

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МЕЛЬНИКОВА ДЛЯ АНАЛИЗА УРАВНЕНИЯ БИСВАСА–АРШЕДА

© 2021 г. В. А. Медведев^{1,*}, Н. А. Кудряшов^{1,**}, С. Ф. Лаврова^{1,***}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия

*e-mail: viktormedvedev12115551@gmail.com,

**e-mail: infuriatedot@gmail.com,

***e-mail: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию 14.02.2022 г.

После доработки 15.02.2022 г.

Принята к публикации 22.02.2022 г.

Рассматривается уравнение Бисваса–Аршеда (Biswas–Arshed), описывающее распространение импульсов в оптическом волокне. Используя переменные бегущей волны нелинейное уравнение в частных производных третьего порядка преобразуется к динамической системе. Найдены и проанализированы стационарные точки полученной динамической системы без учета внешней силы и исследована их устойчивость. Результаты исследования представлены в таблице, где для каждой из точек указан тип устойчивости в зависимости от значений параметров уравнения. Определены параметры, при которых система имеет гомоклинические и гетероклинические орбиты. С помощью метода Мельникова, показано, что при некоторых значениях параметров математической модели в системе может возникать гомоклинический хаос. Построена бифуркационная диаграмма по одному из параметров системы. Полученные при численном анализе результаты согласуются с полученными теоретически с использованием метода Мельникова.

Ключевые слова: уравнение Бисваса–Аршеда, критерий Мельникова, функция Мельникова, Гамильтонова система, дифференциальное уравнение, динамическая система, стационарные точки, гомоклинический хаос

DOI: 10.56304/S2304487X21060067

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных задач нелинейной оптики в последние годы является выбор адекватной математической модели для описания распространения импульсов в оптическом волокне. В настоящее время предложен ряд таких моделей которые основываются на различных обобщениях нелинейного уравнения Шредингера. Одна из таких математических моделей предложена Бисвасом и Аршедом. Уравнение, соответствующее модели, имеет вид [5]:

$$i q_t + \alpha_1 q_{xx} + \alpha_2 q_{xt} + i(b_1 q_{xxx} + b_2 q_{xxt}) = i(\lambda(|q|^2 q)_x + \mu(|q|^2)_x q + \nu|q|^2 q_x), \quad (1)$$

где $q(x, t)$ — профиль импульса при распространении в оптическом волокне, а α_1 , α_2 , b_1 , b_2 , λ , μ и ν — параметры математической модели.

2. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ К ВИДУ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Будем искать решение уравнения (1) в виде бегущей волны:

$$q(x, t) = y(z) e^{i(kx - \omega t)}, \quad \text{где } z = x - c_0 t. \quad (2)$$

Вычисляя соответствующие производные от $q(x, t)$, имеем:

$$q_t = (-i\omega y - c_0 y_z) e^{i(kx - \omega t)},$$

$$q_x = (iky + y_z) e^{i(kx - \omega t)},$$

$$q_{xx} = (y_{zz} + 2iky_z - k^2 y) e^{i(kx - \omega t)},$$

$$q_{xxx} = (y_{zzz} + 3iky_{zz} - 3k^2 y_z - ik^3 y) e^{i(kx - \omega t)},$$

$$q_{xxt} = (c_0 k^2 y_z - 2ic_0 k y_{zz} - c_0 y_{zzz}) e^{i(kx - \omega t)} - i\omega(2iky_z - k^2 y + y_{zz}) e^{i(kx - \omega t)},$$

$$q_{xt} = [-i(kc_0 + \omega)y_z + k\omega y - c_0 y_{zz}] e^{i(kx - \omega t)},$$

