

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ЯДЕРНЫМ РЕАКТОРОМ

© 2021 г. К. К. Абдулрахим^{1,2,*}, А. О. Толоконский¹, З. Лаидани¹, Р. Беррекси¹

¹ Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

² Нигерийская атомическая энергетическая комиссия, Абуджа, 900288 Нигерия

*e-mail: kamalabdulraheem@gmail.com, kabdulrahim@mephi.ru

Поступила в редакцию 22.12.2021 г.

После доработки 23.12.2021 г.

Принята к публикации 30.12.2021 г.

Ядерный реактор широко используется в различных сферах деятельности человека, например, для производства электроэнергии, производства изотопов, в образовательных и исследовательских целях, а также в космических двигателях. Несмотря на полезное назначение, он представляет опасность для человека и общества из-за опасных радионуклидов, образующихся при эксплуатации. Следовательно, обязательно выполнение действий, снижающих выброс радионуклидов в окружающую среду. Эти мероприятия включают в себя эксплуатацию ядерного реактора в стабильных условиях и полный контроль над системой. В данном исследовании управление ядерным реактором проводится с помощью линейно-квадратичного регулятора оптимального метода управления с использованием нелинейной модели уравнения кинетики жесткой точки с одним групповым запаздывающим нейтроном. В начале показано, что ядерный реактор асимптотически неустойчив. Кроме того, имеется неограниченный ввод и ограниченный вывод. В результате, к системе применяется пропорциональный компенсатор усиления, чтобы сформировать замкнутую систему, которая стабилизирует систему. Кроме того, в системе учитывается обратная связь по реактивности путем объединения уравнений точечной кинетики и дополнительных уравнений теплогидравлики. Смоделированное уравнение линеаризуется, и применяется стратегия линейно-квадратичного управления для достижения технических характеристик, таких как минимальное перерегулирование, время установления и стабилизация системы. Результаты моделирования подтверждены предыдущими исследованиями.

Ключевые слова: линейно-квадратичный регулятор, уравнение точечной кинетики, ограниченный вход и выход, обратная связь по реактивности, скачок мощности

DOI: 10.1134/S2304487X21050023

ВВЕДЕНИЕ

Ядерный реактор используется для многих целей, включая производство электроэнергии, нейтронно-активационный анализ и проведение исследований. Некоторые страны вырабатывают значительное количество электроэнергии на атомных электростанциях. Например, США, Япония, Франция и Россия имеют значительную долю ядерной энергии в их структуре энергопотребления. Однако за годы применения ядерно-энергетических технологий происходили ядерные аварии, инциденты или переходные процессы. Хотя некоторые аварии не были серьезными, другие, такие как Фукусима и Чернобыль, были серьезными из-за расплавления активной зоны. Расплав активной зоны привел к выбросу в окружающую среду опасных радионуклидов. Таким образом, учитывая риски и опасность для здоровья

людей и окружающей среды, связанные с радионуклидами, важно предотвратить их выброс в результате использования атомных электростанций. Следовательно, стабильность и контроль атомной электростанции во время эксплуатации и ожидаемые неопределенности для предотвращения инцидентов или аварийных ситуаций имеют жизненно важное значение [1].

В исследованиях ядерной инженерии широко применяется уравнение точечной кинетики, которое представляет собой набор нелинейных и жестких дифференциальных уравнений [2]. Численное решение уравнения выявляет характеристики и зависящее от времени поведение ядерного реактора в отношении нейтронной популяции, что помогает контролировать критичность системы ядерного реактора [3, 4]. В результате были реализованы различные стратегии управления на

Таблица 1. Параметры точечных кинетических уравнений

Параметры	Описание
n	Нейтронное население
i	Количество групп предшественников нейтронов
C_i	i th концентрация группы предшественников
ρ	Общая реактивность $(K_{eff} - 1)K_{eff}^{-1}$
β_i	Выход деления i th группы прекурсоров
β	Полная доля запаздывающих нейтронов ($\sum \beta_i$)
λ_i	Константа распада i th группы предшественников
Λ	Среднее время между испусканием нейтронов, генерируемых в двух последовательных поколениях
q	Независимый источник нейтронов
K_{eff}	Коэффициент размножения нейтронов

основе уравнения точечной кинетики для анализа безопасности сложной и нелинейной системы. Некоторые из этих систем управления включают управление в скользящем режиме [5–8] и надежную линеаризацию с обратной связью [9]. Другие методы контроля включают пропорционально-интегрально-производное регулирование, которое широко используется при управлении атомными электростанциями. Оптимизированный ПИД-регулятор, настроенный на основе генетического алгоритма с реальной кодировкой, был успешно реализован для управления силовой установкой, отслеживающей нагрузку [10]. Точно так же ПИД-регулятор с нечеткой логикой использовался для достижения оптимальной настройки коэффициентов усиления контроллера для оптимальной производительности на атомной электростанции [11, 12]. Более того, методы оптимального управления, такие как линейно-квадратичный регулятор и линейно-квадратичный гауссов [13–15] использовались на атомных электростанциях для минимизации определенных целевых функций или функций затрат в данной ядерной реакторной системе. Следовательно, в этом исследовании показано, что ядерный реактор асимптотически нестабилен, и установлена необходимость применения стратегии управления в системе ядерного реактора. Кроме того, математическое моделирование реакторной системы представлено с использованием уравнения точечной кинетики на основе нейтрона с одиночным групповым запаздыванием. Будет реализована оптимальная система управления с целевы-

ми функциями, основанными на перерегулировании, времени отклика, времени установления и времени стабилизации.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И УРАВНЕНИЯ ТОЧЕЧНОЙ КИНЕТИКИ

Как правило, уравнение переноса Больцмана фиксирует зависящее от времени распределение потока в ядерном реакторе. Однако точные решения уравнения могут быть получены для нескольких и редких сценариев. Тем не менее, приближенное уравнение диффузии нейтронов, в котором переменная энергии дискретизирована, а сечения межгруппового переноса представляют процесс замедления, может адекватно использоваться вместо уравнения переноса [16]. Поэтому уравнение диффузии нейтронов, включая запаздывающие нейтроны, используется для вывода уравнения точечной кинетики реактора. Уравнение точечной кинетики представляет собой фундаментальное уравнение, описывающее зависимость от времени размножения активной зоны реактора. Его можно использовать для предсказания поведения популяции нейтрона в реакторе [3]. Подробный вывод уравнения приведен в [3, 4]. Уравнение точечной кинетики имеет вид

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_1^I \lambda_i C_i + q, \quad (1)$$

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n - \lambda_i C_i.$$

Кроме того, начальные условия $n(t=0)$ и $C_i(t=0)$ важны для завершения формулировки уравнения (1) выше. Когда нет внешнего источника, где $q = 0$, условие равновесия для стационарного прекурсора с нейтронной заселенностью n^* задается как [4]

$$C_i(0) = \frac{\beta_i}{\lambda_i \Lambda} n^*. \quad (2)$$

Уравнение точечной кинетики приводит к однородной системе, когда $q = 0$. Впоследствии как n и C_i можно масштабировать с помощью произвольного коэффициента, не влияя на решение уравнения [17].

