффициентом отражения n . Найдено точное решение дифференциального уравнения (1) с применением обобщенного метода простейших уравнений. С использованием метода расщепления по физическим параметрам для дискретизации по времени и конечных разностей – для дискретизации по пространству, – получено численное решение задачи, описываемой дифференциальным уравнением (1), при периодических граничных условиях. Численное решение верифицировано с помощью точного решения с учетом найденных ограничений на некоторые параметры математической модели. Построены и проанализированы графики полученных решений. На основе проведенных вычислений составлены таблицы, в которых показана зависимость погрешности численного решения от количества разбиений расчетной области для $n = 1, 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агравал Г. Нелинейная волоконная оптика. Москва: Мир, 1996, 323 с.
2. Biswas A., Ullah M., Zhou Qin, Moshokoa S., Triki H., Belic M. Resonant optical solitons with quadratic-cubic nonlinearity by semi-inverse variational principle // *Optik*. 2017. V. 145. P. 18–21.
3. Ekici M., Zhou Qin, Sonmezoglu A., Moshokoa S., Ullah M., Bismas A., Belic M. Solitons in magneto-optic

waveguides by extended trial function scheme // *Superlattices and Microstructures*. 2017. V.107. P. 197–218.

4. Biswas A. et al. Resonant 1-soliton solution in anti-cubic nonlinear medium with perturbations // *Optik*. 2017. V. 145. P. 14–17.
5. Biswas A. et al. Conservation laws for cubic–quartic optical solitons in Kerr and power law media // *Optik*. 2017. V. 145. P. 650–654.
6. Kudryashov N.A. Optical solitons of mathematical model with arbitrary refractive index // *Optik*. 2020, V. 224. P. 165391.
7. Zayed, Elsayed M.E. et al. Optical solitons in fiber Bragg gratings having Kerr law of refractive index with extended Kudryashov’s method and new extended auxiliary equation approach // *Chinese Journal of Physics*. 2020. V. 66. P. 187–205.
8. Кан К.В., Кудряшов Н.А. Высокодисперсные солитоны, описываемый системой, нелинейных дифференциальных уравнений с учетом Бреговской решетки // *Вестник НИЯУ МИФИ*. 2020. Т. 9. № 3. С. 210–216.
9. Кан К.В., Кудряшов Н.А. Solitary waves described by a high-order system in optical fiber Bragg gratings with arbitrary refractive index // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2021.
10. Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов / Пер. с англ. под ред. Н.Н. Розанова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 648 с. ISBN 5-9221-0584-1.
11. Delfour M., Fortin M., Payr G. Finite-difference solutions of a non-linear Schrödinger equation // *Journal of computational physics*. 1981. V. 44.2. P. 277–288.
12. Taha Thiab R., Xu X. Parallel split-step fourier methods for the coupled nonlinear Schrödinger type equations // *The Journal of Supercomputing*. 2005. V. 32.1. P. 5–23.

13. Kudryashov N.A., Lavrova S.F. Dynamical properties of the generalized model for description of propagation pulses in optical fiber with arbitrary refractive index // *Optik*. 2021. V. 245. 167679.
14. Weideman J.A.C., Herbst B.M. Split-step methods for the solution of the nonlinear Schrödinger equation // *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1986. V. 23.3. P. 485–507.
15. Kudryashov N.A. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2005. V. 24.5. P. 1217–1231.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2021, vol. 10, no. 5, pp. 412–417

Analytical and Numerical Solution of the Generalized Nonlinear Schrödinger Equation with an Arbitrary Refractive Index