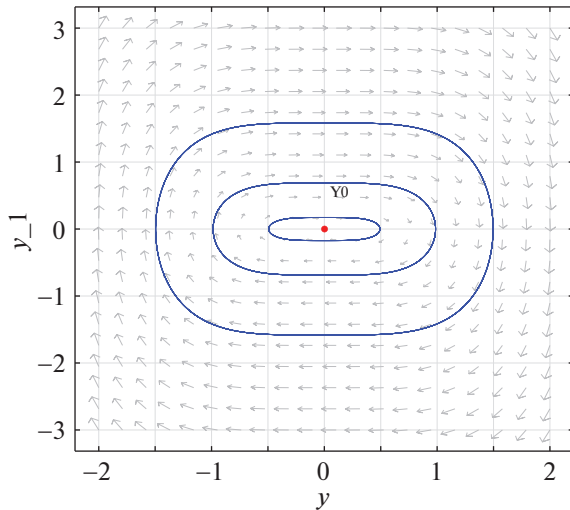


Рис. 1. Качественный фазовый портрет системы для случая (1).

$$(|q|^2 q)_x = (iky^3 + 3y^2 y_z) e^{i(kx - t\omega)},$$

$$(|q|^2)_x = 2yy_z.$$

Подставляя производные в уравнение (1), получим уравнение:

$$\begin{aligned} & i(-b_2 c_0 + b_1) y_{zzz} + [(2b_2 c_0 - 3b_1)k + \omega b_2 - \alpha_2 c_0 + \\ & + \alpha_1] y_{zz} + [i(b_2 c_0 - 3b_1)k^2 + i(2\omega b_2 - \alpha_2 c_0 + 2\alpha_1)k - \\ & - i\omega \alpha_2 - i c_0] y_z + y[k^3 b_1 + (-\omega b_2 - \alpha_1)k^2 + \omega \alpha_2 k + \omega] = \\ & = i(3\lambda + 2\mu + \nu) y_z^2 + ik(\nu + \lambda) y. \end{aligned}$$

Выделяя действительную и мнимую часть, приходим к следующей системе двух уравнений:

$$\begin{aligned} & (2kb_2 c_0 - 3kb_1 + \omega b_2 - \alpha_2 c_0 + \alpha_1) y_{zz} + \\ & + (k\lambda + k\nu) y^3 + \end{aligned} \quad (3)$$

$$+ (k^3 b_1 - k^2 \omega b_2 - k^2 \alpha_1 + \omega \alpha_2 k + \omega) y = 0,$$

$$\begin{aligned} & (-b_2 c_0 + b_1) y_{zzz} + (-3\lambda - 2\mu - \nu) y^2 + \\ & + [(b_2 c_0 - 3b_1)k^2 + (2\omega b_2 - \alpha_2 c_0 + 2\alpha_1)k - \\ & - \omega \alpha_2 - c_0] y_z = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение для действительной части выполнится тождественно при следующих ограничениях на параметры математической модели:

$$\begin{cases} k\lambda + k\nu = 0, \\ k^3 b_1 - k^2 \omega b_2 - k^2 \alpha_1 + k\omega \alpha_2 + \omega = 0, \\ -3k^3 b_1 + k^2 \omega b_2 + 2k^2 b_2 c_0 + k^2 \alpha_1 - k\alpha_2 c_0 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Из системы уравнений (5) получаем условия:

$$\begin{cases} \lambda = -\nu, \\ \omega = \frac{k^2(kb_1 - \alpha_1)}{k^2 b_2 - \alpha_2 k - 1}, \\ c_0 = \frac{2k^3 b_1 b_2 - 3k^2 \alpha_2 b_1 + k\alpha_1 \alpha_2 - 3kb_1 + \alpha_1}{2k^3 b_2^2 - 3k^2 \alpha_2 b_2 + k\alpha_2^2 - 2kb_2 + \alpha_2}. \end{cases} \quad (6)$$

Уравнение (4) имеет первый интеграл, и при этом запишется в виде:

$$Ay_{zz} + By + Cy^3 = c_1, \quad (7)$$

где коэффициенты А, В и С определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(-b_2 \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2 b_1 + b_2 b_1)k + b_1 \alpha_2 - \alpha_1 b_2}{(2kb_2 - \alpha_2)(k^2 b_2 - k\alpha_2 - 1)}, \\ B &= \frac{(-\alpha_1 \alpha_2 b_2 + \alpha_2^2 b_1 + b_1 b_2)k^3 + (-3\alpha_1 b_2 + 3b_1 \alpha_2)k^2 + 3kb_1 - \alpha_1}{(2kb_2 - \alpha_2)(k^2 b_2 - \alpha_2 k - 1)}, \\ C &= -\frac{2k(-\nu + \mu)}{3}. \end{aligned}$$

