

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 533.95+517.958

О РЕДУКЦИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ К СИСТЕМАМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2021 г. О. Н. Ульянов^{1,*}, Л. И. Рубина^{1,**}

¹ Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, 620108, Россия

*e-mail: secretary@imm.uran.ru

**e-mail: rli@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 26.12.2021 г.

После доработки 27.12.2021 г.

Принята к публикации 28.12.2021 г.

Рассматривается система уравнений Максвелла в приближении Дарвина. В основе исследования системы лежит редукция систем уравнений с частными производными (линейных и нелинейных) к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (системам ОДУ). В качестве независимой переменной в системах ОДУ выбирается переменная ψ , где $\psi(x, y, z, t) = \text{const}$ — поверхность уровня некоторых функций. Редукция основана на построении расширенной системы уравнений характеристик (базовой системы) для уравнения в частных производных первого порядка (базового уравнения), которому удовлетворяет поверхность уровня выбранных функций. К базовой системе присоединяются в качестве первых интегралов все необходимые соотношения для получения системы ОДУ рассматриваемой системы уравнений в частных производных. Для поиска поверхностей уровня решений рассматриваемой системы уравнений применяются как ранее описанные в ряде статей авторов подходы, так и предложенные вновь варианты развиваемого авторами метода. Выписаны три системы ОДУ с разными независимыми переменными (различными функциями $\psi(x, y, z, t)$). Показано, что получение поверхности уровня в каждом из рассматриваемых подходов имеет функциональный произвол. Получены некоторые точные решения рассматриваемой системы уравнений в частных производных. В качестве примера для одной из систем ОДУ, множество решений которой зависит от выбора произвольной функции $g(\psi)$ в базовом уравнении $\psi_t = g(\psi)$, выписано решение для случая, когда $g(\psi) = \psi$. Приведено решение задачи определения безвихревого электромагнитного поля по заданному распределению зарядов.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений с частными производными, системы ОДУ, уравнения Максвелла, приближение Дарвина, точные решения

DOI: 10.1134/S2304487X21050102

ВВЕДЕНИЕ

Полученная в 60-х годах XIX века система уравнений Максвелла — фундамент классической макроскопической электродинамики [1] вызвала и вызывает до наших дней огромный интерес у многочисленных исследователей (см., например, [2, 3]) и в различных областях физики — кроме электродинамики это и нелинейная оптика (см., например, [4]), и магнитная газодинамика (см., например, [5]), огромный пласт работ, связанных с термоядерным синтезом (см., например [6]). Математические модели, включающие уравнения Максвелла, и применяемые для их решения подходы многообразны (см., например, [7, 8]). В статье рассматривается система уравнений

Максвелла в приближении Дарвина [9], которая также широко исследуется (см., например, [10]).

Редукция этой системы уравнений к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (системам ОДУ) в данной работе основана на использовании некоторых способов сведения систем уравнений в частных производных к системам ОДУ, применявшихся авторами ранее [11], и на новых подходах, описанных ниже. Выбранная для иллюстрации предложенных ниже новых подходов система уравнений, включающая уравнения Максвелла, показывает то новое (кроме известной бегущей волны), что можно получить, применяя предложенные ниже подходы и их комбинации (даже для линейной исходной системы уравнений в частных производных).

1. О НЕКОТОРЫХ СПОСОБАХ СВЕДЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ К СИСТЕМАМ ОДУ

Опишем сначала некоторые общие подходы.

Рассматривается в общем случае система k нелинейных уравнений в частных производных для p неизвестных функций $v_1, v_2, \dots, v_p$ от n независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Принято говорить, что если $p < k$, то система — переопределенная, если $p > k$, то система — недоопределенная, если $p = k$, то система — определенная [12].

Переход от исходной системы уравнений в частных производных к системе ОДУ основан на предположении, что решения исходной системы зависят от одной переменной (например, полагаем, что все функции $v_\mu = v_\mu(\psi)$, где $\psi = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const}$ — поверхность уровня функций v_μ , ($\mu = 1, 2, \dots, p$)). Вычислив производные сложных функций $v_\mu = v_\mu(\psi(x_1, x_2, \dots, x_n))$ и подставив их в исходную систему, получим соотношения

$$\sum_{s=1}^S A_{s,j} B_{s,j}(x_i, \psi_i, \psi_{il}, \dots, \psi_{i i_2 \dots i_{m_j}}) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, k). \quad (1.1)$$

Здесь нижние индексы у функции ψ указывают на номер независимой переменной, по которой вычисляется производная от функции ψ ; $S \neq \infty$; $i = 1, 2, \dots, n$; $l = 1, 2, \dots, n$; $B_{s_1,j} \neq B_{s_2,j}$, если $s_1 \neq s_2$. Сомножители $A_{s,j}$ в общем случае содержат функции v_μ , ($\mu = 1, 2, \dots, p$) и производные этих функций по переменной ψ соответствующих порядков.

Соотношения (1.1) можно переписать в виде системы

$$\sum_{s=1}^S A_{s,j} g_{s,j}(\psi) = 0, \quad B_{s,j}(x_i, \psi_i, \psi_{il}, \dots, \psi_{i i_2 \dots i_{m_j}}) = g_{s,j}(\psi), \quad (1.2)$$

где $g_{s,j}(\psi)$ — пока произвольные функции.

Пусть среди уравнений $B_{s,j}(x_i, \psi_i, \psi_{il}, \dots, \psi_{i i_2 \dots i_{m_j}}) = g_{s,j}$ есть уравнение, в которое входят только независимые переменные и первые производные функции ψ . Не умаляя общности можно считать, что это уравнение $B_{1,1}(x_i, \psi_i) = g_{1,1}$. Для него выпишем систему уравнений характеристик [13]. Это уравнение назовем базовым. К полученной системе уравнений характеристик добавляем уравнения, описывающие изменение вдоль характеристик необходимых производных функции ψ порядка выше первого. Таким образом получаем расширенную систему уравнений характеристик (базовую систему). Далее требуем, чтобы все оставшиеся уравнения системы (1.2)

были первыми интегралами выписанной базовой системы уравнений характеристик. Таким образом приходим к системе ОДУ для исходной системы уравнений в частных производных.

Если среди уравнений $B_{s,j}(x_i, \psi_i, \psi_{il}, \dots, \psi_{i i_2 \dots i_{m_j}}) = g_{s,j}$ есть несколько уравнений, которые содержат только независимые переменные и первые производные функции ψ , то каждое из таких уравнений можно считать базовым и, опираясь на него, получать соответствующую систему ОДУ для исходной системы уравнений в частных производных.

При решении полученных систем ОДУ одна функция остается произвольной, поэтому эту функцию (например, $g_{1,1}$) считаем постоянной, либо используем ее для решения.

Этот порядок действий применялся ранее (см., например, [11]), назовем его первым подходом для получения системы ОДУ. Иногда кроме описанного выше порядка действий можно реализовать другие подходы, несколько модифицировав этот подход.

В рассматриваемой исходной системе уравнений могут присутствовать векторные величины, описывающие, например, безвихревые векторные поля. Тогда можно предположить, что потенциалы векторных полей зависят от функции, задающей их поверхность уровня (второй подход, его условно можно назвать “физическим” подходом). При этом система ОДУ выписывается аналогично после выбора базового уравнения в частных производных первого порядка и построения расширенной системы уравнений характеристик базового уравнения с присоединением к ней в качестве первых интегралов некоторых выражений.