Параметры в уравнении (1) точечной кинетики определены в табл. 1.

2. УРАВНЕНИЯ ТОЧЕЧНОЙ КИНЕТИКИ БЕЗ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО РЕАКТИВНОСТИ

Характеристики активной зоны реактора, такие как стабильность и переходные процессы, можно исследовать с помощью уравнения точечной кинетики. По сути, уравнения могут установ-

ливать типы устойчивости, которые включают устойчивость по Ляпунову, асимптотическую устойчивость или предельную устойчивость. Моделирование естественной динамики реактора с помощью программного обеспечения Matlab/Simulink показало, что реакторная система без обратной связи не является асимптотически устойчивой. Аналитический анализ дополнительно подтвердил численный анализ, который будет показан позже в этой работе.

Рассмотрим уравнение точечной кинетики с одним групповым прекурсором и запаздывающим нейтроном без внешнего источника. Приближение не влияет на целостность модели, чтобы выявить несколько существенных явлений динамики реактора или характеристик ядерного реактора [4]. Следовательно, уравнения могут быть записаны как динамическая система нелинейного уравнения, как показано в уравнении (3)

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{n} \\ \dot{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\wedge}{\rho - \beta} n + \lambda C \\ \underset{\wedge}{\beta} n - \lambda C \end{bmatrix}. \quad (3)$$

В стационарной точке производная уравнений равна нулю, поэтому

$$0 = \underset{\wedge}{\rho^* - \beta} n^* + \lambda C^*, \\ 0 = \underset{\wedge}{\beta} n^* - \lambda C^*.$$

Необходимое условие равновесия может быть установлено путем суммирования двух уравнений в стационарной точке.

$$\rho^* \underset{\wedge}{n^*} = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) указывает на то, что реактивность должна быть равна нулю для установления состояния равновесия. Поскольку как n^* и \wedge положительны, ρ^* должно быть равно нулю для выполнения уравнения (4). Более того, состояние равновесия ядерного реактора является показателем критичности, что можно показать с помощью уравнения (5). Точно так же оценка уравнения (3), когда реактивность равна нулю при критичности, доказывает условие равновесия, показанное в уравнении (2). При критичности K_{eff} равно единице; в результате замена единицы в уравнении (5) дает ноль.

$$\rho = \frac{K_{eff} - 1}{K_{eff}}. \quad (5)$$

На этом этапе мы можем исследовать условия линейной устойчивости вокруг определенных стационарных точек состояний X^* , которыми являются n^* и C^* . Рассмотрим возмущение пере-

менных, как указано в следующем наборе выражений

$$\delta n = n - n^*, \\ \delta C = C - C^*, \\ \delta \rho = \rho - \rho^* = \rho.$$

Подставляем переменные возмущения в уравнение (1), чтобы получить:

$$\delta \dot{n} = \underset{\wedge}{\rho^*} \delta \rho + \underset{\wedge}{\delta \rho \delta n} - \underset{\wedge}{\beta} \delta n + \lambda \delta C, \quad (6) \\ \delta \dot{C} = \underset{\wedge}{\beta} \delta n - \lambda \delta C.$$

При условии $q = 0$ система уравнений (6) математически эквивалентна системе уравнений (1). Однако уравнение (6) является нелинейным уравнением из-за выражения $\underset{\wedge}{\delta \rho \delta n}$, присутствующего в системе уравнений. Следовательно, уравнения точечной кинетики являются линейными только тогда, когда реактивность в системе не меняется со временем. Уравнения точечной кинетики неизменно линейны, когда нет обратной связи по реактивности, такой как обратная связь по температуре и ксеноновой обратной связи. Обратная связь по температуре реактивности происходит из-за обратной связи по реактивности температуры топлива и обратной связи по реактивности температуры охлаждающей жидкости или замедлителя. Таким образом, система уравнений (6) становится линейной, если пренебречь вторым членом $\underset{\wedge}{\delta \rho \delta n}$ в первом уравнении [17, 18].

Новая система уравнений записывается в форме пространства состояний, как указано в уравнении (8). Путем сравнения уравнения (8) со стандартной формой уравнения (7) в пространстве состояний

$$\dot{X} = AX + BU, \quad (7) \\ Y = CX + DU,$$

где X – переменная состояния, A – матрица состояний, B – входная матрица, а U – управляющий вход.

Понятно, что n и c – переменные состояния, ρ – управляющий вход.

$$\begin{bmatrix} \dot{n} \\ \dot{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\wedge}{-\beta} & \lambda \\ \underset{\wedge}{\beta} & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta n \\ \delta C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\wedge}{n^*} \\ 0 \end{bmatrix} \delta \rho. \quad (8)$$

Внутренняя линейная устойчивость

В этом разделе будет показана внутренняя стабильность реактора как аналитически, так и чис-

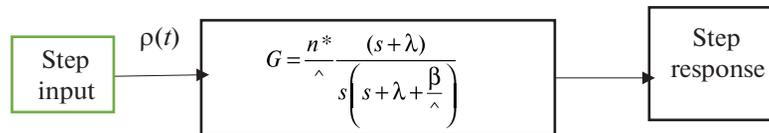


Рис. 1. Передаточная функция разомкнутой системы реактора с уравнениями точечной кинетики.

ленно с помощью Matlab/Simulink. Во-первых, аналитический метод будет проводиться путем вычисления собственного значения уравнения (8). Расчет показывает расположение полюсов системы, поскольку полюс эквивалентен собственным значениям системы.

Собственное значение системы (8) вычисляется следующим образом

$$|A - SI| = 0, \tag{9}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{\Lambda} & \lambda \\ \frac{\beta}{\Lambda} & -\lambda \end{bmatrix},$$

I – единичная матрица; S – скаляр

Об оценке (9): результирующие собственные значения

$$S = 0; \quad \text{и} \quad S = -\left(\frac{\beta}{\Lambda} + \lambda\right).$$

Расположение двух полюсов на основании аналитического решения системы уравнений (8) показывает, что один полюс расположен в начале координат, а другой полюс расположен слева от S -плоскости. Следовательно, можно сделать вывод, что полюс не является асимптотически устойчивым [16].