Запишем (7) в виде динамической системы, предварительно обозначив $y_z = y_1$, и полагая для удобства дальнейших рассуждений $c_1 = 0$:

$$\begin{cases} y_z = y_1, \\ (y_1)_z = -\frac{By}{A} - \frac{Cy^3}{A}. \end{cases} \quad (8)$$

Отметив, что $A \neq 0$, введем обозначения $\frac{B}{A} = a, \frac{C}{A} = b$:

$$\begin{cases} y_z = y_1, \\ (y_1)_z = -ay - by^3. \end{cases} \quad (9)$$

Данная система имеет следующие стационарные точки:

$$\begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix}_{2,3} = \begin{pmatrix} \pm i \sqrt{\frac{a}{b}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Заметим, что все точки лежат на оси $y_1 = 0$.

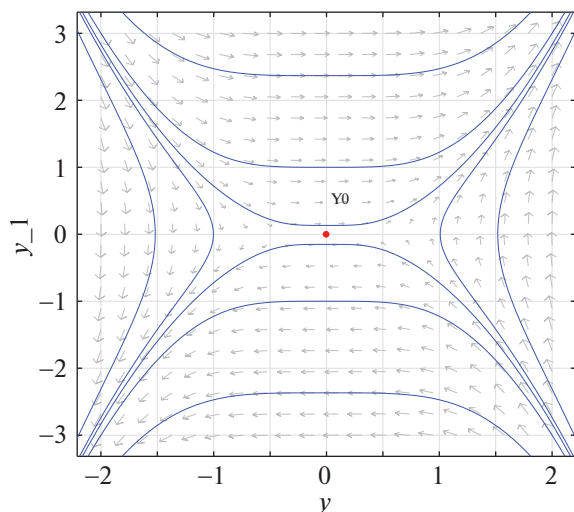


Рис. 2. Качественный фазовый портрет системы для случая (2).

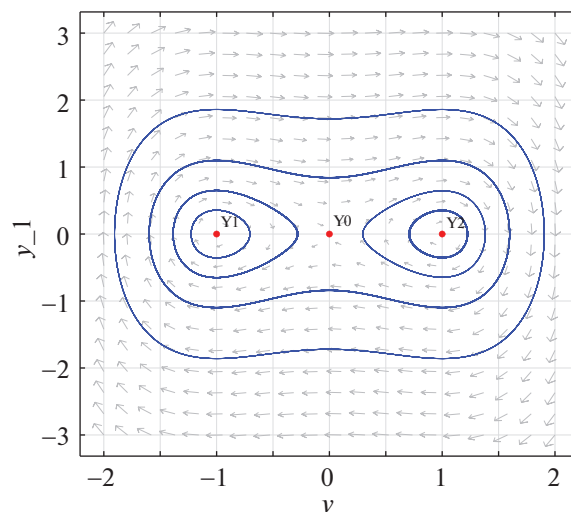


Рис. 3. Качественный фазовый портрет системы для случая (3).

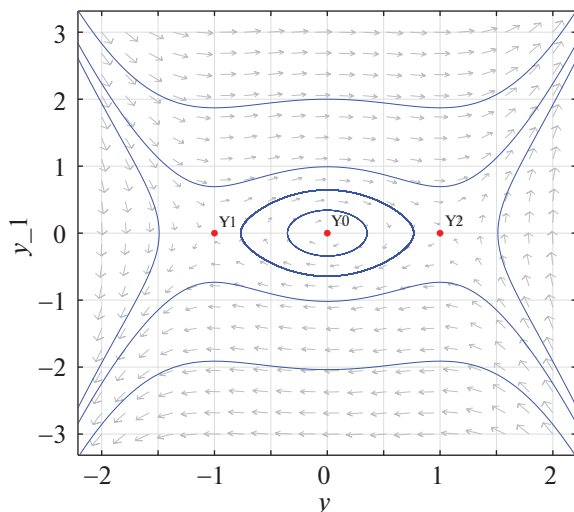


Рис. 4. Качественный фазовый портрет системы для случая (4).