Заметим, что в ряде случаев можно считать, что некоторые функции, входящие в систему, являются производными (например, производными по времени) от некоторых вновь вводимых в рассмотрение функций и эти новые функции зависят от одной переменной, которая является функцией, задающей их поверхность уровня. При этом предположении строится редукция к системе ОДУ и только после решения системы ОДУ происходит возвращение к решениям исходной системы (третий подход, его условно можно назвать “математическим”).

Иногда для получения системы ОДУ можно комбинировать все три подхода, считая в исходной системе часть функций, в том числе векторных, зависящими от одной переменной (первый подход), для других векторных величин использовать второй подход, а для некоторых скалярных функций (тоже, может быть, не всех) использовать третий подход.

Описанные выше алгоритмы сведения систем уравнений в частных производных к системам

ОДУ применяются, если на решения системы не наложены дополнительные условия. Если для рассматриваемой системы уравнений заданы начальные, краевые или иные условия, работают несколько другие алгоритмы, которые в данной статье не рассматриваются.

2. ПРИМЕНЕНИЕ ОПИСАННЫХ ВЫШЕ ПОДХОДОВ К СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ, ВКЛЮЧАЮЩЕЙ УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Рассматривается система уравнений Максвелла в приближении Дарвина [9] в классе достаточно гладких функций

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E}_p &= \rho/\epsilon_0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_v = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_p(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E}_v(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Для удобства дальнейшего рассмотрения присоединим к системе (2.1) уравнение непрерывности заряда, которое является следствием системы уравнений (2.1)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (2.2)$$

Здесь $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ – пространственные координаты, t – время, $\mathbf{B} = \{B_1, B_2, B_3\}$ – индукция магнитного поля, ϵ_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная постоянные ($\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$), $\mathbf{E}_p(\mathbf{x}, t) = \{E_{p1}, E_{p2}, E_{p3}\}$ – потенциальная составляющая напряженности электрического поля, $\mathbf{E}_v(\mathbf{x}, t) = \{E_{v1}, E_{v2}, E_{v3}\}$ – соленоидальная составляющая напряженности электрического поля, $\mathbf{J} = \{J_1, J_2, J_3\}$ – заряд, ρ – плотность заряда. Далее используются также обозначения $\mathbf{E}_p = \mathbf{U} = \{U_1, U_2, U_3\}$, $\mathbf{E}_v = \mathbf{V} = \{V_1, V_2, V_3\}$.

В первой части раздела 2 система уравнений (2.1)–(2.2) сводится к системе ОДУ в рамках первого подхода, уже применявшегося ранее [11]. Во второй части раздела 2 при сведении системы (2.1)–(2.2) к системам ОДУ используются комбинации трех подходов, что позволяет увидеть шире возможности динамики, заложенной в данной математической модели (даже на примере линейной системы). В разделе 3 второй подход использован для решения одной задачи определения безвихревого электромагнитного поля по заданному распределению зарядов.

2.1. Первый подход

Если считать, что все искомые функции в системе уравнений (2.1)–(2.2) зависят от одной переменной ψ : $B_i = B_i(\psi)$, $U_i = U_i(\psi)$, $V_i = V_i(\psi)$, в том числе $\rho = \rho(\psi)$, $J_i = J_i(\psi)$, ($i = 1, 2, 3$), то

$\psi(t, \mathbf{x}) = \text{const}$ задает поверхность уровня всех перечисленных функций. Вычислив производные сложных функций $B_i = B_i(\psi(t, \mathbf{x}))$, $U_i = U_i(\psi(t, \mathbf{x}))$, $V_i = V_i(\psi(t, \mathbf{x}))$, $\rho = \rho(\psi(t, \mathbf{x}))$, $J_i = J_i(\psi(t, \mathbf{x}))$, ($i = 1, 2, 3$), и, подставив эти выражения в систему (2.1)–(2.2), получим:

$$\begin{aligned} \rho' \psi_t + J_1' \psi_1 + J_2' \psi_2 + J_3' \psi_3 &= 0, \\ U_1' \psi_1 + U_2' \psi_2 + U_3' \psi_3 &= \rho/\epsilon_0, \\ B_1' \psi_1 + \psi_2 B_2' + \psi_3 B_3' &= 0, \quad V_1' \psi_1 + \psi_2 V_2' + \psi_3 V_3' = 0, \\ U_2' \psi_1 = \psi_2 U_1', \quad U_3' \psi_1 = \psi_3 U_1', \quad U_3' \psi_2 &= U_2' \psi_3, \\ B_1' \psi_t + V_2' \psi_2 - V_2' \psi_3 &= 0, \\ B_2' \psi_t + V_2' \psi_3 - V_3' \psi_1 &= 0, \quad B_3' \psi_t + V_2' \psi_1 - V_1' \psi_2 = 0, \\ \mu_0 \epsilon_0 \psi_t (U_1' + V_1') - (B_3' \psi_2 - B_2' \psi_3) &= -\mu_0 J_1, \\ \mu_0 \epsilon_0 \psi_t (U_2' + V_2') - (B_1' \psi_3 - B_3' \psi_1) &= -\mu_0 J_2, \\ \mu_0 \epsilon_0 \psi_t (U_3' + V_3') - (B_2' \psi_1 - B_1' \psi_2) &= -\mu_0 J_3. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по ψ , а нижние индексы у функций ψ обозначают дифференцирование по соответствующим компонентам вектора $\mathbf{x}$ или по времени.

В полученной системе, сравнивая ее с (1.1), имеем (см. раздел 1) $p = k = 13$, $A_{1,1} = \rho'$, $B_{1,1} = \psi_t' = g(\psi)$, $A_{1,i+1} = J_i'$, $B_{1,i+1} = \psi_i' = g_i(\psi)$, ($i = 1, 2, 3$), где $g(\psi)$ и $g_i(\psi)$ – пока произвольные функции.

Выбираем в качестве базового уравнения уравнение $B_{1,2} = \psi_1 = g_1$. Выписанная система четырех уравнений $\psi_t = g(\psi)$, $\psi_i = g_i(\psi)$, ($i = 1, 2, 3$) совместна (задает одну и ту же гладкую функцию $\psi = \psi(t, \mathbf{x})$), если равны смешанные производные $\psi_{t,i} = \psi_{i,t}$, $\psi_{i,j} = \psi_{j,i}$, $i \neq j$, ($j = 1, 2, 3$). Требуя равенства смешанных производных, получаем, что $g = v g_1$, $g_2 = \alpha g_1$, $g_3 = \beta g_1$, $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, $v = \text{const}$. Тогда $w = \int d\psi/g_1(\psi) = x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + vt$ (видим, что одна функция $g_1(\psi)$ остается произвольной). При $g_1(\psi) = 1$ получаем, что $\psi = x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + vt$.

Здесь независимая переменная $\psi = x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + vt$ имеет константный произвол (известная плоская бегущая волна). Конечно, решение в виде бегущей волны можно найти, разыскивая решения такого вида, простой подстановкой. Однако отметим, что описанный в разделе 1 алгоритм позволяет получать как известного вида поверхности уровня (плоская бегущая волна), так и новые. Далее, при других подходах, поверхности уровня $\psi(x_1, x_2, x_3, t) = \text{const}$ будут иметь другой вид.