Следовательно, необходимо реализовать систему управления для стабилизации системы. В системе будут реализованы пропорциональный компенсатор и линейно-квадратичный регулятор. Тем не менее, также необходимо преобразовать систему в форму функции передачи.

Мы применим преобразование Лапласа к уравнению (8) следующим образом:

$$L\{\dot{n}\} = L\left\{\frac{n^*}{\Lambda} \delta\rho - \frac{\beta}{\Lambda} \delta n + \lambda \delta C\right\},$$

$$s\delta N(s) - \delta n(0) = -\frac{\beta}{\Lambda} N(s) + \lambda \delta C(s) + \frac{n^*}{\Lambda} \delta R(s) \tag{10}$$

$$L\{\delta \dot{C}\} = L\left\{\frac{\beta}{\Lambda} \delta n + \lambda \delta C\right\},$$

$$s\delta C(s) - \delta C(0) = \frac{\beta}{\Lambda} N(s) + \lambda \delta C(s). \tag{11}$$

Следовательно, передаточная функция без обратной связи может быть получена путем задания

начальных условий $\delta n(0) = \delta C(0) = 0$. Затем выведем выражение для $\delta C(s)$ в (11)

$$s\delta C(s) = \frac{\beta}{\Lambda} N(s) + \lambda \delta C(s),$$

$$C(s) = \frac{\beta}{\Lambda(s + \lambda)} N(s). \tag{12}$$

Кроме того, подставим уравнение (12) в уравнение (10), чтобы получить

$$s\delta N(s) = -\frac{\beta}{\Lambda} N(s) + \frac{\beta\lambda}{\Lambda(s + \lambda)} \delta N(s) + \frac{n^*}{\Lambda} \delta R(s)$$

$$G(s) = \frac{\delta N(s)}{\delta R(s)} = \frac{n^*}{\Lambda} \cdot \frac{(s + \lambda)}{s\left(s + \lambda + \frac{\beta}{\Lambda}\right)}, \tag{13}$$

где R представляет преобразование Лапласа ρ .

Передаточная функция уравнения точечной кинетики показала аналогичный результат, определенный с использованием метода вычисления собственных значений. Полюса системы равны собственному значению уравнения. В характеристическом уравнении системы два полюса. Один полюс в начале координат служит интегратором, а другой полюс расположен в отрицательной половине S -плоскости.

Кроме того, численное решение уравнения проводилось с использованием Matlab/Simulink. Результат указывает на расходящуюся ступенчатую характеристику, как показано на рис. 2. Следовательно, можно сделать вывод, что система не является ограниченным входом и стабильным ограниченным выходом (ВОВО) в результате полюса в начале координат S -плоскости, который действует как интегратор возбуждения $\rho(t)$ и впоследствии модулированный с множителем $\frac{n^*}{\Lambda}$.

Следовательно, положительная реактивность вызывает монотонный рост нейтронной популяции с увеличением времени, как показано на рис. 2. Кроме того, можно также сделать вывод, что член $\frac{n^*}{\Lambda} \delta\rho$ в первом уравнении (6) служит внешним источником нейтрона, который пропорционален возмущению реактивности [17]. Ясно, что существует по крайней мере одно ограниченное внешнее возмущение, постоянная конечная положительная реактивность, которая приводит к не-

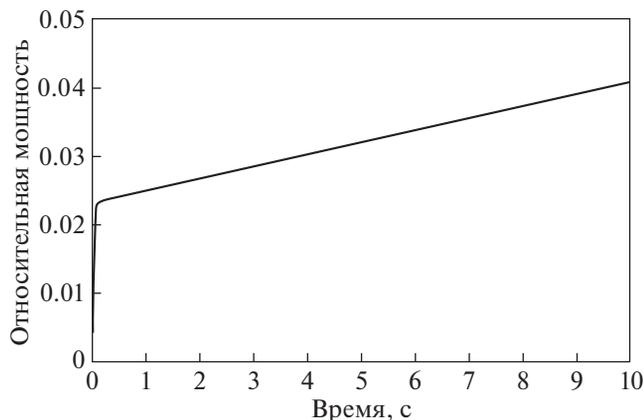


Рис. 2. Естественная динамика нейтрона с уравнением кинетики разомкнутой точки.

ограниченному выходу. Таким образом, система не является стабильной.

Управление активной зоной реактора с помощью модели точечной кинетики

Внутренняя устойчивость уравнения точечной кинетики без обратной связи по реактивности была изучена численно и аналитически в предыдущем разделе. Было показано, что это нестабильная система. Более того, было выявлено, что эффекты обратной связи из-за ксенона, температуры топлива и температурного коэффициента теплоносителя обратной связи по реактивности являются необходимыми условиями для того, чтобы реактивность была равна нулю. Более того, вероятность того, что задача многогрупповой матрицы диффузии будет иметь собственное значение коэффициента размножения нейтронов, точно равное единице, равна нулю [19, 20]. Следовательно, важно применять методы управления для стабилизации системы. В этом разделе к системе без обратной связи по реактивности будет применен пропорциональный компенсатор усиления. Впоследствии линейно-квадратичный ре-

гулятор будет реализован для системы с обратной связью по реактивности.

Замкнутый контур компенсатора пропорционального усиления

Пропорциональный коэффициент компенсации с коэффициентом обратной связи единицы был применен к системе, чтобы сформировать замкнутый контур (рис. 3). Система с обратной связью была реализована в Matlab/Simulink. Для стабилизации системы было предложено несколько значений компенсационного усиления. Было замечено, что установившиеся значения, такие как смещение и постоянные времени, улучшаются с увеличением усиления компенсации. Однако было отмечено, что компенсационный выигрыш с величиной шага 150, 200 и 250 указывает одинаковые характеристики шага. Таким образом, можно сделать вывод, что простой компенсационный выигрыш, применяемый к замкнутой системе, способен стабилизировать систему, несмотря на то, что она не является стабильной ВИВО [18]. Переходная характеристика с компенсационным усилением K показана на рис. 4.

Система с обратной связью, показанная на рис. 3, показывает единичный коэффициент обратной связи и пропорциональное управление с прямой связью. Предполагается, что коэффициент усиления K состоит из сосредоточенных параметров исполнительного механизма (двигателя) и управляющего стержня для простоты.

