

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 532.527

ТОЧЕЧНЫЕ ВИХРИ И ПОЛИНОМЫ: ПРОГРАММНЫЙ КОД ДЛЯ ТЕСТИРОВАНИЯ ПОЛИНОМОВ, СВЯЗАННЫХ С ТОЧЕЧНЫМИ ВИХРЯМИ НА ПЛОСКОСТИ

© 2021 г. А. А. Байрамуков^{1,*}, Н. А. Кудряшов¹, А. А. Кутуков¹

¹ Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

*e-mail: alim.bayr@gmail.com

Поступила в редакцию 04.02.2022 г.

После доработки 05.02.2022 г.

Принята к публикации 08.02.2022 г.

Для конфигурации вихрей из $2n$ вихрей интенсивности Γ , лежащих на прямой, и одного вихря интенсивности $\rho\Gamma$, расположенного в центре завихренности, получено в явном виде дифференциальное уравнение, полиномиальные решения которого определяют стационарные положения вихрей, входящие в данную конфигурацию. Обоснована процедура обобщения дифференциальных уравнений, связанных со стационарными положениями вихрей, необходимая для получения общего дифференциального уравнения для стационарной конфигурации вихрей. Описан алгоритм обобщения дифференциальных уравнений — внесения в дифференциальные уравнения параметров, отражающих эквивалентность стационарных положений вихрей, получаемых друг из друга преобразованиями поворота, растяжения и сдвига. Представлены обобщенные дифференциальные уравнения для некоторых стационарных конфигураций вихрей. Предложена процедура тестирования полиномов для определения стационарных конфигураций вихрей. Разработан алгоритм тестирования полиномов, позволяющий проверить, являются ли тестируемые полиномы решением обобщенного ДУ некоторой стационарной конфигурации вихрей. Для проверки полиномов, исходя из тестируемых полиномов и обобщенного дифференциального уравнения, составляется система алгебраических уравнений относительно параметров обобщенного ДУ. Существование решения этой системы соответствует тому, что тестируемые полиномы удовлетворяют рассматриваемой стационарной конфигурации. Описана архитектура и алгоритм работы программы, автоматизирующей тестирование полиномов для определения стационарных конфигураций вихрей.

Ключевые слова: точечные вихри, конфигурации точечных вихрей, метод порождающих полиномов

DOI: 10.56304/S2304487X2106002X

1. ВВЕДЕНИЕ

Движение системы N точечных вихрей на плоскости описывается системой уравнений [9]

$$\frac{d\bar{z}_\alpha}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\beta=1}^N \frac{\Gamma_\beta}{z_\alpha - z_\beta}, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (1.1)$$

где $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$ — комплексная координата α -го точечного вихря, Γ_α — его интенсивность, $\bar{z}$ означает комплексное сопряжение к z . Штрих возле знака суммы здесь и далее будет означать, что суммирование производится по всем индексам, которые не обращают в нуль знаменатель члена суммирования.

Известно, что система (1.1) допускает решение, при которых геометрия положения точечных вихрей на плоскости в любой момент времени подобна геометрии начального положения точечных вихрей. Такие начальные положения

точечных вихрей называются *стационарными*, и можно показать, что соответствующие им движения вихрей бывают 4-х типов: равновесие (неподвижные вихри), трансляция (равномерное и прямолинейное движение вихрей), относительное равновесие (равномерно-вращательное движение вихрей) и коллапс (стягивание вихрей в одну точку или разбегание вихрей из одной точки). Стационарные положения точечных вихрей, получаемые друг из друга растяжением, сдвигом и поворотом плоскости, являются эквивалентными: эти преобразования сохраняют характер движения вихрей. Классы эквивалентности стационарных положений точечных вихрей называют конфигурациями [2].

На данный момент исследователями обнаружено и изучено множество конфигураций точечных вихрей на плоскости [3–5]. Для исследования свойств конфигураций вихрей был разработан метод, названный методом порождающих

полиномов [6, 7]. Этот метод позволяет получать для некоторых конфигураций вихрей дифференциальные уравнения (в этой работе будем называть их “порождающими ДУ”), полиномиальные решения которых — порождающие полиномы — с необходимостью определяют некоторое стационарное положение вихрей.