В этом подходе система (2.3) редуцируется к системе ОДУ с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \rho'v + J_1' + J_2'\alpha + J_3'\beta &= 0, \\ U_1' + U_2'\alpha + U_3'\beta &= \rho/\varepsilon_0, \\ B_1' + \alpha B_2' + \beta B_3' &= 0, \quad V_1' + \alpha V_2' + \beta V_3' = 0, \\ U_2' &= \alpha U_1', \quad U_3' = \beta U_1', \\ B_1'v + V_2'\alpha - V_2'\beta &= 0, \quad B_2'v + V_1'\beta - V_2' = 0, \quad (2.4) \\ B_3'v + V_2' - V_1'\alpha &= 0, \\ \mu_0\varepsilon_0 v(U_1' + V_1') - (B_3'\alpha - B_2'\beta) &= -\mu_0 J_1, \\ \mu_0\varepsilon_0 v(U_2' + V_2') - (B_1'\beta - B_3') &= -\mu_0 J_2, \\ \mu_0\varepsilon_0 v(U_3' + V_3') - (B_2' - B_1'\alpha) &= -\mu_0 J_3. \end{aligned}$$

Решая систему (2.4), получаем

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{W}{\varepsilon_0(1 + \alpha^2 + \beta^2)} + C_0, \\ U_2 &= \frac{\alpha W}{\varepsilon_0(1 + \alpha^2 + \beta^2)} + C_0\alpha + A_2, \\ U_3 &= \frac{\beta W}{\varepsilon_0(1 + \alpha^2 + \beta^2)} + C_0\beta + A_3, \quad W = \int \rho d\psi, \\ V_1 &= \frac{\mu_0 v[W_1(1 + \alpha^2 + \beta^2) + vW]}{(1 + \alpha^2 + \beta^2)[\mu_0\varepsilon_0 v^2 - (1 + \alpha^2 + \beta^2)]} + N_1, \\ V_2 &= \frac{\mu_0 v[W_2(1 + \alpha^2 + \beta^2) + \alpha vW]}{(1 + \alpha^2 + \beta^2)[\mu_0\varepsilon_0 v^2 - (1 + \alpha^2 + \beta^2)]} + N_2, \\ V_3 &= \frac{\mu_0 v[W_3(1 + \alpha^2 + \beta^2) + \beta vW]}{(1 + \alpha^2 + \beta^2)[\mu_0\varepsilon_0 v^2 - (1 + \alpha^2 + \beta^2)]} + N_3, \quad (2.5) \\ \rho &= -\frac{J_1 + \alpha J_2 + \beta J_3}{v} + \rho_0, \quad v \neq 0, \\ W_i &= \int J_i d\psi, \quad (i = 1, 2, 3), \\ B_1 &= -(V_3\alpha - V_2\beta)/v + M_1, \\ B_2 &= -(V_1\beta - V_3)/v + M_2, \\ B_3 &= -(V_2 - V_1\alpha)/v + M_3, \\ W &= -(W_1 + \alpha W_2 + \beta W_3)/v + \rho_0\psi, \end{aligned}$$

где $C_0 = \text{const}$, $A_k = \text{const}$, $(k = 2, 3)$, $M_i = \text{const}$, $N_i = \text{const}$, $\rho_0 = \text{const}$. Если вектор $J(\psi)$ задан, то из выписанных выше формул (2.5) остальные функции определяются с точностью до постоянных.

Следствие 1. Если $J_1 + \alpha J_2 + \beta J_3 = 0$, то $\rho = \text{const}$.

2.2. Новые подходы

Продemonстрируем сведение системы (2.1)–(2.2) к системе ОДУ, используя другие подходы.

2.2.1. Случай $\rho = \partial F/\partial t$, $\text{rot } J = 0$

Пусть $\rho = \partial F/\partial t$, $J_i = \partial R/\partial x_i$ ($\text{rot } J = 0$). Здесь (см. раздел 1) $p = 11$, $k = 13$, $p < k$. Считаем, что $F = F(\psi)$, $R = R(\psi)$, $B_i = B_i(\psi)$, $U_i = U_i(\psi)$, $V_i = V_i(\psi)$, $(i = 1, 2, 3)$, тогда система (2.1)–(2.2) сводится при $\psi_1 \neq 0$ к виду

$$\begin{aligned} F'f^2 + R''(1 + f_2^2 + f_3^2) + Ff_1 + Rf_4 &= 0, \\ U_1' + U_2'f_2 + U_3'f_3 &= Ff/\varepsilon_0, \\ B_1' + f_2B_2' + f_3B_3' &= 0, \quad V_1' + f_2V_2' + f_3V_3' = 0, \\ U_2' &= f_2U_1', \quad U_3' = f_3U_1', \quad U_3'f_2 = U_2'f_3, \\ B_1'f + V_3'f_2 - V_2'f_3 &= 0, \quad (2.6) \\ B_2'f + V_1'f_3 - V_3' &= 0, \quad B_3'f + V_2' - V_1'f_2 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_0\varepsilon_0 f(U_1' + V_1') - (B_3'f_2 - B_2'f_3) &= -\mu_0 R', \\ \mu_0\varepsilon_0 f(U_2' + V_2') - (B_1'f_3 - B_3') &= -\mu_0 R'f_2, \\ \mu_0\varepsilon_0 f(U_3' + V_3') - (B_2' - B_1'f_2) &= -\mu_0 R'f_3, \\ f(\psi) &= \frac{\Psi_t}{\Psi_1}, \quad f_1(\psi) = \frac{\Psi_{tt}}{\Psi_1^2}, \quad f_2(\psi) = \frac{\Psi_2}{\Psi_1}, \\ f_3(\psi) &= \frac{\Psi_3}{\Psi_1}, \quad f_4 = \frac{\Psi_{11} + \Psi_{22} + \Psi_{33}}{\Psi_1^2}. \quad (2.7) \end{aligned}$$

Здесь $f = f(\psi)$, $f_k = f_k(\psi)$, $(k = 1, 2, 3, 4)$ – пока произвольные функции. Выбираем в качестве базового уравнение $f(\psi) = \Psi_t/\Psi_1$.

Утверждение 1. Если

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{f(2f'^2 - ff'')}{f}, \quad f_2 = Cf + C_1, \\ f_3 &= Af + A_1, \quad f(\psi) = \frac{x_1 + C_1x_2 + A_1x_3}{1 - (t + Cx_2 + Ax_3)}, \end{aligned}$$

где $C = \text{const}$, $C_1 = \text{const}$, $A = \text{const}$, $A_1 = \text{const}$, то система (2.7) совместна и функция, задающая поверхность уровня, имеет вид

$$\psi = \frac{x_1 + C_1x_2 + A_1x_3}{1 - (t + Cx_2 + Ax_3)}.$$

Доказательство. Система (2.7) совместна, если дифференциальные следствия уравнений первого порядка и уравнения второго порядка относительно функции ψ задают одну и ту же функцию $\psi = \psi(x_1, x_2, x_3, t)$. Рассматривая полученную таким образом алгебраическую систему относительно вторых производных, получаем

$$\begin{aligned} \Psi_{tt} &= f_1\Psi_1^2, \quad \Psi_{1t} = \frac{f_1 - ff''}{f}\Psi_1^2, \\ \Psi_{2t} &= \frac{-ff'f_2 + f^2f_2' + f_1f_2}{f}\Psi_1^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{3t} &= \frac{f_3' f^2 + f_3 f_1 - f f_3'}{f} \psi_1^2, \\
\psi_{11} &= \frac{f_1 - 2 f f'}{f^2} \psi_1^2, \\
\psi_{12} &= \frac{f_2' f^2 + f_2 f_1 - 2 f f_2'}{f^2} \psi_1^2, \\
\psi_{13} &= \frac{f_3' f^2 + f_3 f_1 - 2 f f_3'}{f^2} \psi_1^2, \\
\psi_{23} &= \frac{f_2' f_3 f^2 + f_3' f_2 f^2 + f_2 f_1 f_3 - 2 f f_2 f_3'}{f^2} \psi_1^2, \\
\psi_{22} &= \frac{2 f_2' f_2 f^2 + f_2^2 f_1 - 2 f f_2^2 f'}{f^2} \psi_1^2, \\
\psi_{33} &= \frac{2 f_3' f_3 f^2 + f_3^2 f_1 - 2 f f_3^2 f'}{f^2} \psi_1^2.
\end{aligned}$$