Здесь следует отметить, что выделенная безусловная устойчивость возможна только тогда, когда в системе отсутствуют внутренние обратные связи реактивности. Однако при температуре более одного градуса по Цельсию возникает обратная связь по реактивности из-за температуры топлива и теплоносителя, и ксенон способствует увеличению нейтронной популяции в системе. Кроме того, управляющее воздействие компенсатора применяется непосредственно к реактивности на основе предположения о сосредоточенных параметрах исполнительного механизма и регулирующих стержней с реактивностью для упроще-

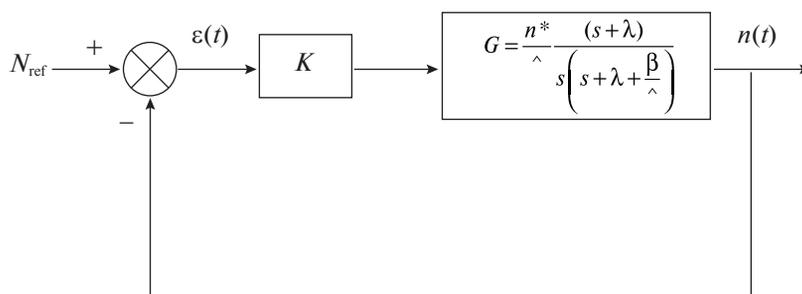


Рис. 3. Система с обратной связью с отрицательной обратной связью.

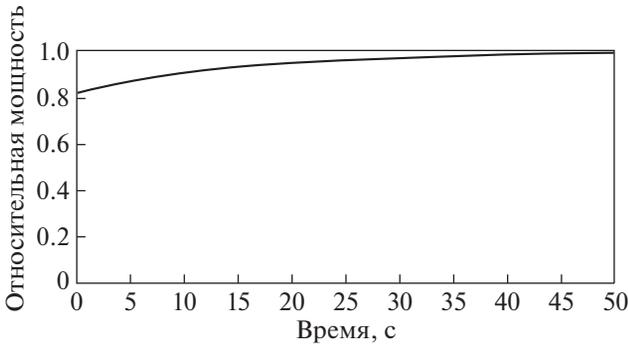


Рис. 4. Переходная характеристика замкнутой системы.

ния. Тем не менее, будет присутствовать нелинейность из-за реальных регулирующих стержней, которые вызывают возмущения реактивности в результате асимметричного движения регулирующих стержней, дискретного времени отбора проб и фазовых задержек, которые вызывают нестабильность системы [17].

Учитывая, что нелинейность из-за обратной связи по реактивности является высокотемпературным явлением и приводит к нестабильности реактора; поэтому необходимо учитывать различные обратные связи при управлении реактором точечной кинетики. Следовательно, в следующем разделе рассматривается реакторная система с обратной связью по реактивности.

Уравнение точечной кинетики с обратными связями

Размножение активной зоны ядерного реактора зависит от таких факторов, как возмущение состава активной зоны в результате выгорания и нарушение геометрии активной зоны из-за теплового расширения. Еще одно возмущение – это изменение нейтронного спектра в результате эффекта Доплера и плотности замедлителя. Все изменения влияют на общую реактивность, которая также зависит от мощности реактора. Следовательно, реактивность является функцией мощности реактора $\rho = \rho(n)$. Теорию возмущений можно использовать для оценки возмущения реактивности в активной зоне ядерного реактора [21] с помощью формулы возмущения, приведенной в уравнении (14).

$$\rho = - \frac{\int \int_0^\infty \Phi^\dagger(r, E) \cdot \left(\delta \sum_a + \delta \sum_f \right) \cdot \Phi(r, E) dE dr}{\int \int_0^\infty \Phi^\dagger(r, E) \cdot \delta \sum_f \cdot \Phi(r, E) dE dr}. \quad (14)$$

Ясно, что уравнение (14) показывает, что реакционная способность зависит от макроскопиче-

ских сечений деления и поглощения. Однако важно определить взаимосвязь между макроскопическими поперечными сечениями и теплогидравлическими переменными или расположением регулирующих стержней в любой конкретный момент времени. В результате применяется более простой подход к расчету реактивности в соответствии с коэффициентом реактивности для определения влияния обратной связи по реактивности на управление и стабильность реактора.

Обратная связь по реактивности

Как правило, коэффициент реактивности обратной связи в результате таких переменных, как температура, может быть определен из соотношения (15)

$$\alpha_x = \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (15)$$

Следовательно, изменение реактивности можно рассчитать по переменной x приблизительно согласно (16)

$$\partial \rho \approx \alpha_x \cdot \partial x. \quad (16)$$

Модель реактора с обратной связью по реактивности

Можно заметить, что уравнение (6) и линеаризованная форма, уравнение (8), не учитывают обратные связи реактивности, такие как обратные связи реактивности по температуре топлива и теплоносителя, выгорание топлива, которое приводит к возникновению обратной связи с эффектом отравления ксеноном и самарием активной зоны реактора. Другие обратные связи, с большими постоянными времени – для которых требуются месяцы и годы, также не учитываются в уравнении.

Следовательно, необходимо моделировать дополнительные теплогидравлические уравнения для учета обратной связи реактивности с температурным коэффициентом, обусловленной топливом и теплоносителем. Другими отзывами, для которых требуются годы или которые имеют более длительные сроки, можно пренебречь [18]. Неучтенные обратные связи не влияют на динамику системы ядерного реактора. Таким образом, они не имеют значительного влияния на управление реактором, за исключением некоторых частных случаев, таких как колебания ксенона в большом ядерном реакторе. Более того, осцилляции ксенона значительны, когда средняя длина миграции нейтронов меньше размера активной зоны [22].

Дополнительные уравнения теплогидравлики моделируются на основе [13]:

$$M_f c_f \frac{dT_f}{dt} = P(t) - \frac{1}{R} [T_f(t) - T_c(t)],$$

$$M_c c_c \frac{dT_c}{dt} = \frac{1}{R} [T_f(t) - T_c(t)] - 2w c_c [T_c(t) - T_i(t)], \quad (17)$$

где M_f – полная масса твэлов; M_c – общая масса теплоносителя;

c_f и c_c – удельная теплоемкость топлива и теплоносителя соответственно;

R – тепловое сопротивление от топлива к охлаждающей жидкости;

w – общий расход теплоносителя; P – мощность реактора;

T_c, T_f, T_i – температура охлаждающей жидкости, температура топлива и температура на входе соответственно.