На данный момент не разработан способ, позволяющий для произвольного полинома точно определить, соответствует ли он некоторой конфигурации вихрей. При этом не для всех порождающих ДУ доказано, что для них известны *все* полиномиальные решения. Так, например, долгое время не было известно, что полиномы Адлера–Мозера не являются уникальными полиномиальными решениями уравнения Ткаченко, связанного с равновесной конфигурацией вихрей разных знаков, но равной по модулю интенсивности [8].

Таким образом, единственным доступным сейчас способом проверить, определяют ли заданные полиномы некоторую конфигурацию вихрей, является перебор порождающих ДУ известных конфигураций и проверка каждого из них на соответствие ему заданных полиномов (назовем всю процедуру “тестирование полиномов”). Такая проверка не может позволить утверждать, что тестируемые полиномы не определяют *никакую* конфигурацию вихрей, поскольку кроме тех, что уже известны, могут существовать и другие конфигурации вихрей. Однако тестированием полиномов возможно обнаружить, если таковые существуют, ранее неизвестные полиномиальные решения порождающих ДУ известных конфигураций вихрей.

Порождающие ДУ, представленные в периодической литературе, часто связаны с некоторым конкретным стационарным положением вихрей, представляющим всю конфигурацию, выбранным из соображений удобства. Например, при исследовании некоторой конфигурации, центр завихренности (если он существует) принято совмещать с началом системы координат. Это приводит к тому, что порождающее ДУ, полученное для некоторого конкретного стационарного положения вихрей, в общем случае может не обращаться в тождество порождающим полиномом другого стационарного положения вихрей из этой же конфигурации. Для решения этой проблемы в работе предложена процедура обобщения дифференциального уравнения — внесения в ДУ параметров, связанных с преобразованиями плоскости, сохраняющими углы.

Данная работа посвящена описанию программного обеспечения, автоматизирующего тестирование полиномов. Вторая часть работы будет посвящена получению порождающих ДУ. В третьей части будет описана процедура обобщения порождающих ДУ. В четвертой части работы

будут описаны архитектура и алгоритм работы программного обеспечения для тестирования полиномов.

2. ПОРОЖДАЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Суть метода порождающих полиномов заключается в отождествлении множества точечных вихрей, заданных набором комплексных координат z_α , $\alpha = 1, \dots, N$, с полиномом

$$P(z) = \prod_{\alpha=1}^N (z - z_\alpha), \quad (2.1)$$

и использовании этой связи для определения свойств конфигурации вихрей. Полином (2.1) называется *порождающим полиномом* для соответствующего множества точечных вихрей.

Исходя из определения (2.1), получаются выражения для производных от $P(z)$:

$$P' = P \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{z - z_\alpha}, \quad (2.2)$$

$$P'' = P \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{1}{z - z_\alpha} \frac{1}{z - z_\beta}, \quad (2.3)$$

и т.д.

Из равенств вида (2.2), (2.3) для производных полиномов и конкретного вида системы (1.1), определяемого изучаемой конфигурацией вихрей, с помощью алгебраических преобразований получают *порождающие ДУ* — дифференциальные уравнения, полиномиальные решения которых с необходимостью будут определять стационарные положения вихрей, входящие в изучаемую конфигурацию.

Таким образом, например, для конфигурации из N вихрей равной интенсивности, расположенных на прямой, находящихся в относительном равновесии, с помощью метода порождающих полиномов можно получить порождающее ДУ [4]

$$P''(z) - 2zP'(z) + 2NP(z) = 0. \quad (2.4)$$

Известно, что полиномы Эрмита степени N являются единственными полиномиальными решениями (2.4). Полином Эрмита степени N является порождающим полиномом для множества из N вихрей интенсивности $\Gamma = 2\pi\Omega$, расположенных на оси действительных чисел, где Ω — угловая скорость вращения вихрей вокруг центра координат.