Требую равенства третьих смешанных производных получаем

$$f_1 = \frac{f(2f'^2 - f f'')}{f'}, \quad (2.8)$$

$$f_2 = C f + C_1, \quad f_3 = A f + A_1,$$

где $C = \text{const}$, $C_1 = \text{const}$, $A = \text{const}$, $A_1 = \text{const}$. Зададим $f(\psi) = x_1 + f(\psi)t + f_2(\psi)x_2 + f_3(\psi)x_3$. В этом случае производные функции $\psi = \psi(x_1, x_2, x_3, t)$ удовлетворяют уравнениям (см. первое, третье и четвертое уравнения (2.7)) $f(\psi) = \psi_t/\psi_1$, $f_2(\psi) = \psi_2/\psi_1$, $f_3(\psi) = \psi_3/\psi_1$. Подставив выражения f_2 и f_3 из (2.8) в $f(\psi) = x_1 + f(\psi)t + f_2(\psi)x_2 + f_3(\psi)x_3$, имеем $f(\psi) = (x_1 + C_1 x_2 + A_1 x_3)/(1 - (t + C x_2 + A x_3))$. Полагаем, что $f(\psi) = \psi$. Получаем вид функции, задающей поверхность уровня

$$\psi = \frac{x_1 + C_1 x_2 + A_1 x_3}{1 - (t + C x_2 + A x_3)}. \quad (2.9)$$

Утверждение доказано.

Здесь подробно не приведено получение зависимостей (2.8), (2.9), но легко проверить, что (2.9) сводит систему уравнений в частных производных (2.1)–(2.2) к системе ОДУ.

Следствие 2. Если поверхность уровня задается функцией (2.9), то в любой ограниченной области $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi = 0$.

Перепишем для (2.9) систему (2.6), получим систему ОДУ

$$\begin{aligned}
&\psi^2 F'' + R''[1 + (C_1 + C\psi)^2 + (A_1 + A\psi)^2] \\
&+ 2\psi F' + R'[2(AA_1 + CC_1) + 2(A^2 + C^2)\psi] = 0, \\
&B_1' + (C_1 + C\psi)B_2' + (A_1 + A\psi)B_3' = 0, \\
&V_1' + (C_1 + C\psi)V_2' + (A_1 + A\psi)V_3' = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_2' &= U_1'(C_1 + C\psi), \\
U_3'(C_1 + C\psi) &= U_2'(A_1 + A\psi) \\
U_3' &= U_1'(A_1 + A\psi),
\end{aligned} \quad (2.10)$$

$$B_1'\psi + V_3'(C_1 + C\psi) - V_2'(A_1 + A\psi) = 0,$$

$$B_2'\psi + V_1'(A_1 + A\psi) - V_3' = 0,$$

$$B_3'\psi + V_2' - V_1'(C_1 + C\psi) = 0,$$

$$(\psi/\epsilon_0)F' = U_1' + (C_1 + C\psi)U_2' + (A_1 + A\psi)U_3',$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \psi(U_1' + V_1') - [B_3'(C_1 + C\psi) - B_2'(A_1 + A\psi)] = -\mu_0 R',$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \psi(U_2' + V_2') + [B_3' - B_2'(A_1 + A\psi)] = -\mu_0 R'(C_1 + C\psi),$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \psi(U_3' + V_3') + [B_1'(C_1 + C\psi) - B_2'] = -\mu_0 R'(A_1 + A\psi).$$

Рассматривая систему уравнений (2.10), получаем, что

$$\begin{aligned}
U_1' &= \frac{\Psi}{\epsilon_0 S} F', \quad U_2' = \frac{\Psi(C\psi + C_1)}{\epsilon_0 S} F', \\
U_3' &= \frac{\Psi(A\psi + A_1)}{\epsilon_0 S} F',
\end{aligned} \quad (2.11)$$

$$V_1' = \frac{\mu_0 \psi(\psi^2 F' + SR')}{Sq},$$

$$V_2' = \frac{\mu_0 \psi(C\psi + C_1)(\psi^2 F' + SR')}{Sq},$$

$$V_3' = \frac{\mu_0 \psi(A\psi + A_1)(\psi^2 F' + SR')}{Sq}, \quad (2.12)$$

$$S = 1 + (C\psi + C_1)^2 + (A\psi + A_1)^2,$$

$$q = \psi^2/c^2 - S, \quad S \neq 0, \quad q \neq 0.$$

Согласно (2.12), уравнение $V_1' + (C_1 + C\psi)V_2' + (A_1 + A\psi)V_3' = 0$ обращается в тождество, если $q \neq 0$, когда $R' = -(\psi^2/S)F'$, что будет иметь место, если $V_i' = 0$, ($i = 1, 2, 3$). Тогда решения системы (2.10) определяются из соотношений (2.11) и соотношений

$$\begin{aligned}
J_1 &= -\frac{\Psi^2}{S\phi} F', \quad J_2 = -\frac{\Psi^2(C\psi + C_1)}{S\phi} F', \\
J_3 &= -\frac{\Psi^2(A\psi + A_1)}{S\phi} F', \quad \rho = \frac{\Psi}{\phi} F', \quad B_1' = 0,
\end{aligned} \quad (2.13)$$

$$B_2' = 0, \quad B_3' = 0, \quad V_1' = 0, \quad V_2' = 0, \quad V_3' = 0,$$

где $\phi = 1 - t - Cx_2 - Ax_3$, $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$, если задана функция $F = F(\psi)$.

2.2.2. Случай $\text{rot } \mathbf{J} = 0$, $\text{rot } \mathbf{B} = 0$, $\text{rot } \mathbf{V} = 0$

Рассмотрим подробно случай безвихревого электромагнитного поля.

Задаем гладкие функции $U = U(t, x)$, $V = V(t, x)$, $B = B(t, x)$, $R = R(t, x)$. Сохраняем прежние обозначения $\mathbf{E}_p = \mathbf{U} = \{U_1, U_2, U_3\}$, $\mathbf{E}_v = \mathbf{V} = \{V_1, V_2, V_3\}$ и считаем, что

$$U_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad V_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad B_i = \frac{\partial B}{\partial x_i},$$

$$J_i = \frac{\partial R}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Тогда система (2.1)–(2.2) перепишется в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \Delta R = 0, \quad \Delta B = 0,$$

$$\Delta V = 0, \quad \Delta U = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x_i} = 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x_i} \right) + \mu_0 \frac{\partial R}{\partial x_i} = 0.$$

Исключив плотность ρ из системы (2.14), имеем

$$\Delta B = 0, \quad \Delta V = 0, \quad \Delta \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) = -\frac{\Delta R}{\varepsilon_0}, \quad \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x_i} = 0,$$

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x_i} \right) + \mu_0 \frac{\partial R}{\partial x_i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.15)$$