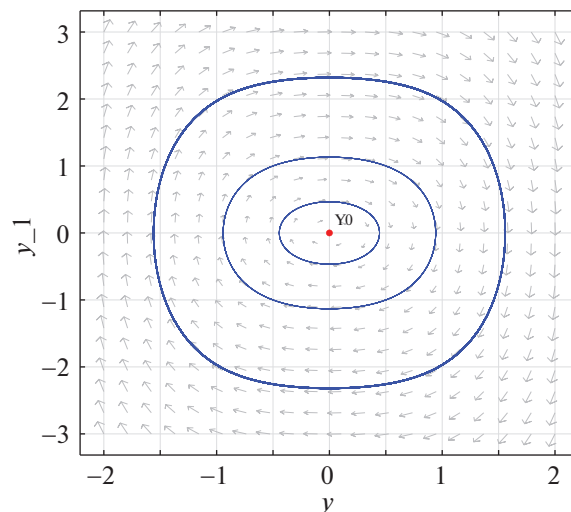


Рис. 5. Качественный фазовый портрет системы для случая (5).

3. АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ ТОЧЕК СИСТЕМЫ

Устойчивость стационарных точек полученной невозмущенной системы определяется собственными значениями следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & y_1 \\ -a - by^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Введем обозначения:

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Y_1 = \begin{pmatrix} -i\sqrt{\frac{a}{b}} \\ 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} i\sqrt{\frac{a}{b}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

При действительных значениях $\frac{a}{b}$ точки Y_1 и Y_2 лежат на мнимой оси, стационарной точкой является Y_0 .

В зависимости от значений параметров a и b возможны следующие шесть случаев.

3.1. Случай 1: $a = 0, b > 0$

Тип устойчивости единственной стационарной точки $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ соответствует вырожденной матрице с двумя собственными значениями

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

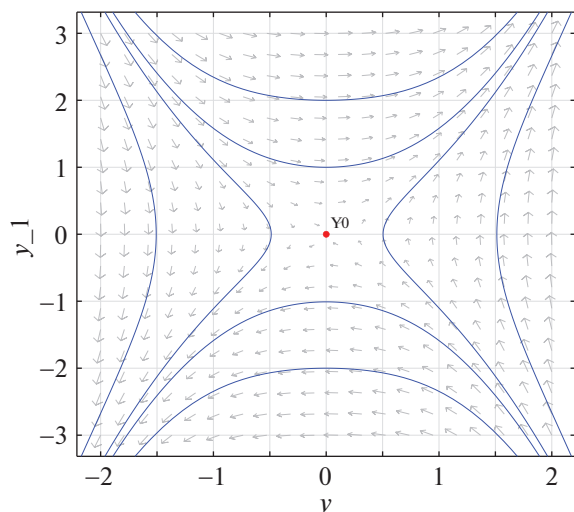


Рис. 6. Качественный фазовый портрет системы для случая (6).

3.2. Случай 2: $a = 0, b < 0$

Тип устойчивости единственной стационарной точки $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ совпадает со случаем (1) и соответствует вырожденной матрице с двумя собственными значениями $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Отличается общий фазовый портрет системы.

3.3. Случай 3: $a < 0, b > 0$

Тип устойчивости стационарных точек Y_1 и Y_2 — центр. λ_1 и λ_2 — мнимые и комплексно-сопряженные.

В точке Y_0 неустойчивость типа седло: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

3.4. Случай 4: $a > 0, b < 0$

Тип устойчивости стационарных точек Y_1 и Y_2 — седло. $\lambda_1 = \sqrt{2}$ и $\lambda_2 = -\sqrt{2}$.