Порождающим ДУ равновесной конфигурации вихрей разных знаков, но равной по модулю интенсивности, является уравнение Ткаченко:

$$QP'' + PQ'' = 2P'Q', \quad (2.5)$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — порождающие полиномы для положительных и отрицательных вихрей системы соответственно. Как было указано выше, полиномы Адлера—Мозера не являются уникальными полиномиальными решениями уравнения Ткаченко [8]. В этом заключается необходимость тестирования полиномов на удовлетворение порождающих ДУ вместо сравнения полиномов непосредственно с порождающими полиномами известных конфигураций. Такой подход позволит исключить ложноотрицательные результаты при тестировании полиномов.

В случае $N = 2n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) вихрей интенсивности Γ , расположенных на прямой, один из них (“центральный”) будет располагаться в центре завихренности. Очевидно, что система будет так же вращаться вокруг центра завихренности, если интенсивность центрального вихря будет отличаться от интенсивностей остальных вихрей. Пусть интенсивность центрального вихря будет равна $p\Gamma$. Тогда порождающий полином рассматриваемой конфигурации выражается через обобщенный полином Лагерра $L[n, \alpha](z)$ [3]:

$$P(z) = zL(z^2), \quad (2.6)$$

где $L(z) = L[n, p - 1/2](z)$.

Получим теперь в явном виде порождающее ДУ, связанное с рассматриваемой конфигурацией. Уравнение, определяющее обобщенный полином Лагерра $L[n, \alpha](z)$:

$$zL''(z) + (\alpha + 1 - z)L'(z) + nL(z) = 0. \quad (2.7)$$

Из (2.6) получим выражения для первой и второй производных от $P(z)$:

$$P'(z) = L(z^2) + 2z^2L'(z^2), \quad (2.8)$$

$$P''(z) = 6zL'(z^2) + 4z^3L''(z^2). \quad (2.9)$$

В точке z^2 из (2.7) получим следующее соотношение:

$$z^2L''(z^2) + (\alpha + 1 - z^2)L'(z^2) + nL(z^2) = 0. \quad (2.10)$$

Подставив в (2.9) $L''(z^2)$, $L'(z^2)$ и $L(z^2)$, выраженные из (2.10), (2.8) и (2.6) соответственно, получаем дифференциальное уравнение относительно $P(z)$:

$$z^2P''(z) - z(2z^2 - 2\alpha + 1)P'(z) + ((4n + 2)z^2 - 2\alpha + 1)P(z) = 0. \quad (2.11)$$

Параметры p и α , N и n связаны, согласно (2.6), соотношениями

$$\alpha = p - \frac{1}{2}, \quad n = \frac{N - 1}{2}. \quad (2.12)$$

С учетом (2.12) уравнение (2.11) примет вид

$$z^2P''(z) - 2z(z^2 - p + 1)P'(z) + 2(Nz^2 - p + 1)P(z) = 0. \quad (2.13)$$

Это уравнение и будет порождающим ДУ рассматриваемой конфигурации, которое теперь возможно использовать для тестирования полиномов.

Порождающие ДУ обычно связаны с конкретными стационарными положениями вихрей (получены с некоторыми допущениями, упрощающими вывод уравнений). Чтобы обобщить порождающее ДУ на всю конфигурацию вихрей, необходимо провести процедуру обобщения дифференциального уравнения.

3. ОБОБЩЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Проблема, решаемая обобщением дифференциальных уравнений — внесением в них параметров, связанных с преобразованиями сдвига, растяжения и поворота — заключается в том, что если полином $Q(z)$ является решением дифференциального уравнения $D[f, z]$ порядка n :

$$D[f, z] := D(f^{(n)}, \dots, f'', f', f, z) = 0, \quad (3.1)$$

то в общем случае полином $P(z) = Q(\tilde{a}z + \tilde{b})$, где $\tilde{a} \neq 0$, решением уравнения $D[f, z]$ не является, хотя если $Q(z)$ определяет стационарное положение вихрей, то $Q(\tilde{a}z + \tilde{b})$ при $\tilde{a} \neq 0$ так же определяет стационарное положение вихрей [2].