Здесь (см. раздел 1) $p = 4$, $k = 9$, $p < k$. Пусть в системе (2.15) $U = U(\psi)$, $V = V(\psi)$, $B = B(\psi)$, $R = R(\psi)$, тогда $\psi(t, \mathbf{x}) = \text{const}$ задает поверхность уровня функций $U(t, \mathbf{x})$, $V(t, \mathbf{x})$, $B(t, \mathbf{x})$, $R(t, \mathbf{x})$. Распишем подробно производные сложных функций

$$R_i = R' \psi_i, \quad U_t = U' \psi_t, \quad V_t = V' \psi_t,$$

$$B_t = B' \psi_t, \quad R_t = R' \psi_t,$$

$$U_i = U' \psi_i, \quad U_{ij} = U'' \psi_i \psi_j + U' \psi_{ij},$$

$$V_{ij} = V'' \psi_i \psi_j + V' \psi_{ij},$$

$$B_i = B' \psi_i, \quad B_{ij} = B'' \psi_i \psi_j + B' \psi_{ij},$$

$$R_{ij} = R'' \psi_i \psi_j + R' \psi_{ij}, \quad (2.16)$$

$$V_i = V' \psi_i, \quad U_{it} = U'' \psi_i \psi_t + U' \psi_{it},$$

$$V_{it} = V'' \psi_i \psi_t + V' \psi_{it},$$

$$B_{it} = B'' \psi_i \psi_t + B' \psi_{it}, \quad R_{it} = R'' \psi_i \psi_t + R' \psi_{it},$$

$$U_{i,j,t} = U''' \psi_i \psi_j \psi_t +$$

$$+ U''(\psi_j \psi_{it} + \psi_i \psi_{jt} + \psi_t \psi_{ij}) + U' \psi_{ijt}.$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по ψ , индексы i и j – дифференцирование по x_i и по x_j , индекс t – дифференцирование по времени. Подставляя (2.16) в (2.15), получим систему уравнений

$$B''(\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2) + B'(\psi_{11} + \psi_{22} + \psi_{33}) = 0,$$

$$V''(\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2) + V'(\psi_{11} + \psi_{22} + \psi_{33}) = 0,$$

$$U'''(\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2) \psi_t +$$

$$+ U''[2(\psi_1 \psi_{1t} + \psi_2 \psi_{2t} + \psi_3 \psi_{3t}) +$$

$$+ \psi_t(\psi_{11} + \psi_{22} + \psi_{33})] + \quad (2.17)$$

$$+ U'(\psi_{11t} + \psi_{22t} + \psi_{33t}) + [R''(\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2) +$$

$$+ R'(\psi_{11} + \psi_{22} + \psi_{33})]/\varepsilon_0 = 0,$$

$$B'' \psi_i \psi_t + B' \psi_{it} = 0, \quad [(U'' + V'') \psi_i \psi_t +$$

$$+ (U' + V') \psi_{it}]/c^2 + \mu_0 R' \psi_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Пусть $\psi_i \neq 0$, $(i = 1, 2, 3)$ и

$$\psi_t = g(\psi), \quad \frac{\psi_{11} + \psi_{22} + \psi_{33}}{\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2} = g_1(\psi),$$

$$\frac{\psi_{1t}}{\psi_1} = g_{14}(\psi),$$

$$\frac{2(\psi_1 \psi_{1t} + \psi_2 \psi_{2t} + \psi_3 \psi_{3t}) + \psi_t(\psi_{11} + \psi_{22} + \psi_{33})}{\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2} = \quad (2.18)$$

$$= g_2(\psi),$$

$$\frac{\psi_{3t}}{\psi_3} = g_{34}(\psi), \quad \frac{\psi_{2t}}{\psi_2} = g_{24}(\psi),$$

$$\frac{\psi_{11t} + \psi_{22t} + \psi_{33t}}{\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2} = g_3(\psi).$$

Здесь $g = g(\psi)$, $g_k = g_k(\psi)$, $g_{k4} = g_{k4}(\psi)$, $(k = 1, 2, 3)$ – пока произвольные функции. Выбираем в качестве базового уравнение $\psi_t = g(\psi)$. Если система (2.18) относительно функции ψ совместна, то система (2.17) сведется к системе ОДУ.

Утверждение 2. Если

$$g_{i4} = g', \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$g_2 = 2g' + gg_1, \quad g_3 = g'' + g'g_1, \quad (2.19)$$

$$g_1 = (g' + \eta)/g, \quad \eta = \text{const},$$

то система (2.18) совместна.

Доказательство. Выписав дифференциальные следствия первого соотношения системы (2.18) и подставив полученные производные функции ψ_t в третье, четвертое и пятое соотношения системы (2.18), придем к первому выражению из системы (2.19): $\psi_{it} = g' \psi_i$, $\psi_{ii} = g_{i4} \psi_i$, откуда $g_{i4} = g'$, $(i = 1, 2, 3)$. Подстановка производных функции ψ_t в шестое соотношение системы (2.18) с учетом второго соотношения системы (2.18) дает $g_2 = 2g' + gg_1$. Выпишем дифференциальное следствие второго уравнения системы (2.18), дифференциальные следствия полученной зависимости $\psi_{it} = g' \psi_i$ и последнее соотношение системы (2.18)

$$\Psi_{11t} + \Psi_{22t} + \Psi_{33t} + g_1' \Psi_t (\Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2) + 2g_1 (\Psi_1 \Psi_{1t} + \Psi_2 \Psi_{2t} + \Psi_3 \Psi_{3t}) = 0,$$

$$\Psi_{iit} = g'' \Psi_i^2 + g' \Psi_{ii}, \quad \frac{\Psi_{11t} + \Psi_{22t} + \Psi_{33t}}{\Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2} = g_3(\Psi).$$

Потребовав в этих выражениях равенства вторых и третьих смешанных производных функции Ψ , получим

$$g_3 = g'' + g' g_1, \quad g'' - g_1 g' - g g_1' = 0, \\ \text{отсюда} \quad g_1 = (g' + \eta)/g, \quad \eta = \text{const}.$$

Таким образом, для совместности системы (2.18) достаточно, чтобы функция $g(\Psi)$ задавалась произвольно, а остальные функции в правых частях системы (2.18) удовлетворяли условиям (2.19). Утверждение доказано.

Заметим, что $g(\Psi)$ — произвольная функция, выбор которой определяет зависимость функций, задающих поверхности уровня, от времени ($\Psi_t = g(\Psi)$).

Зададим, например, $g(\Psi) = \Psi$, тогда $g_1 = (1 + \eta)/\Psi$, $g_2 = (3 + \eta)$, $g_3 = (1 + \eta)/\Psi$, $g_{i4} = 1$ и система (2.1)–(2.2) (см. также (2.17)) сводится к системе ОДУ

$$B''\Psi + B'(1 + \eta) = 0, \quad V''\Psi + V'(1 + \eta) = 0, \\ U'''\Psi^2 + U''(3 + \eta)\Psi + U'(1 + \eta) + [R''\Psi + R'(1 + \eta)]/\varepsilon_0 = 0, \quad B''\Psi + B' = 0, \\ [(U'' + V'')\Psi + (U' + V')]/c^2 + \mu_0 R' = 0, \quad (2.20)$$

из которой следует после сравнения первого и предпоследнего соотношения (2.20)), что $\eta = 0$. Выпишем решение системы (2.20)

$$B = C \ln \Psi + C_1, \quad V = K \ln \Psi + K_1, \\ U = M \Psi^p, \quad R = -M \varepsilon_0 p \Psi^p, \quad (2.21)$$

где $p = \text{const}$, $C > 0 = \text{const}$, $C_1 = \text{const}$, $K > 0 = \text{const}$, $K_1 = \text{const}$, $M = \text{const}$. Если $\Psi_t = g(\Psi) = \Psi$, то $\Psi = a(x_1, x_2, x_3) \exp t$, где функция $a(x_1, x_2, x_3)$ — решение уравнения (см. (2.19) и последнее соотношение (2.18))

$$\frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \frac{1}{a}. \quad (2.22)$$

Здесь нижние индексы обозначают производные функции $a(x_1, x_2, x_3)$ по соответствующим x_i , ($i = 1, 2, 3$).