Кроме того, возмущение переменных в дополнительной теплогидравлической системе, приведенной ниже

$$T_f = T_f^* + \delta T_f; \quad T_i = T_i^* + \delta T_i; \quad T_c = T_c^* + \delta T_c;$$

$$P = P^* + \delta P; \quad w = w^* + \delta w$$

приводит к уравнению (18) при подстановке в уравнение (17).

$$M_f c_f \frac{d}{dt} \delta T_f = P^* - \frac{1}{R} [\delta T_f - \delta T_c],$$

$$M_c c_c \frac{d}{dt} \delta T_c = \frac{1}{R} \delta T_f - \left(\frac{1}{R} \delta T_c + 2w^* c_c \right) \delta T_c + 2w^* c_c \delta T_i + 2c_c (T_i^* - T_c^*) \delta w, \quad (18)$$

Теперь, учитывая обратную связь по температуре, общая реактивность будет представлена как

$$\delta \rho = \delta \rho_{ext} + \alpha_f \delta T_f + \alpha_c \delta T_c \quad \text{или}$$

$$\frac{d}{dt} \delta \rho = \frac{d}{dt} \delta \rho_{ext} + \alpha_f \frac{d}{dt} \delta T_f + \alpha_c \frac{d}{dt} \delta T_c, \quad (19)$$

α_f – коэффициент реактивности топлива, и α_c – коэффициент реактивности теплоносителя.

Модель объекта может быть представлена в форме пространства состояний с помощью уравнений (6), (18) и (19), которые приводят к

$$\dot{X} = Ax + BU,$$

$$X = (\delta n, \delta C, \delta T_f, \delta T_c, \delta \rho)^T; \quad U = \left(\delta T_i, \delta w, \frac{d}{dt} \delta \rho_{ext} \right)^T;$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\wedge} & \lambda & 0 & 0 & \frac{n^*}{\wedge} \\ \frac{\beta}{\wedge} & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b & -b & 0 \\ 0 & 0 & c & -d & 0 \\ g & 0 & h & j & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e & f & 0 \\ e\alpha_c & f\alpha_c & 1 \end{pmatrix};$$

$$a = \frac{n^*}{M_f c_f}; \quad b = \frac{1}{RM_f c_f}; \quad c = \frac{1}{RM_c c_c};$$

$$d = c + \frac{2w^*}{M_c}; \quad e = d - c; \quad f = \frac{2(T_i - T_c)}{M_c};$$

$$g = b\alpha_f; \quad h = c\alpha_c - b\alpha_f; \quad j = b\alpha_f - d\alpha_c.$$

Для дальнейшего упрощения модели сделаны следующие предположения. Если рассматривать расход охлаждающей жидкости и температуру на входе как константы, входная матрица B уменьшается до пяти на одну матрицу. В результате мощность внешней реактивности остается единственным входом системы управления. Кроме того, введение общего веса стержня устанавливает линейную зависимость между скоростью регулирующего стержня и внешней реактивностью, как показано в уравнении (20)

$$\frac{d}{dt} \delta \rho_{ext} = \rho_w V_r, \quad (20)$$

где V_r – нормализованная скорость стержня; ρ_w – общий вес стержня.

На основе предположений, приведших к уравнению (20), пятое состояние в матрице состояний A становится $\delta \rho_{ext}$ вместо $\delta \rho$, а входом системы становится нормированная скорость V_r . Поэтому окончательная модель системы представлена ниже.

$$\dot{X} = AX + BU,$$

$$X = (\delta n, \delta C, \delta T_f, \delta T_c, \delta \rho_{ext})^T; \quad U = V_r;$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\wedge} & \lambda & \frac{\alpha_f}{\wedge} & \frac{\alpha_c}{\wedge} & \frac{n^*}{\wedge} \\ \frac{\beta}{\wedge} & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b & -b & 0 \\ 0 & 0 & c & -d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho_w \end{pmatrix}.$$

Параметры реактора в [13] используются в этом исследовании для проведения процедур моделирования.

3. ОПТИМАЛЬНЫЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫЙ РЕГУЛЯТОР

Линейно-квадратичный регулятор – это типичный тип задачи оптимального управления, который имеет дело с управлением динамической системой с минимальными затратами. Целевая функция, которая связана с характеристиками производительности системы, является квадратичной по состоянию и управляющему входу, как показано в формуле (21). Следовательно, линейно-квадратичный регулятор (LQR) предлагает оптимальное управление для системы, которая

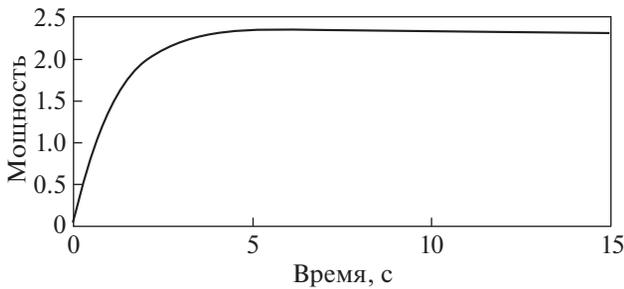


Рис. 5. Переход мощности с Q и R равными 0.000001 и 1 соответственно.

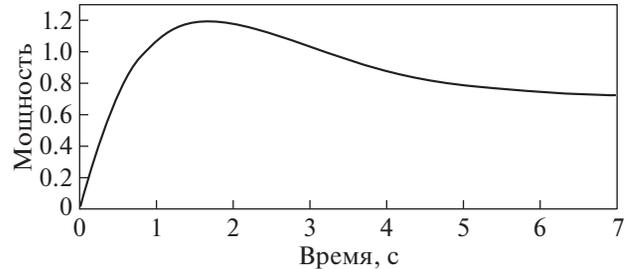


Рис. 6. Ступенчатая характеристика мощности с Q и R равных 0.00001 и 1 соответственно.

является линейной с квадратичным показателем производительности [23]. Установлено, что закон управления с обратной связью:

$$u = -Kx, \quad c \quad K = R^{-1}B^T P$$

минимизирует целевую функцию Eq. (21), где $P > 0$ – решение алгебраического уравнения Риккати (22)

$$J = \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (21)$$

$$Q + A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P = 0. \quad (22)$$

Кроме того, LQR обладает достаточно большим запасом устойчивости по усилению не менее 0.5 и запасом по фазе не менее $\pm 60^\circ$ [24]. Из уравнения (21) видно, что функция стоимости J дает взвешенную сумму энергии состояния и управления. Если R очень велико по отношению к Q , это означает, что энергия управления сильно снижается, усилие управления уменьшится за счет большего значения для состояния. Физически это означает небольшую мощность двигателя привода исполнительного механизма, необходимую для реализации закона управления. Точно так же, если Q намного больше, чем R , это означает, что рассогласование системы увеличивается, усилие управления возрастает, чтобы уменьшить рассогласование, что приводит к демпфированию системы [25]. В большинстве случаев величина управляющего воздействия сильно уменьшается, чтобы оптимизировать производительность системы.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Настройка системы выполняется для достижения оптимальных параметров по уменьшению величины перерегулирования, скорости реакции системы, времени установления и стабилизации. Для оценки переходного режима рассматривается ступенчатое увеличение полной мощности реактора. Настройка выполняется путем изменения