Для решения этой задачи необходимо из исходного уравнения $D[f, z]$ получить обобщенное уравнение $E[f, z]$, содержащее дополнительные параметры $a \neq 0$ и b , решением которого был бы всякий полином $P(z) = Q(\tilde{a}z + \tilde{b})$ (т.е. для любых $\tilde{a}, \tilde{b}$) при $a = \tilde{a}$ и $b = \tilde{b}$.

Производные порядка k от полиномов $P(z)$ и $Q(z)$ связаны соотношениями

$$P(z)^{(k)} = \tilde{a}^k Q(\tilde{a}z + \tilde{b})^{(k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

Если $Q(z)$ — решение $D[f, z]$, в точке $az + b$ из (3.1) получим следующее соотношение:

$$D(Q(\tilde{a}z + \tilde{b})^{(n)}, \dots, Q'(\tilde{a}z + \tilde{b}), Q(\tilde{a}z + \tilde{b}), \tilde{a}z + \tilde{b}) = 0. \quad (3.3)$$

Выразив из (3.2) значения $Q(\tilde{a}z + \tilde{b})^{(k)}$ для $k = 0, \dots, n$ и подставив в (3.3), получим дифференциальное уравнение, решением которого будет $P(z) = Q(\tilde{a}z + \tilde{b})$:

$$D\left(\frac{1}{\tilde{a}^n} P(z)^{(n)}, \dots, \frac{1}{\tilde{a}^2} P''(z), \frac{1}{\tilde{a}} P'(z), P(z), \tilde{a}z + \tilde{b}\right) = 0.$$

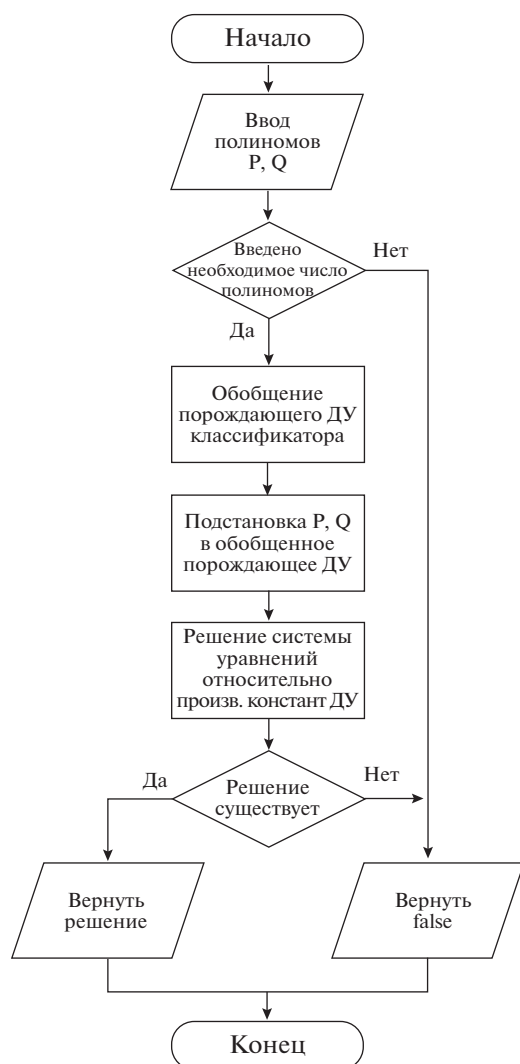


Рис. 1. Блок-схема алгоритма работы классификатора.

Таким образом, искомое обобщенное уравнение $E[f, z]$ будет связано с исходным уравнением следующим соотношением:

$$E[f, z] := D\left(\frac{1}{a^n} f(z)^{(n)}, \dots, \frac{1}{a^2} f(z)''', \frac{1}{a} f(z)', f(z), az + b\right) = 0.$$

Представим обобщения уравнений рассмотренных ранее конфигураций. Обобщенное уравнение для (2.4) имеет следующий вид:

$$P''(z) - 2a(az + b)P'(z) + 2a^2NP(z) = 0.$$

Для (2.13) имеем

$$(az + b)^2 P''(z) - 2a(az + b)((az + b)^2 - p + 1)P'(z) + 2a^2(N(az + b)^2 - p + 1)P(z) = 0.$$

Обобщенное уравнение для (2.5) совпадает с исходным уравнением.