Тип устойчивости Y_0 соответствует центру: $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$.

3.5. Случай 5: $a > 0, b > 0$

Единственная точка Y_0 устойчивости типа центр: $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$.

3.6. Случай 6: $a < 0, b < 0$

Единственная точка Y_0 соответствует неустойчивости типа седло: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

Гамильтониан невозмущенной системы (9) имеет вид:

$$H(y, y_1) = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{4}by^4. \quad (13)$$

Качественные фазовые портреты системы для рассматриваемых случаев приведены на рис. 1–6.

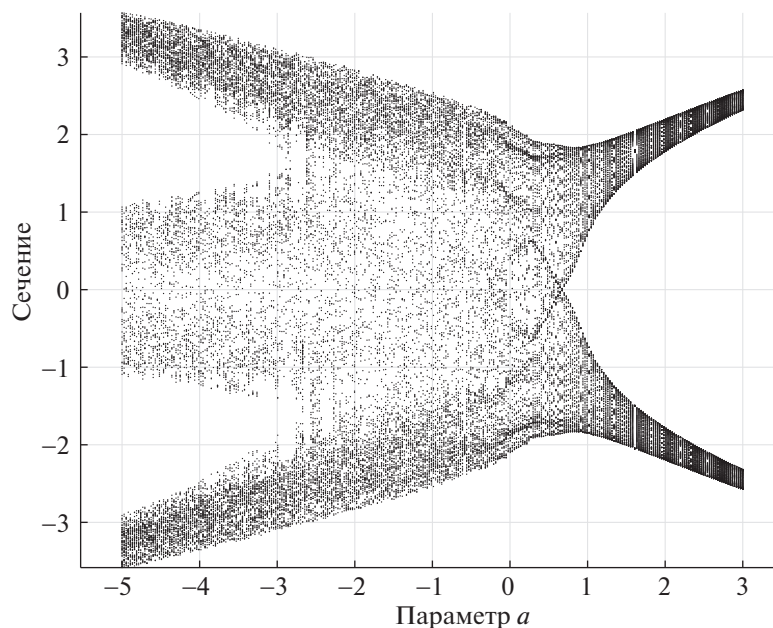


Рис. 7. Бифуркационная диаграмма по параметру a при $b = 1$, и при параметрах возмущения $\varepsilon = 1$ и $\omega_0 = 1$.

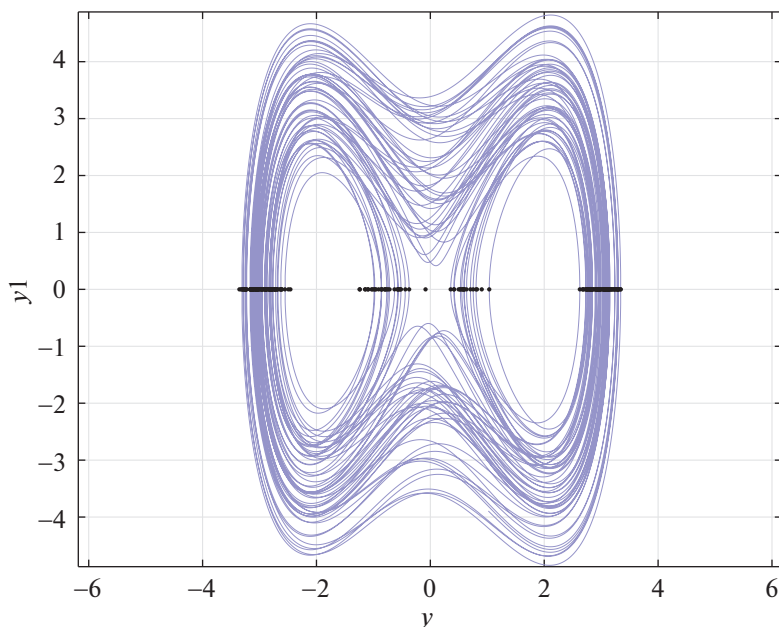


Рис. 8. Фазовый портрет системы при $a = -4$, $b = 1$, и параметрах возмущения $\varepsilon = 1$ и $\omega_0 = 1$.

4. ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ И ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ

Основываясь на анализе стационарных точек и выражении для гамильтониана невозмущенной системы можно сформулировать следующее утверждение:

Утверждение 1. Динамическая система (9) обладает гетероклиническими и гомоклиническими траекториями при условиях.

1. При $a > 0$, $b < 0$ стационарные точки типа седла Y_1 и Y_2 соединяют две гетероклинические орбиты Γ_{1he}^+ и Γ_{1he}^- .

2. При $a < 0$, $b > 0$ стационарная точка Y_0 типа седла соединена сама с собой двумя гомоклиническими орбитами Γ_{2ho}^+ и Γ_{2ho}^- .

Найдем явные выражения для гомо- и гетероклинических орбит невозмущенной системы. Орбиты Γ_{2ho}^- и Γ_{2ho}^+ , проходящие через седловую точку Y_0 можно найти из выражения для линии уровня гамильтониана $H(y, y_1) = 0$. Учитывая что $y_1 = \frac{dy}{dz}$, получим, что зависимость $y(z)$ выражается с помощью интеграла:

$$\pm(z - z_0) = \int_{y(z_0)}^{y(z)} \frac{1}{t \sqrt{-a - \frac{b}{2}t^2}} dt. \quad (14)$$

Для орбит $\Gamma_{2ho}^\pm$ при $a < 0$, $b > 0$ имеем:

$$\pm(z - z_0) = \frac{1}{\sqrt{-a}} \left(\operatorname{arctanh} \left(\sqrt{1 + \frac{by^2(z_0)}{2a}} \right) - \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{1 + \frac{by^2}{2a}} \right) \right). \quad (15)$$

Положим $y(z_0) = \sqrt{-\frac{2a}{b}}$ при $z_0 = 0$. Тогда выражение для орбит $\Gamma_{2ho}^\pm$:

$$\pm z = \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{1 + \frac{by^2}{2a}} \right). \quad (16)$$

Откуда находим выражения для $y(z)$ и $y_1(z)$:

$$\Gamma_{2ho}^+ \begin{cases} y(z) = \sqrt{-\frac{2a}{b}} \operatorname{sech}(\sqrt{-a}t), \\ y_1(z) = -\sqrt{\frac{2a^2}{b}} \operatorname{sech}(\sqrt{-a}t) \tanh(\sqrt{-a}t). \end{cases} \quad (17)$$

$$\Gamma_{2ho}^- \begin{cases} y(z) = -\sqrt{-\frac{2a}{b}} \operatorname{sech}(\sqrt{-a}t), \\ y_1(z) = \sqrt{\frac{2a^2}{b}} \operatorname{sech}(\sqrt{-a}t) \tanh(\sqrt{-a}t). \end{cases} \quad (18)$$

Table 1. Типы устойчивости стационарных точек невозмущенной системы (9): Y_0, Y_1, Y_2 в зависимости от параметров a и b

Условия на параметры	Стационарная точка		
	Y_0	Y_1	Y_2
$a = 0$, и $b > 0$	вырожден	—	—
$a = 0$, и $b < 0$	вырожден	—	—
$a < 0$, и $b > 0$	седло	центр	центр
$a > 0$, и $b < 0$	центр	седло	седло
$a > 0$, и $b > 0$	центр	—	—
$a < 0$, и $b < 0$	седло	—	—

Вследствие громоздких выражений для гетероклинических орбит ограничимся рассмотрением найденных выражений. Зная явный вид гомоклинических орбит системы (18), можно исследовать гомоклинический хаос в системе путем построения функции Мельникова.

5. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МЕЛЬНИКОВА К ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ (9)

Учитывая в уравнении (7) периодическое возмущение, запишем динамическую систему (9) в виде:

$$\begin{cases} \dot{y}_z = y_1, \\ (y_1)_z = -ay - by^3 + \varepsilon F(z), \end{cases} \quad (19)$$

где $F(z) = \cos(\omega_0 z)$, $\varepsilon \ll 1$.