весовых коэффициентов q и r , элементов матрицы Q и R , соответственно, как показано в уравнении (23), до тех пор, пока не будут достигнуты требуемые характеристики переходной характеристики. Весовое значение q ограничивает значение состояний системы, таких как мощность и величина запаздывающих нейтронов. Соответственно, на качество управления будет влиять величина веса r – управляющего воздействия, поскольку это значение также изменяется в процессе эксплуатации ядерной установки в пределах компании реактора. Результаты моделирования показали, что с увеличением значения r скорость регулирования уменьшается, при этом реакция системы на возмущающие воздействия становится меньше. В результате был определен компромисс между быстродействием системы и реакцией системы на возмущающие воздействия на основе желаемых технических характеристик системы. Значения q и r были определены равными 0.000002 и 1 соответственно. Кроме того, коэффициент усиления обратной связи составляет [0.0001, 0.1479, 0.0002, 0.0000, 23.8826], что, следовательно, подтверждает результаты моделирования.

$$Q = I(5); \quad \text{и} \quad R = r \quad (23)$$

Ограничение на управляющее воздействие поддерживается на уровне 1, в то время как ограничения на переменную состояния изменяются. Рисунки 5 и 8 показывают, что весовые значения q и r , равные 0.000001 и 1, соответственно, приводят к самому медленному отклику системы и оказывают наименьшую управляющую энергию на механизм управляющей тяги для достижения максимальной скорости. Точно так же рисунки 6 и 9 показывают, что весовые значения q и 0.00001 и 1 соответственно для состояния системы и управления приводят к перерегулированию, скачку мощности из-за скачкообразного изменения мощности. Следовательно, наблюдалась самая высокая величина управляющего воздействия на исполнительном механизме, которая дает самое высокое быстродействие системы среди трех результатов моделирования. Также

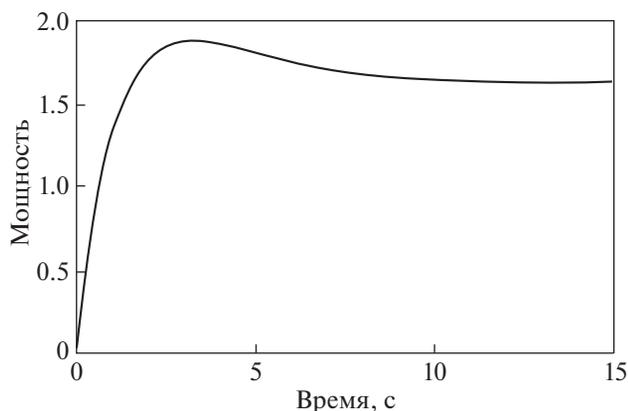


Рис. 7. Ступенчатая характеристика мощности с Q и R равными 0.000002 и 1 соответственно.

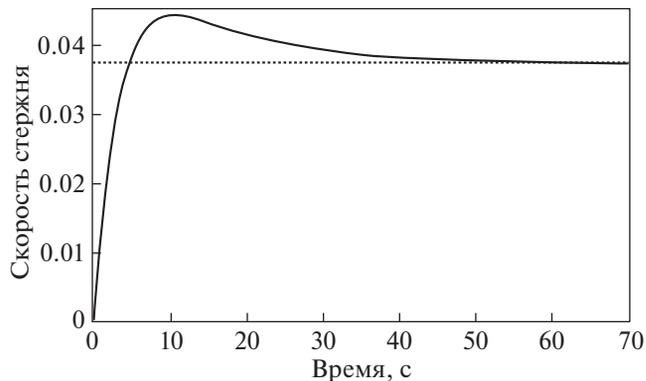


Рис. 8. Переходная характеристика скорости регулирующего стержня с Q и R равными 0.000001 и 1 соответственно.

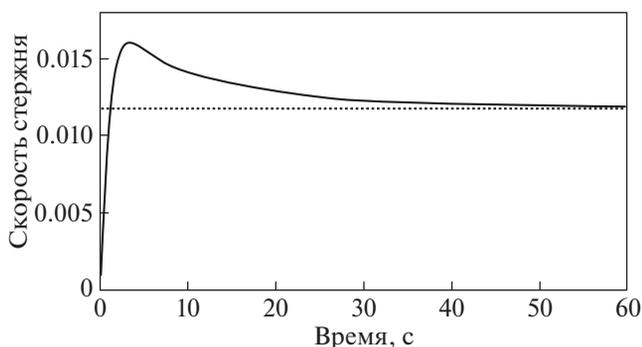


Рис. 9. Переходная характеристика скорости регулирующего стержня с Q и R равными 0.00001 и 1 соответственно.

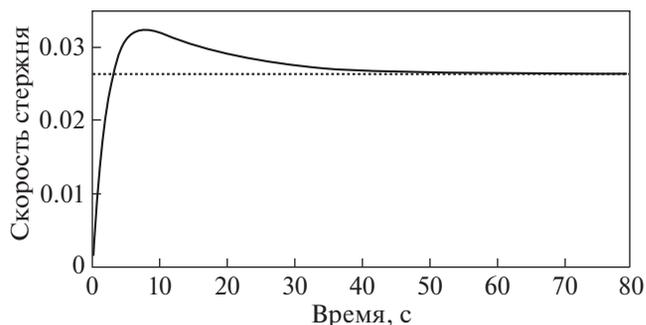


Рис. 10. Переходная характеристика скорости регулирующего стержня с Q и R равными 0.000002 и 1 соответственно.

были получены условия, при которых на исполнительный механизм воздействовало наименьшее управляющее воздействие, как показано на рис. 9. Более того, весовые значения q и r , равные 0.000002 и 1 соответственно, приводят к минимальной величине перерегулирования, отклонению по мощности, которое требует меньших затрат ресурса управления для достижения более высокого качества регулирования. Следовательно, при выбранном типе регулирования, исполнительный механизм затрачивает меньшую энергию управления для достижения оптимальной скорости отклика, стабилизации и времени установления регулируемого параметра.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнения кинетики точечного реактора с одноклассовой моделью запаздывающих нейтронов были применены в данной работе для анализа устойчивости ядерного реактора. Анализ устойчивости проводился при двух условиях. Первый анализ был проведен без обратной связи по реак-

тивности, и было обнаружено, что ядерный реактор асимптотически неустойчив. В данной работе показано, что коэффициент пропорциональной обратной связи стабилизирует систему. Однако безусловная стабильность за счет пропорционального усиления обратной связи возможна, когда в системе нет обратной связи по реактивности.