Чтобы получить решение этого уравнения, уравнение (2.22) заменим системой уравнений (см. [14])

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = q(a), \quad a(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = q(a), \quad (2.23)$$

где $q = q(a)$ — пока произвольная функция. Очевидно, что решение системы (2.23) обращает в тождество уравнение (2.22).

Выпишем систему уравнений характеристик [13] для первого уравнения системы (2.23)

$$\frac{dx_i}{ds} = 2\phi_i, \quad \frac{da}{ds} = 2q, \quad \frac{da_i}{ds} = q'a_i, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по переменной a . Выберем в качестве параметра, изменяющегося вдоль характеристики переменную a

$$\frac{dx_i}{da} = \frac{a_i}{q}, \quad \frac{da_i}{da} = \frac{q'}{2q} a_i, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Распишем подробнее второе соотношение системы уравнений характеристик

$$\frac{da_i}{da} = a_{i1} \frac{dx_1}{da} + a_{i2} \frac{dx_2}{da} + a_{i3} \frac{dx_3}{da} \frac{q'}{2q} a_i, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Продифференцировав записанные равенства по x_j , получим

$$\frac{da_{ij}}{da} = -\sum_{k=1}^3 \left[a_{ik} \left(\frac{dx_k}{da} \right)_j \right] + \left(\frac{q'}{2q} a_i \right)_j, \quad (j = 1, 2, 3).$$

Таким образом можно получить соотношения, описывающие поведение вдоль характеристик производных любого порядка. Нас в данном случае интересует расширенная до второго порядка система уравнений характеристик.

Выпишем такую расширенную систему уравнений характеристик для первого уравнения системы (2.23) и потребуем, чтобы второе уравнение системы (2.23) было первым интегралом расширенной системы уравнений характеристик

$$\frac{dx_i}{da} = \frac{a_i}{q}, \quad \frac{da_i}{da} = \frac{q'}{2q} a_i, \quad (i = 1, 2, 3), \\ \frac{da_{ii}}{da} = -\sum_{j=1}^3 \left[a_{ij} \left(\frac{dx_j}{da} \right)_i \right] + \left(\frac{q'}{2q} a_i \right)_i, \quad (2.24) \\ \frac{dq}{da} = \sum_{i=1}^3 \left(a_{ii} + a \frac{da_{ii}}{da} \right).$$

Здесь индекс i у скобок означает производную от выражения в скобках по x_i , ($i = 1, 2, 3$). Любое решение системы (2.24) удовлетворяет системе уравнений (2.23) и определяет вид функции $q = q(a)$.

Из системы (2.24) имеем

$$a_i = k_i \sqrt{q}, \quad x_i = k_i w + m_i, \\ w = \int \frac{da}{\sqrt{q}}, \quad k_3 = \sqrt{1 - k_1^2 - k_2^2}, \quad (2.25)$$

где $k_i = \text{const}$, $m_i = \text{const}$, ($i = 1, 2, 3$). Покажем, как из соотношений (2.25) можно определить $a = a(x_1, x_2, x_3)$. Пусть $m_i = m_i(k_1, k_2)$ и тождественно выполняется зависимость

$$a = a(x_1(a, k_1, k_2), x_2(a, k_1, k_2), x_3(a, k_1, k_2)),$$

а именно,

$$\begin{aligned} 1 &= a_1 \frac{dx_1}{da} + a_2 \frac{dx_2}{da} + a_3 \frac{dx_3}{da}, \\ 0 &= a_1 \frac{dx_1}{dk_j} + a_2 \frac{dx_2}{dk_j} + a_3 \frac{dx_3}{dk_j}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где ($j = 1, 2$). Тогда мы имеем преобразование координат $x_i = x_i(a, k_1, k_2)$, ($i = 1, 2, 3$), задав которое и исключив k_1 и k_2 из выражений $x_i = x_i(a, k_1, k_2)$, получим вид функции $a = a(x_1, x_2, x_3)$. Первое соотношение (2.26) выполняется тождественно, второе соотношение (2.26) накладывает ограничения на выбор функций $m_i = m_i(k_1, k_2)$. В частности, зависимости (2.26) выполняются, если $m_i = 0$. Но тогда $w^2(a) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ и $a = a(z)$, $z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Подставляя такое $a = a(z)$ в уравнение (2.22), получаем ОДУ $2zaa_{zz} + 3aa_z - 2za_z^2 = 0$. Взяв его частное решение $a = \exp(-2Tz^{-1/2})$, получим $\psi = \exp[t - (2Tz^{-1/2})]$, $T = \text{const}$. Подставив выписанное $\psi = \psi(t, x)$ в (2.21), найдем $B(t, x)$, $U(t, x)$, $V(t, x)$, $R(t, x)$ и векторы $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{E}_p(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{E}_v(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{J}(t, \mathbf{x})$. Затем из (2.2) определим плотность $\rho(t, x)$.

Замечание. Как отмечалось в разделе 1, иногда среди уравнений, из которых определяется функция, задающая поверхность уровня, может присутствовать не одно уравнение первого порядка, которое можно выбрать за базовое. Пример этого — система (2.7). Для получения системы ОДУ из этой системы было взято в качестве базового уравнение $f(\psi) = \psi_t/\psi_1$. Остальные уравнения первого порядка из этой системы, которые можно было считать базовыми уравнениями, для построения системы ОДУ не рассматривались.

Отметим также, что во всех рассмотренных выше примерах присутствовала, как и утверждалось в разделе 1, одна произвольная функция, зависящая от ψ , и ее выбор определял вид функций, задающих поверхности уровня (например, $\psi = x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + \nu t$, или $\psi = \exp\{t - 2T(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2}\}$, или $\psi = (x_1 + C_1x_2 + A_1x_3)/[1 - (t + Cx_2 + Ax_3)]$) и, следовательно, вид решения исходной системы уравнений. Таким образом, решение исходной системы уравнений оказывалось зависящим от произвольной функции, что в некоторых случаях позволяет удовлетворять дополнительным (на-

чальным, краевым и др.) условиям, наложенным на решение.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ БЕЗВИХРЕВОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ПО ЗАДАННОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ЗАРЯДОВ

Найдем электрическое и магнитное поля, генерируемые заданными зарядами, если распределение зарядов при $z \neq 0$: $\mathbf{J}(t, z) = \mathbf{J}_0(z)$, $z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $\mathbf{J}_0 = (J_{01}, J_{02}, J_{03})$ и в начальный момент времени плотность зарядов известна $\rho(0, z) = \rho_0(z)$.