Гомоклинические орбиты $\Gamma_{2ho}^\pm$ наблюдаются в системе при $\varepsilon = 0$. Учет возмущения может разрушить гомоклинические траектории и привести к появлению сложной динамики. С учетом вида возмущения и выражений для гомоклинических траекторий (17) и (18), рассчитаем расстояние Мельникова вдоль Γ_{2ho}^+ . Получим однопараметрическое семейство расстояний сдвигом временной переменной решения на z_0 :

$$\begin{aligned} \Delta_2^\pm(z_0) &= \mp \int_{-\infty}^{\infty} y_1(z - z_0) \varepsilon \cos(\omega_0 z) dz = \mp \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2a^2}{b}} \times \\ &\times \operatorname{sech}(\sqrt{-a}(z - z_0)) \tanh(\sqrt{-a}(z - z_0)) \varepsilon \cos(\omega_0 z) dz, \\ \Delta_2^\pm(z_0) &= \mp \varepsilon \sqrt{\frac{2}{b}} \omega_0 \pi \operatorname{sech}\left(\frac{\pi i \omega_0}{2\sqrt{-a}}\right) \sin(\omega_0 z_0). \end{aligned} \quad (20)$$

Функция Мельникова (20) имеет простые нули при любых значениях параметра возмущения, что, согласно критерию Мельникова, говорит о

возможности возникновения в системе хаоса типа подковы Смейла и потенциальном наличии сложной динамики.

6. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Проверим аналитические результаты из предыдущего раздела путем построения бифуркационной диаграммы и фазовых портретов системы. Зафиксируем параметры возмущения $\varepsilon = 1$, $\omega_0 = 1$ и параметр $b = 1$, и будем варьировать параметр a от области квазипериодического поведения к области хаотической динамики. Из численного анализа видно, что в области $a < 0$ в системе, описываемой уравнениями (9) проявляется сложная динамика (рис. 7, 8).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрено уравнение Бисваса—Аршеда, которое используется при описании распространения импульсов в оптическом волокне. Уравнение в частных производных не относится к типу интегрируемых уравнений, поэтому при построении его решений использованы переменные бегущей волны. Нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение сведено к динамической системе. Основным вопросом который изучен в данной работе состоял в том, чтобы определить возможен или нет динамический хаос в системе при действии периодической внешней силы. С этой целью для исследования этого вопроса использован метод Мельникова. На основании построенной функции Мельникова сделан вывод о том, что необходимое условие возникновения динамического хаоса в динамической системе соответствующей исходному уравнению Бисваса—Аршеда возможен. Теоретически выполненные оценки подтверждены с помощью численных расчетов. Построенная бифуркационная диаграмма подтверждает, что в динамической системе возможно образование динамического хаоса типа подковы Смейла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва—Ижевск: ИКИ, 2002. 561 с.
2. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001, 296 с.
3. Лоскутов А.Ф. Динамический хаос. Системы классической механики // Успехи физических наук, 2007. Т. 177. № 9. С. 989—1015.
4. Lakshmanan M., Rajasekar S. Nonlinear Dynamics: Integrability, Chaos, and Patterns. Berlin: Springer, 2003. 627 p.

5. Kudryashov N.A. Periodic and solitary waves of the Biswas–Arshed equation // *Optik*, 2020. V. 200. 163442.
6. Siewe Siewe M., Tchawouab C., Wofo P. Melnikov chaos in a periodically driven Rayleigh–Duffing oscillator // *Mechanics Research Communications*, 2010. V. 37. Is. 4. P. 363–368.
7. Лаврова С.Ф., Кудряшов Н.А. Метод Мельникова для обобщенного уравнения Дуффинга // *Вестник НИЯУ МИФИ*, 2021. Т. 10. № 2. С. 135–142.
8. Лаврова С.Ф., Кудряшов Н.А. Применение метода Мельникова к уравнению Трики–Бисваса // *Вестник НИЯУ МИФИ*, 2021. Т. 10. № 4. С. 308–317.
9. Лаврова С.Ф., Кудряшов Н.А. Нелинейные динамические процессы, описываемые обобщенным уравнением Курамото–Сивашинского в переменных бегущей волны // *Вестник НИЯУ МИФИ*, 2020. Т. 9. № 2. С. 129–138.
10. Biswas A., Arshed S. Optical solitons in presence of higher order dispersion and absence of self-phase modulation // *Optik*, 2018. V. 184. P. 452–459.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2021, vol. 10, no. 6, pp. 516–522