4. АРХИТЕКТУРА И АЛГОРИТМ РАБОТЫ ПРОГРАММЫ

Архитектура программы реализована следующим образом. Сущность программы, выполняющую тестирование полиномов на соответствие некоторой конфигурации вихрей, назовем *классификатором*. Каждой конфигурации вихрей соответствует свой классификатор. Классификаторы в реализации программы представляют собой процедуры в языке программирования Maple. Каждый классификатор содержит следующую информацию о соответствующей ему конфигурации: словесное описание конфигурации, количество полиномов, необходимых для определения конфигурации (текущая версия программы поддерживает классификаторы для одного полинома и пары полиномов), порождающее ДУ конфигурации. Все классификаторы собраны в единый программный модуль. Блок-схема алгоритма тестирования полиномов классификатором изображена на рис. 1.

Полиномы P и Q подаются в аргументы процедуры классификатора. Второй аргумент классификатора имеет значение по умолчанию, равное нулю, и поэтому на вход классификатора можно подавать только полином P . Классификатор выполняет проверку на соответствие количества введенных полиномов, не равных константе, количеству полиномов, необходимых для определения связанной с ним конфигурации. В случае несоответствия классификатор выдает заключение о несоответствии введенных полиномов связанной с ним конфигурации вихрей (возвращает значение false).

Далее производится обобщение порождающего ДУ классификатора, и полиномы P и Q подставляются в обобщенное порождающее ДУ, соответствующее конфигурации вихрей классификатора. В результате получается полином $E(P, Q)$ с ненулевыми коэффициентами, в которые входят параметры из исходного дифференциального уравнения, а также параметры a и b , которые могли появиться в результате обобщения порождающего ДУ.

Чтобы дать заключение о том, образуют ли корни полиномов P и Q конфигурацию вихрей классификатора, решается система уравнений относительно параметров обобщенного уравнения, получаемая в результате приравнивания коэффициентов полинома $E(P, Q)$ при степенях z к нулю.

При существовании решения составленной системы, классификатором возвращаются значения параметров, при которых полиномы P и Q удовлетворяют обобщенному уравнению, и делается вывод о соответствии полиномов конфигу-

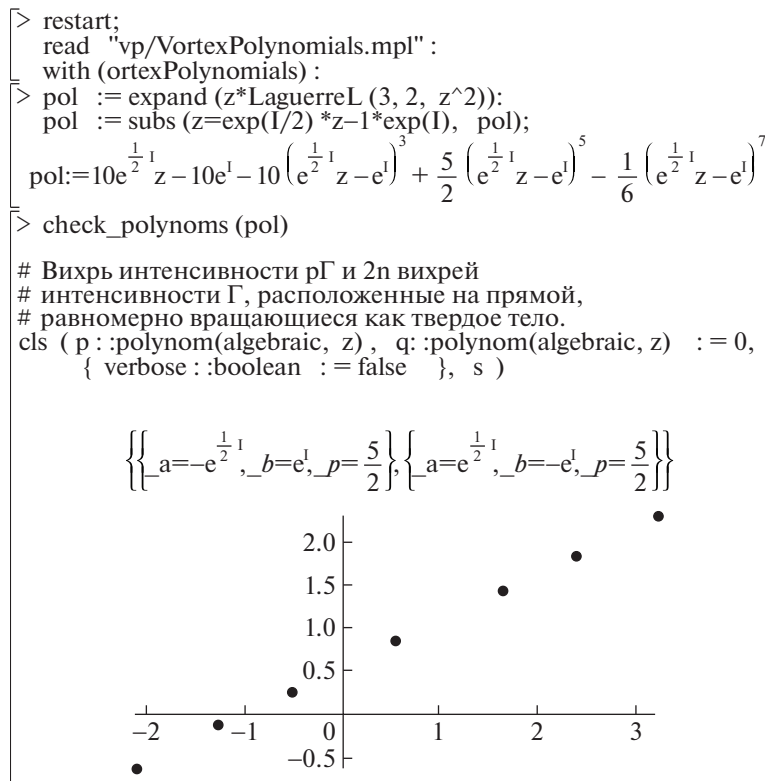


Рис. 2. Тестирование одного полинома.