K. V. Kan^{a,#} and N. A. Kudryashov^{a,##}

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: kan_13@mail.ru

^{##}e-mail: nakudr@gmail.com

Received December 6, 2021; revised December 8, 2021; accepted December 21, 2021

Abstract—The propagation of solitary waves described by the generalized nonlinear Schrödinger equation with an arbitrary refractive index is investigated. The Cauchy problem for the considered equation cannot be solved; for this reason, traveling wave variables are used to find an analytical solution. These variables reduce the partial differential equation to a system of nonlinear ordinary differential equations. A solution of the resulting system of differential equations in the form of solitary waves is found using the simplest equation method. The numerical solution is constructed taking into account the discretization of the problem in time variable using a split-step method and by means of a finite difference in the space variable. The found analytical solution is used to verify the numerical solution of the solitary wave propagation problem described by the generalized nonlinear Schrödinger equation with periodic boundary conditions. Analytical and numerical solutions are plotted and these plots are analyzed taking into consideration the constraints on the parameters of the mathematical model.

Keywords: solitary waves, Schrödinger equation, finite difference method

DOI: 10.1134/S2304487X21050072

REFERENCES

1. Agraval G., *Nelinejnaya volokonnaya optika* [Nonlinear fiber optics], Moscow, Mir Publ., 1996, 323 p.
2. Biswas A., Ullah M., Zhou Qin, Moshokoa S., Triki H., Belic M., Resonant optical solitons with quadratic-cubic nonlinearity by semi-inverse variational principle, *Optik*, 2017, vol. 145, pp. 18–21.
3. Ekici M., Zhou Qin, Sonmezoglu A., Moshokoa S., Ullah M., Biswas A., Belic M., Solitons in magneto-optic waveguides by extended trial function scheme, *Superlattices and Microstructures*, 2017, vol. 107, pp. 197–218.
4. Biswas A. et al., Resonant 1-soliton solution in anti-cubic nonlinear medium with perturbations, *Optik*, 2017, vol. 145, pp. 14–17.
5. Biswas A. et al., Conservation laws for cubic–quartic optical solitons in Kerr and power law media, *Optik*, 2017, vol. 145, pp. 650–654.
6. Kudryashov N.A., Optical solitons of mathematical model with arbitrary refractive index, *Optik*, 2020, vol. 224. pp. 165391.
7. Zayed, Elsayed M.E. et al., Optical solitons in fiber Bragg gratings having Kerr law of refractive index with extended Kudryashov's method and new extended auxiliary equation approach, *Chinese Journal of Physics*, 2020, vol. 66, pp. 187–205.
8. Kan K.V., Kudryashov N.A., *Vysokodispersnye solitony, opisyyaemye sistemoy nelinejnyh differencial'nyh uravnenij s uchetom Breggovskoj reshetki* [Highly dispersed solitons described by a system of nonlinear differential equations taking into account the Bregg lattice], *Vestnik NIYaU MIFI*, 2020, vol. 9, no. 3, pp. 210–216.
9. Kan K.B., Kudryashov N.A., Solitary waves described by a high-order system in optical fiber Bragg gratings with arbitrary refractive index, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2021.

10. Kivshar' Yu.S., Agraval G.P., *Opticheskie solitony. Ot volokonnyh svetovodov do fotonnyh kristallov* / Per. s angl. pod red. N.N. Rozanova [Optical solitons. From fiber light guides to photonic crystals], Moscow, FIZMATLIT Publ., 2005, 648 p. ISBN 5-9221-0584-1.
11. Delfour M., Fortin M., Payr G., Finite-difference solutions of a non-linear Schrödinger equation, *Journal of computational physics*, 1981, vol. 44.2, pp. 277–288.
12. Taha Thiab R., Xu X., Parallel split-step fourier methods for the coupled nonlinear Schrödinger type equations, *The Journal of Supercomputing*, 2005, vol. 32.1, pp. 5–23.
13. Kudryashov N.A., Lavrova S.F., Dynamical properties of the generalized model for description of propagation pulses in optical fiber with arbitrary refractive index, *Optik*, 2021, vol. 245, 167679.
14. Weideman J.A.C., Herbst B.M., Split-step methods for the solution of the nonlinear Schrödinger equation, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1986, vol. 23.3, pp. 485–507.
15. Kudryashov N.A., Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, vol. 24.5, pp. 1217–1231.