Следовательно, при моделировании реактора с использованием уравнений точечной кинетики учитывались температурная обратная связь по реактивности, теплоноситель и топливо. Получены и линеаризованы дифференциальные уравнения пяти порядков. Кроме того, была разработана оптимальная система управления на основе линейно-квадратичного регулятора для достижения желаемых характеристик качества управления, таких как уменьшение перерегулирования, времени установления и времени стабилизации. Значения Q и R для системы управления LQR были настроены и определены как 0.000002 и 1 соответственно. Эксперименты по моделированию показали, что оптимальная стратегия управления

позволяет достичь желаемых характеристик при минимальных затратах по управлению. Было показано, что примененный метод оптимального управления предлагает гибкость при управлении переменными состояниями системы и снижает усилия управления для достижения желаемых качественных характеристик управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ben-Abdennour A., Lee K.Y., Edwards R.M.* LQG/LTR Robust Control of Nuclear Reactors with Improved Temperature Performance // *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 1992. V. 39. P. 2286–2294.
<https://doi.org/10.1109/23.211438>
2. *Kinard M., Allen E.J.* Efficient numerical solution of the point kinetics equations in nuclear reactor dynamics // *Ann. Nucl. Energy.* 2004. V. 31. P. 1039–1051.
<https://doi.org/10.1016/j.anucene.2003.12.008>
3. *Duderstadt J.J.* Nuclear reactor analysis. Wiley, 1976.
4. *Hetrick D.L.* Dynamics of nuclear reactors. University of Chicago Press, 1971.
5. *Ansarifar G.R., Akhavan H.R.* Sliding mode control design for a PWR nuclear reactor using sliding mode observer during load following operation // *Ann. Nucl. Energy.* 2015. V. 75. P. 611–619.
<https://doi.org/10.1016/j.anucene.2014.09.019>
6. *Ansarifar G.R., Saadatzi S.* Sliding Mode Control for Pressurized-Water Nuclear Reactors in load following operations with bounded xenon oscillations // *Ann. Nucl. Energy.* 2015. V. 76. P. 209–217.
<https://doi.org/10.1016/j.anucene.2014.09.059>
7. *Abdulraheem K.K., Andreevich S., Laidani Z.* A differentiator based second-order sliding-mode control of a pressurized water nuclear research reactor considering Xenon concentration feedback // *Ann. Nucl. Energy.* 2021. V. 156. 108193.
<https://doi.org/10.1016/j.anucene.2021.108193>
8. *Abdulraheem K.K., Korolev S.A.* Robust optimal-integral sliding mode control for a pressurized water nuclear reactor in load following mode of operation // *Ann. Nucl. Energy.* 2021. V. 158. 108288.
<https://doi.org/10.1016/j.anucene.2021.108288>
9. *Zaidabadi nejad M., Ansarifar G.R.* Robust feedback-linearization control for axial power distribution in pressurized water reactors during load-following operation // *Nucl. Eng. Technol.* 2018. V. 50. P. 97–106.
<https://doi.org/10.1016/j.net.2017.10.013>
10. *Mousakazemi S.M.H., Ayoobian N., Ansarifar G.R.* Control of the reactor core power in PWR using optimized PID controller with the real-coded GA // *Ann. Nucl. Energy.* 2018. V. 118. P. 107–121.
<https://doi.org/10.1016/j.anucene.2018.03.038>
11. *Liu C., Peng J.F., Zhao F.Y., Li C.* Design and optimization of fuzzy-PID controller for the nuclear reactor power control // *Nucl. Eng. Des.* 2009. V. 239. P. 2311–2316.
<https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2009.07.001>
12. *Rafiei M., Ansarifar G.R., Hadad K.* Core Power Control of a Nuclear Research Reactor during Power Maneuvering Transients Using Optimized PID-Controller Based on the Fractional Neutron Point Kinetics Model with Reactivity Feedback Effects // *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 2019. V. 66. P. 1804–1812.
<https://doi.org/10.1109/TNS.2019.2922374>
13. *Lee Y.J.* The Control Rod Speed Design for the Nuclear Reactor Power Control Using Optimal Control Theory // *Nucl. Eng. Technol.* 1994. V. 26 (4). P. 536–547.
14. *Arab-Alibeik H., Setayeshi S.* Improved Temperature Control of a PWR Nuclear Reactor Using an LQG/LTR Based Controller // *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 2003. V. 50. P. 211–218.
<https://doi.org/10.1109/TNS.2002.807860>
15. *Saif M.* A Novel Approach for Optimal Control of A Pressurized Water Reactor // *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 1989. V. 36. P. 1317–1325.
<https://doi.org/10.1109/TNS.1989.574131>
16. *Shimjith S.R., Tiwari A.P., Naskar M., Bandyopadhyay B.* Space-time kinetics modeling of Advanced Heavy Water Reactor for control studies // *Ann. Nucl. Energy.* 2010. V. 37. P. 310–324.
<https://doi.org/10.1016/j.anucene.2009.12.011>
17. *Theiler G.G., Bonetto F.J.* On the stability of the point reactor kinetics equations // *Nucl. Eng. Des.* 2010. V. 240. P. 1443–1449.
<https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2010.03.007>
18. *Lewins J.* Nuclear reactor kinetics and control. Elsevier, 2013.
19. *Henry A.F.* Nuclear Reactor Analysis. MIT Cambridge, 1975.
20. *Stacey W.M.* Nuclear Reactor Physics: Second Edition, 2007.
<https://doi.org/10.1002/9783527611041>
21. *Bell S., Glasstone G.I.* Nuclear reactor theory (No. TID-25606), US Atomic Energy Commission, Washington, DC (United States), 1970.
22. *Obaidurrahman K., Doshi J.B.* Spatial instability analysis in pressurized water reactors // *Ann. Nucl. Energy.* 2011. V. 38. P. 286–294.
<https://doi.org/10.1016/j.anucene.2010.10.015>
23. *Burns R.* Advanced control engineering. Elsevier, 2001.
24. *Levine W.S.* The Control Handbook (three volume set). CRC Press, 2018.
25. *Stefani R.T.* Design of feedback control systems. Oxford University Press, Inc., 1993.