рации вихрей, связанной с классификатором. Иначе, классификатор возвращает значение false.

В отдельном программном модуле реализованы служебные процедуры, которые используются в теле процедуры классификаторов: процедура для получения обобщенного ДУ из исходного, процедура для подстановки полиномов в обобщенное уравнение, процедура для составления и решения системы уравнений относительно параметров обобщенного уравнения. Таким образом, за счет сокрытия реализации и использования универсальных (не зависящих от конфигурации вихрей, подаваемых на вход полиномов) процедур, получена возможность однообразно описывать классификаторы, что делает тривиальной задачу добавления в программу новых классификаторов.

Основная процедура программы принимает на вход один или два полинома и перебором тестирует эти полиномы всеми описанными в соответствующем программном модуле классификаторами. При соответствии введенных полиномов некоторой конфигурации вихрей выводится описание этой конфигурации и строится график с изображением корней заданных полиномов на комплексной плоскости. Результат работы программы представлен на рис. 2, 3.

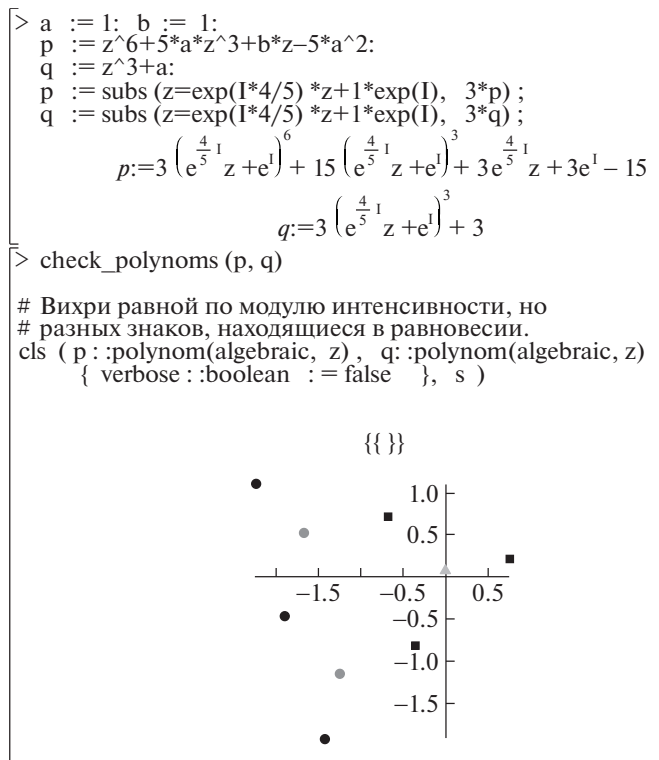


Рис. 3. Тестирование пары полиномов.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено порождающее ДУ для конфигурации вихрей из $2n$ вихрей интенсивности Γ , лежащих на прямой, и одного вихря интенсивности $p\Gamma$, расположенного в центре завихренности.

Разработан алгоритм тестирования полиномов, не чувствительный к сдвигу, повороту и растяжению его корней (за счет процедуры обобщения порождающих ДУ конфигураций вихрей).