Для этого перейдем в системе (2.15) к независимым переменным (z, t) . Если $z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x_i} &= 2x_i R_z, & \frac{\partial^2 R}{\partial x_i^2} &= 2R_z + 4x_i^2 R_{zz}, \\ \frac{\partial B}{\partial x_i} &= 2x_i B_z, & \frac{\partial^2 B}{\partial x_i^2} &= 2B_z + 4x_i^2 B_{zz}, \\ \frac{\partial U}{\partial x_i} &= 2x_i U_z, & \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} &= 2U_z + 4x_i^2 U_{zz}, \\ \frac{\partial V}{\partial x_i} &= 2x_i V_z, & \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} &= 2V_z + 4x_i^2 V_{zz}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x_i} &= 2x_i V_{tz}, & \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x_i} &= 2x_i U_{tz}, \\ \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x_i} &= 2x_i B_{tz}, & (i = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Здесь и далее в этом разделе нижний индекс z обозначает дифференцирование по переменной z . Перепишем (2.15), подставив полученные выражения

$$\begin{aligned} 6V_z + 4zV_{zz} &= 0, & 6U_{tz} + 4zU_{tzz} &+ \\ &+ (6R_z + 4zR_{zz})/\epsilon_0 &= 0, & B_{tz} &= 0, \\ 6B_z + 4zB_{zz} &= 0, & U_{tz} + V_{tz} + R_z/\epsilon_0 &= 0, \\ \rho_t + 6R_z + 4zR_{zz} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Так как $\mathbf{J}(t, z) = \mathbf{J}_0(z)$, то $\partial R/\partial x_i = 2x_i R_z = J_{0i}$. Отсюда

$$R_z = \pm 0.5 \sqrt{\sum_{i=1}^3 (J_{0i})^2} / z = S(z), \quad R_{zz} = S_z.$$

Из последнего уравнения системы (3.1) получаем $\rho = -(6S + 4zS_z)t + \rho_0$. Решая первое уравнение системы (3.1) и учитывая четвертое уравнение, имеем $B = -2Cz^{-1/2} + C_1(t)$, $C = \text{const}$, $C > 0$. Из уравнения $6V_z + 4zV_{zz} = 0$ получаем, что $V_z = K(t)z^{-3/2}$. Из третьего уравнения системы (3.1) имеем $U_{tz} = z^{-3/2}\eta - (1/\epsilon_0)R_z$, $\eta = \text{const}$. Подстав-

для полученных U_{iz} и $V_{iz} = K_i z^{-3/2}$ в предпоследнее уравнение системы, имеем $K_i = -\eta$,

$$B_i = 2Cx_i z^{-(3/2)},$$

$$U_i = 2x_i \left[\eta z^{-(3/2)} \mp \frac{t}{2\epsilon_0} \sqrt{\sum_{i=1}^3 (J_{0i})^2} \right] / z + n(z),$$

$$V_i = -2x_i(t\eta + m)z^{-(3/2)}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad m = \text{const.}$$

Учитывая (2.1), получаем, что $\eta = 0$, $4zn_z + 6n = \rho_0/\epsilon_0$, тогда $n = z^{-(3/2)} \left(\zeta + (1/4\epsilon_0) \int \rho_0 z^{(1/2)} dz \right)$, $\zeta = \text{const.}$

Итак, имеем электромагнитное поле, созданное заданными зарядами:

$$B_i = 2Cx_i z^{-(3/2)}, \quad E_{vi} = -2x_i m z^{-(3/2)},$$

$$E_{pi} = 2x_i \left\{ \mp \frac{t}{2\epsilon_0} \sqrt{\sum_{i=1}^3 (J_{0i})^2} \right\} / z + z^{-(3/2)} \left(\zeta + (1/4\epsilon_0) \int \rho_0 z^{(1/2)} dz \right),$$

где $(i = 1, 2, 3)$, $C = \text{const}$, $m = \text{const}$, $\epsilon_0 = \text{const}$, $\zeta = \text{const}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Системы дифференциальных уравнений в частных производных — часто используемая математическая модель физических процессов и явлений. Выше на примере системы уравнений, включающей уравнения Максвелла в приближении Дарвина, продемонстрированы три возможных аналитических подхода к изучению линейных и нелинейных систем уравнений в частных производных.

В первом подходе рассматривается поведение электромагнитного поля вдоль плоскостей с произвольным их расположением в пространстве ($\psi = x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + vt$). Это могут быть и касательные плоскости в точках заданного тела после выбора у плоскости соответствующих постоянных α и β . Такой подход ранее был использован в задаче, связанной с удержанием плазмы магнитным полем [11]. Положение плоскостей меняется со временем, что позволяет следить за развитием процессов в зависимости от времени.

Комбинация всех трех подходов позволяет следить за развитием процесса со временем вдоль более сложных конфигураций ($\psi = (x_1 + C_1 x_2 + A_1 x_3) / [1 - (t + Cx_2 + Ax_3)]$). Здесь функция, задающая поверхность уровня, является дробно-линейной. Это, возможно, позволит выводить процесс на стационарный режим (см. поведение со временем функции ψ).

Применение только второго подхода для данной конкретной системы позволяет детально описывать безвихревые поля. Выбор же произвольной функции $g(\psi)$ дает возможность “управлять” процессом. В частности, в данной работе этот подход использован для решения задачи определения электромагнитного поля по заданному распределению зарядов.

Из изложенного видно, насколько новые подходы расширяют круг возможностей для сведения исходной системы уравнений к системе ОДУ. Получаемые в рамках изложенных подходов точные решения и системы ОДУ, в частности точные решения (2.5), (2.11), (2.13), (2.21), могут быть использованы при численном моделировании некоторых физических процессов в качестве тестов.

Сведение линейных и нелинейных систем уравнений в частных производных к системам ОДУ, в которых в качестве независимого переменного выбирается ψ , где $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const}$ — поверхность уровня, позволяет во всех трех подходах не только получать некоторые точные решения исходной системы уравнений в частных производных, но и проследить, используя разные комбинации трех подходов, динамику, которую описывает рассматриваемая математическая модель физических процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розанов Н.Н. Специальные разделы математической физики. Часть I: Электромагнитные волны в вакууме. СПб.: СПб ГУИТМО, 2005. 60 с.
2. Скубачевский А.А., Хохлов Н.И. Численное решение уравнений Максвелла для моделирования распространения электромагнитных волн // Труды МФТИ. 2016. Т. 8. № 3. С. 121–130.
3. Денисенко В.В. Энергетический метод построения гармонических по времени решений уравнений Максвелла // Сибирский математический журнал. 2011. Т. 52. № 2. С. 265–282.
4. Ремнев М.А., Климов В.В. Метаповерхности: новый взгляд на уравнения Максвелла и новый метод управления светом // УФН. 2018. Т. 188. № 2. С. 169–205. <https://doi.org/10.3367/UFN.2017.08.038192>
5. Перепелкин Е.Е., Репникова Н.П., Иноземцева Н.Г. Точное решение задачи пространственного заряда для движения сферически симметричного пучка в однородном электрическом поле // Матем. замет-