Optimal Control Based on a Linear-Quadratic Regulator for Controlling a Nuclear Reactor

K. K. Abdulrahim^{a,b,#}, A. O. Tolokonkiy^a, Z. Laidani^a, and R. Berreksi^a

^a National Research Nuclear University MEPHI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

^b Nigerian Atomic Energy Commission, Abuja, 900288 Nigeria

[#]e-mail: kamalabdulraheem@gmail.com; kabdulrahim@mephi.ru

Received December 22, 2021; revised December 23, 2021; accepted December 30, 2021

Abstract—Nuclear reactors are widely used in various fields of human activity, for example, for the production of electricity, the production of isotopes, for educational and research purposes, as well as in space engines. Despite their useful purpose, they pose a danger to humans and society due to hazardous radionuclides generated during operation. Therefore, it is imperative to perform actions that reduce the release of radionuclides into the environment. These activities include operating a nuclear reactor under stable conditions and complete control over the system. In this study, the control of the nuclear reactor using a linear-quadratic regulator of the optimal control method is carried out using a nonlinear model of the rigid-point kinetic equation with one group delayed neutron. First, it is shown that the nuclear reactor is asymptotically unstable. Moreover, there are unlimited input and limited output. As a result, a proportional gain compensator is applied to the system to form a closed loop system that stabilizes the system. In addition, the system takes into account reactivity feedback by combining the equations of point kinetics and additional equations of thermal hydraulics. The simulated equation is linearized and a linear quadratic control strategy is applied to achieve performance specifications such as minimum overshoot, settling time, and system stabilization. The simulation results have been confirmed by previous studies.

Keywords: linear-quadratic controller, point kinetics equation, limited input and output, reactivity feedback, power jump

DOI: 10.1134/S2304487X21050023

REFERENCES

1. Ben-Abdenour A., Lee K.Y., Edwards R.M., LQG/LTR Robust Control of Nuclear Reactors with Improved Temperature Performance, *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 1992, vol. 39, pp. 2286–2294. <https://doi.org/10.1109/23.211438>.
2. Kinard M., Allen E.J., Efficient numerical solution of the point kinetics equations in nuclear reactor dynamics, *Ann. Nucl. Energy*, 2004, vol. 31, pp. 1039–1051. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2003.12.008>.
3. Duderstadt J.J., *Nuclear reactor analysis*. Wiley, 1976.
4. Hetrick D.L., *Dynamics of nuclear reactors*, University of Chicago Press, 1971.
5. Ansarifar G.R., Akhavan H.R., Sliding mode control design for a PWR nuclear reactor using sliding mode observer during load following operation, *Ann. Nucl. Energy*, 2015, vol. 75, pp. 611–619. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2014.09.019>.
6. Ansarifar G.R., Saadatzi S., Sliding Mode Control for Pressurized-Water Nuclear Reactors in load following operations with bounded xenon oscillations, *Ann. Nucl. Energy*, 2015, vol. 76, pp. 209–217. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2014.09.059>.
7. Abdulraheem K.K., Andreevich S., Laidani Z., A differentiator based second-order sliding-mode control of a pressurized water nuclear research reactor considering Xenon concentration feedback, *Ann. Nucl. Energy*, 2021, vol. 156, 108193. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2021.108193>.
8. Abdulraheem K.K., Korolev S.A., Robust optimal-integral sliding mode control for a pressurized water nuclear reactor in load following mode of operation, *Ann. Nucl. Energy*, 2021, vol. 158, 108288. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2021.108288>.
9. Zaidabadi nejad M., Ansarifar G.R., Robust feedback-linearization control for axial power distribution in pressurized water reactors during load-following operation, *Nucl. Eng. Technol.*, 2018, vol. 50, pp. 97–106. <https://doi.org/10.1016/j.net.2017.10.013>.
10. Mousakazemi S.M.H., Ayoobian N., Ansarifar G.R., Control of the reactor core power in PWR using optimized PID controller with the real-coded GA, *Ann. Nucl. Energy*, 2018, vol. 118, pp. 107–121. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2018.03.038>.

11. Liu C., Peng J.F., Zhao F.Y., Li C., Design and optimization of fuzzy-PID controller for the nuclear reactor power control, *Nucl. Eng. Des.*, 2009, vol. 239, pp. 2311–2316.
<https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2009.07.001>.
12. Rafiei M., Ansarifar G.R., Hadad K., Core Power Control of a Nuclear Research Reactor during Power Maneuvering Transients Using Optimized PID-Controller Based on the Fractional Neutron Point Kinetics Model with Reactivity Feedback Effects, *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 2019, vol. 66, pp. 1804–1812.
<https://doi.org/10.1109/TNS.2019.2922374>.
13. Lee Y.J., The Control Rod Speed Design for the Nuclear Reactor Power Control Using Optimal Control Theory, *Nucl. Eng. Technol.*, 1994, vol. 26 (4), pp. 536–547.
14. Arab-Alibeik H., Setayeshi S., Improved Temperature Control of a PWR Nuclear Reactor Using an LQG/LTR Based Controller. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 2003, vol. 50, pp. 211–218.
<https://doi.org/10.1109/TNS.2002.807860>.
15. Saif M., A Novel Approach for Optimal Control of A Pressurized Water Reactor, *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 1989, vol. 36, pp. 1317–1325.
<https://doi.org/10.1109/TNS.1989.574131>.
16. Shimjith S.R., Tiwari A.P., Naskar M., Bandyopadhyay B., Space-time kinetics modeling of Advanced Heavy Water Reactor for control studies, *Ann. Nucl. Energy*, 2010, vol. 37, pp. 310–324.
<https://doi.org/10.1016/j.anucene.2009.12.011>.
17. Theler G.G., Bonetto F.J., On the stability of the point reactor kinetics equations. *Nucl. Eng. Des.*, 2010, vol. 240, pp. 1443–1449.
<https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2010.03.007>.
18. Lewins J., *Nuclear reactor kinetics and control*, Elsevier, 2013.
19. Henry A.F., *Nuclear Reactor Analysis*, MIT Cambridge, 1975.
20. Stacey W.M., *Nuclear Reactor Physics, Second Ed.*, 2007. <https://doi.org/10.1002/9783527611041>.
21. Bell S., Glasstone G.I., *Nuclear reactor theory* (No. TID-25606), US Atomic Energy Commission, Washington, DC (United States), 1970.
22. Obaidurrahman K., Doshi J.B., Spatial instability analysis in pressurized water reactors, *Ann. Nucl. Energy*, 2011, vol. 38, pp. 286–294.
<https://doi.org/10.1016/j.anucene.2010.10.015>.
23. Burns R., *Advanced control engineering*, Elsevier, 2001.
24. Levine W.S., *The Control Handbook (three volume set)*, CRC Press, 2018.
25. Stefani R.T., *Design of feedback control systems*, Oxford University Press, Inc., 1993.