Разработано программное обеспечение, позволяющее автоматизировать тестирование полиномов на соответствие их корней некоторой конфигурации вихрей. Код программы написан на языке программирования Maple.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости, М.: Мир, 1973, 758 с.
2. O'Neil K.A. Stationary Configurations of Point Vortices, Transactions of the American Mathematical Society, 1987. V. 302. № 2. С. 383–425.
3. Aref H. On the equilibrium and stability of a row of point vortices // J. Fluid. Mech., 1995. V. 290. P. 167–181.
4. Aref H. Vortices and polynomials // Fluid Dynamics Research, 2007. V. 39. Is. 1–3. P. 5–23.
5. Demina M.V., Kudryashov N.A. Point Vortices and Polynomials of the Sawada–Kotera and Kaup–Kupershmidt Equations // Regul. Chaotic Dyn., 2011. V. 16. P. 562–576.
6. Ткаченко В.К. О вихревых решетках // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. Вып. 6 (12). С. 1875–1883.
7. Aref H. The numerical experiment in fluid mechanics // J. Fluid. Mech., 1986. V. 173. P. 15–41.
8. Demina M.V., Kudryashov N.A. Vortices and polynomials: non-uniqueness of the Adler–Moser polynomials for the Tkachenko equation, J. Phys. A: Math. Theor., 2012. V. 45. P. 195–205.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2021, vol. 10, no. 6, pp. 509–515

Point Vortices and Polynomials: Program Code for Testing Polynomials Associated with Point Vortices on the Plane

A. A. Bayramukov^{a, #}, N. A. Kudryashov^a, and A. A. Kutukov^a

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: alim.bayr@gmail.com

Received February 4, 2022; revised February 5, 2022; accepted February 8, 2022

Abstract—A differential equation is obtained in an explicit form for a system of $2n$ vortices of intensity Γ lying on a straight line and one vortex of the intensity $p\Gamma$ located in the vorticity center, the polynomial solutions of which determine stationary positions of the vortices included in this configuration. The procedure of generalization of differential equations related to the stationary positions of vortices to a general differential equation for a stationary configuration of vortices is substantiated. An algorithm for generalizing differential equations is described by introducing parameters into differential equations that reflect the equivalence of the stationary positions of vortices that are obtained from each other by transformations of rotation, stretching, and shear. Generalized differential equations are presented for some stationary configurations of vortices. A procedure for testing polynomials has been developed, which makes it possible to check whether the tested polynomials are solutions of the generalized differential equation of some stationary configuration of vortices. To test polynomials, based on the tested polynomials and the generalized differential equation, a system of algebraic equations is compiled with respect to the parameters of the generalized differential equation. The existence of a solution to this system corresponds to the fact that the tested polynomials satisfy the considered stationary configuration. The architecture and operation algorithm of the program that automates the testing of polynomials to determine the stationary configurations of vortices is described.

Keywords: point vortices, configurations of point vortices, generating polynomial

DOI: 10.1134/S2304487X2106002X

REFERENCES

1. Betcherol Dzh. *Vvedenie v dinamiku zhidkosti* [An Introduction to Fluid Dynamics]. Moscow, Mir Publ., 1973, 758 p.
2. O'Neil K.A. Stationary Configurations of Point Vortices. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1987, vol. 302, no. 2, pp. 383–425.
3. Aref H. On the equilibrium and stability of a row of point vortices. *J. Fluid. Mech.*, 1995, vol. 290, pp. 167–181.
4. Aref H. Vortices and polynomials. *Fluid Dynamics Research*, 2007, vol. 39, is. 1–3, pp. 5–23.
5. Demina M.V., Kudryashov N.A. Point Vortices and Polynomials of the Sawada–Kotera and Kaup–Kupershmidt Equations. *Regul. Chaotic Dyn.*, 2011, vol. 16, pp. 562–576.
6. Tkachenko V.K. O vihrevykh reshetkah [About Vortex Lattices]. *JETP*, 1965, vol. 49, is. 6(12), pp. 1875–1883. (in Russian)
7. Aref H., The numerical experiment in fluid mechanics. *J. Fluid. Mech.*, 1986, vol. 173, pp. 15–41.
8. Demina M.V., Kudryashov N.A. Vortices and polynomials: non-uniqueness of the Adler–Moser polynomials for the Tkachenko equation. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2012, vol. 45, pp. 195–205.