Application of the Melnikov Method for the Analysis of the Biswas–Arshed Equation

V. A. Medvedev^{a, #}, S. F. Lavrova^{a, ##}, and N. A. Kudryashov^{a, ###}

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: viktormedvedev12115551@gmail.com

^{##}e-mail: infuriatedot@gmail.com

^{###}e-mail: nakudr@gmail.com

Received February 14, 2022; revised February 15, 2022; accepted February 22, 2022

Abstract—The Biswas–Arshed equation, which describes the propagation of pulses in an optical fiber, is considered. The third-order nonlinear partial differential equation is transformed to the form of a dynamical system after the transition to traveling wave variables. The stationary points of the system are found and analyzed disregarding the external force, and their stability is studied. The results of the study are presented in the table, where the type of stability depending on the equation parameters is indicated for each of the points. The parameters under which the system has homoclinic and heteroclinic orbits are determined. Using the Melnikov method, it is found that homoclinic chaos occurs in the system for some values of the parameters. A bifurcation diagram is constructed for one of the system parameters. The results obtained in the numerical analysis are consistent with those obtained theoretically using the Melnikov method.

Keywords: Biswas–Arshed equation, Melnikov method, Melnikov function, Hamiltonian system, differential equation, dynamical system, stationary points, homoclinic chaos

DOI: 10.1134/S2304487X21060067

REFERENCES

1. Gukenhejmer Dzh., Holms F. *Nelinejnye kolebaniya, dinamicheskie sistemy i bifurkacii vektornykh polej* [Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields], Moskva–Izhevsk, IKI Publ., 2002, 561 p.
2. Kuznecov S.P. *Dinamicheskij kaos*. [Dynamic chaos], Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 296 p.
3. Loskutov A.F. *Dinamicheskij kaos. Sistemy klassicheskoy mekhaniki*. [Dynamic chaos. Systems of classical mechanics], *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 2007, vol. 177, no. 9, pp. 989–1015.
4. Lakshmanan M., Rajasekar S. *Nonlinear Dynamics: Integrability, Chaos, and Patterns*. Berlin, Springer, 2003, 627 p.
5. Kudryashov N.A. Periodic and solitary waves of the Biswas–Arshed equation. *Optik*, 2020. vol. 200, 163442.
6. Siewe Siewe M., Tchawouab C., Wofo P. Melnikov chaos in a periodically driven Rayleigh–Duffing oscillator. *Mechanics Research Communications*, 2010, vol. 37, is. 4, pp. 363–368.
7. Lavrova S.F., Kudryashov N.A. Metod Mel'nikova dlya obobshchennogo uravneniya Duffinga [Melnikov's method for the generalized Duffing equation]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2021, vol. 10, no. 2, pp. 135–142. (in Russian)
8. Lavrova S.F., Kudryashov N.A. Primenenie metoda Mel'nikova k uravneniyu Triki–Bisvasa [Application of the Melnikov method to the Tricky-Biswas equation]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2021, vol. 10, no. 4, pp. 308–317.
9. Lavrova S.F., Kudryashov N.A. Nelinejnye dinamicheskie processy, opisываемые obobshchennym uravneniem Kuramoto–Sivashinskogo v peremennyyh begushchey volny [Nonlinear dynamic processes described by the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation in traveling wave variables]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2020, vol. 9, no 2. pp. 129–138.
10. Biswas A., Arshed S. Optical solitons in presence of higher order dispersion and absence of self-phase modulation. *Optik*, 2018, vol. 184, pp. 452–459.