- ки. 2015. Т. 98. Вып. 3. С. 386–392.
<https://doi.org/10.4213/mzm10816>
6. Брушлинский К.В., Степин Е.В. Математические модели равновесных конфигураций плазмы, окружающей проводники с током // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 7. С. 901–909.
<https://doi.org/10.1134/S0374064120070067>
 7. Тришин В.Н. Об изотропных решениях уравнений Максвелла // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2012. № 11. С. 183–188.
<https://doi.org/10.7463/1112.0489647>
 8. Волоотовский С.Г., Серафимович П.Г., Харитонов С.И. Решение уравнений Максвелла в пространственно-частотном представлении // Компьютерная оптика. 2000. Вып. 20. С. 5–9.
 9. Бородачев Л.В., Мингалев И.В., Мингалев О.В. Система Власова–Дарвина / В кн.: Энциклопедия низкотемпературной плазмы (ред. В.Е. Фортов), сер. Б, т. VII-1/3 “Математическое моделирование в низкотемпературной плазме”. М.: Янус-К, 2008. С. 140–150.
 10. Liao C., Ying L. An analysis of the Darwin model of approximation to Maxwell’s equations in 3-D unbounded domains // Communications in Mathematical Sciences. 2008. V. 6. № 3. P. 695–710.
<https://doi.org/10.4310/CMS.2008.V6.N3.A8>
 11. Ульянов О.Н., Рубина Л.И. О некоторых решениях одной системы уравнений плазмостатики // Вестник НИЯУ МИФИ. 2021. Т. 10. № 1. С. 12–18.
<https://doi.org/10.1134/S2304487X20060103>
 12. Сидоров А.Ф., Шанеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения к газовой динамике. Новосибирск: Наука. Сибирское отделение. 1984. 271 с.
 13. Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics. Vol.: Partial differential equations. N. Y.: Interscience, 1962. 830 p.
 14. Рубина Л.И., Ульянов О.Н. Об одном методе решения уравнения нелинейной теплопроводности // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53. № 5. С. 1091–1101.
<https://doi.org/10.1134/S0037446612050126>

Vestnik Nacional’nogo Issledovatel’skogo Yadernogo Universiteta “MIFI”, 2021, vol. 10, no. 5, pp. 418–428

On the Reduction of a System of Partial Differential Equations to Systems of Ordinary Differential Equations

O. N. Ul’yanov^{a, #} and L. I. Rubina^{a, ##}

^a Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch, Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia

[#]e-mail: secretary@imm.uran.ru

^{##}e-mail: rli@imm.uran.ru

Received December 26, 2021; revised December 27, 2021; accepted December 28, 2021

Abstract—The system of Maxwell’s equations is considered in the Darwin approximation. The study of the system is based on the reduction of systems of partial differential equations (linear and nonlinear) to systems of ordinary differential equations. The variable ψ , where $\psi(x, y, z, t) = \text{const}$ is the level surface of some functions, is chosen as an independent variable in systems of ordinary differential equations. The reduction is based on constructing an extended system of equations of characteristics (basic system) for a partial differential equation of the first order (basic equation), which is satisfied by the level surface of the selected functions. All the necessary relations are added to the basic system as the first integrals to obtain a system of ordinary differential equations for the system of partial differential equations under consideration. To search for level surfaces for solutions of the system of equations under consideration, both the approaches previously described in a number of our articles and the newly proposed variants of our method are used. Three systems of ordinary differential equations with different independent variables (different functions $\psi(x, y, z, t)$) are presented. It is shown that obtaining a level surface in each of the considered approaches has a functional arbitrariness. Some exact solutions of the considered system of partial differential equations are obtained. As an example, for one of the systems of ordinary differential equations, the set of solutions of which depends on the choice of an arbitrary function $g(\psi)$ in the basic equation $t = g(\psi)$, a solution is written for the case where $g(\psi) = \psi$. The solution of the problem of determining a vortex-free electromagnetic field by a given charge distribution is given.

Keywords: systems of partial differential equations, systems of ordinary differential equations, Maxwell’s equations, Darwin approximation, exact solutions

DOI: [10.1134/S2304487X21050102](https://doi.org/10.1134/S2304487X21050102)

REFERENCES

1. Rozanov N.N., *Spetsial'nyye razdely matematicheskoy fiziki. Chast' I.: Elektromagnitnyye volny v vakuume* [Special sections of mathematical physics. Part I: Electromagnetic waves in vacuum], St. Petersburg: ITMO, 2005. 60 p. (in Russian).
2. Skubachevskii A.A., Khokhlov N.I., Chislennoye resheniye uravneniy Maksvella dlya modelirovaniya rasprostraneniya elektromagnitnykh voln [Numerical solution of Maxwell's equations for modeling the propagation of electromagnetic waves], *Trydy MIPT [Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology]*, 2016, vol. 8, no. 3, pp. 121–130 (in Russian).
3. Denisenko V.V., The energy method for constructing time-harmonic solutions to the Maxwell equations, *Siberian Mathematical Journal*, 2011, vol. 52, no. 2, pp. 207–221.
<https://doi.org/10.1134/S0037446611020030>
4. Remnev M.A., Klimov V.V., Metasurfaces: a new look at Maxwell's equations and new ways to control light, *Phys.-Usp.*, vol. 61, no. 2, pp. 157–190.
<https://doi.org/10.3367/UFNe.2017.08.038192>
5. Perepelkin E.E., Repnikova N.P., Inozemtseva N.G., An exact solution of the space charge problem for the motion of a spherically symmetric beam in a homogeneous electric field, *Math. notes*, 2015, vol. 98, no. 3, pp. 448–453.
<https://doi.org/10.1134/S0001434615090102>
6. Brushlinskii K.V., Stepin E.V., Mathematical models of equilibrium configurations of plasma surrounding current-carrying conductors, *Diff. equat.*, 2020, vol. 56, no. 7, pp. 872–881.
<https://doi.org/10.1134/S001226612007006X>
7. Trishin V.N., Ob izotropnykh resheniyakh uravneniy Maksvella [On isotropic solutions to Maxwell's equations], *Nauka i obrazovaniye: nauchnoye izdaniye MGTU im. N.E. Bauman* [Science and Education of Bauman MSTU], 2012, no. 11 pp. 183–188 (in Russian).
8. Volotovskiy S.G., Serafimovich P.G., Kharitonov S.I., Resheniye uravneniy Maksvella v prostranstvenno-chastotnom predstavlenii [Solving Maxwell equations in spatial frequency representation], *Komp'yuternaya optika [Computer optics]*, 2000, issue 20, pp. 5–9 (in Russian).
9. Borodachev L.V., Mingalev I.V., Mingalev O.V., Sistema Vlasova-Darvina [Vlasov-Darwin system] *Enciklopedia nizkoterperaturnoi plazmy (red. V.E. Fortov), ser. B, vol. VII-1/3 "Matematicheskoe modelirovanie v nizkoterperaturnoi plazme"* [Encyclopedia of Low-Temperature Plasma (ed. V.E. Fortov), Ser. B, vol. VII-1/3 Mathematical modeling in low-temperature plasma], M.: Yanus-K, 2008, pp. 140–150 (in Russian).
10. Liao C., Ying L., An analysis of the Darwin model of approximation to Maxwell's equations in 3-D unbounded domains, *Communications in Mathematical Sciences*, 2008, vol. 6, no. 3, pp. 695–710.
<https://doi.org/10.4310/CMS.2008.V6.N3.A8>
11. Ulyanov O.N., Rubina L.I., O nekotorykh resheniyakh odnoy sistemy uravneniy plazmostatiki [On some solutions of one system of plasmotatics equations], *Vestnik NIYaU MIFI*, 2021, vol. 10, no. 1, pp. 12–18 (in Russian).
<https://doi.org/10.1134/S2304487X20060103>
12. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N., *Metod differentsial'nykh svyazei i ego prilozheniya v gazovoi dinamike* [Method of Differential Constraints and Its Applications in Gas Dynamics], Novosibirsk: Nauka, 1984 (in Russian).
13. Courant R., Hilbert D., *Methods of mathematical physics, vol.: Partial differential equations*. N. Y.: Interscience, 1962. 830 p.
14. Rubina L.I., Ulyanov O.N., On some method for solving a nonlinear heat equation, *Siberian Mathematical Journal*, 2012, vol. 53, no. 5, pp. 1091–1101.
<https://doi.org/10.1134/S0037446612050126>