ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2022, том 11, № 1, с. 5–8

УДК 539.412:539.1.09

АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ПРИ ПЛОСКОСТНОМ КАНАЛИРОВАНИИ В ИЗОГНУТОМ КРИСТАЛЛЕ (В СОПУТСТВУЮЩЕЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА)

© 2022 г. **Н. П. Калашников[1],*, А. С. Ольчак[1],****

[1] Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия

**e-mail: kalash@mephi.ru*

***e-mail: asolchak@mephi.ru*

Поступила в редакцию 17.04.2022 г.
После доработки 04.05.2022 г.
Принята к публикации 04.05.2022 г.

Движение релятивистских электронов в режиме плоскостного каналирования в сопутствующей системе отсчета, движущейся вдоль канала со скоростью, равной продольной каналу компоненте скорости электрона, можно рассматривать как реализацию модели одномерного 1D атома с параметрами, зависящими как от рода и ориентации кристалла, так и от величины релятивистской энергии движущейся в канале заряженной частицы. Режим движения в плоскостном канале может сохранять устойчивость даже если кристалл и его плоскостные каналы движения изогнуты, при условии, что угол изгиба не слишком велик. В работе демонстрируется, что условие квантования энергии одномерного каналированного движения с использованием подхода Бора–Зоммерфельда совпадает с рассчетом адиабатического инварианта этого движения. Используя выражение для адиабатического инварианта при плоскостном каналировании, оценивается предельный угол изгиба монокристалла, при котором все еще возможно устойчивое движение в режиме каналирования. Отмечается, что предельный угол изгиба монокристалла не должен превышать критический угол каналирования Линдхарда. Таким образом, гипотетическая возможность использовать изогнутые монокристаллы для управления направлениями распространения пучков ускоренных частиц, оказывается ограничена лишь небольшими углами отклонения.

Ключевые слова: каналирование, адиабатические инварианты, изогнутый монокристалл, квантование Бора–Зоммерфельда, предельный угол изгиба

DOI: 10.56304/S2304487X22010060

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование движения каналированной частицы в искривленном канале изогнутого кристалла имеет не только теоретическое, но и прикладное значение. Еще в 1970-е годы ряд исследователей предлагали использовать изогнутые кристаллы и эффект каналирования заряженных частиц в них как удобный и достаточно дешевый способ управления ускоренными пучками релятивистских протонов и электронов [1]. Оценка возможности практического использования эффекта требует в первую очередь оценки устойчивости сохранения режима каналирования в изогнутом канале. Режим каналирования может быть нарушен за счет многих факторов, среди которых и понижение высоты барьера, ограничивающего изогнутый канал, и деканалирование частиц за счет рассеяния на нерегулярных рассеивающих центрах, и другие факторы. В настоящей работе предельный угол изгиба монокристалла, при котором возможно устойчивое движение в режиме каналирования, оценивается при помощи анализа т.н. адиабатических инвариантов такого движения.

2. ПЛОСКОСТНОЕ КАНАЛИРОВАНИЕ – 1D АТОМ

Для удобства движение каналированных частиц рассматривается в так называемой сопутствующей системе отсчета (ССО) [2–4], движущейся вдоль направления каналирования со скоростью, равной продольной компоненте скорости каналированной частицы. В сопутствующей системе отсчета движение частицы финитно и подобно колебательному движению в случае одномерного потенциала (при плоскостном каналировании) или двумерному финитному движению по орбитам в центральном поле (при аксиальном каналировании).

Рассмотрим случай плоскостного каналирования положительно заряженной частицы (протона). В сопутствующей системе координат движение каналированной частицы можно рассматривать как одномерный атом. Модельный усредненный потенциал взаимодействия можно аппроксимировать потенциалом одномерной прямоугольной ямы (или параболической ямы), шириной a (a – постоянная решетки) и высотой U_0 (где U_0 определяется параметрами усредненного потенциала кристаллографической плоскости [2, 5]). Для низколежащих уровней $\varepsilon_n \ll U_0$ задача решается в рамках квантовой механики аналитически и (довольно) просто.

Попробуем ввести квантовые концепции в классическую механику каналированной частицы (1D-атома). Классическая механика должна быть применима к большим квантовым числам. Даже если энергетические уровни каналированной частицы дискретны, расстояния между ними могут быть малыми, из квантовой физики известно, что это расстояние равно $\hbar\omega$, где ω – частота излучения, испущенного при колебательном движении каналированной частицы в сопутствующей системе отсчета. Поэтому расстояние между уровнями $\Delta\varepsilon = \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}$ полагается равным $\hbar\omega_n$, где ω_n – частота колебательного движения каналированной частицы с энергией поперечного движения ε_n. Связь между ω_n и ε_n по существу определяется классическими уравнениями колебательного движения. Оценим частоту колебаний в модельном параболическом потенциале [3]. Запишем выражение для полной энергии каналированной частицы:

$$E = T + U = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2, \quad \text{или} \quad U = \frac{k}{2}x^2 = \frac{1}{2}m\omega_{\text{кл}}^2 x^2, \tag{1}$$

т.е. в классической физике каналированная частица совершает гармонические колебания с угловой частотой $\omega_{кл} = \sqrt{k/m}$, где величина k определяется параметрами модельного потенциала [3] каналированного движения.

$$T = 4\int_0^{x_n}\frac{dx}{v} = 4\int_0^{x_n}\frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{k} - x^2}} = \frac{4}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{\frac{2\varepsilon}{k}}} = \frac{4}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{кл}}}. \tag{2}$$

Таким образом, в случае параболического потенциала мы имеем

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} = \hbar\omega_{\text{кл}}. \tag{3}$$

Для больших значений n разность $\Delta\varepsilon = (\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})$ можно приближенно представить в виде производной $d\varepsilon/dn$ и записать дифференциальное уравнение $\frac{d\varepsilon_n}{dn} = \hbar\omega_{\text{кл}}$ [6]. Интегрирование этого уравнения дает

$$\varepsilon_n = \hbar\omega_{\text{кл}}(n + 1/2). \tag{4}$$

Рассмотрим условие квантования каналированного движения с использованием подхода Бора–Зоммерфельда. Обычно правило Бора–Зоммерфельда записывается в виде [7]:

$$\oint p dx = 2\pi\hbar(n + 1/2). \tag{5}$$

Для случая параболического потенциала условие квантования энергии имеет вид:

$$4\int_0^{x_n}\sqrt{2m\varepsilon_n - 2mk\frac{x^2}{2}}dx = 4\sqrt{mk} \times \int_0^{x_n}\sqrt{\frac{2\varepsilon_n}{k} - x^2}dx = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\varepsilon_n = 2\pi\hbar(n + 1/2). \tag{6}$$

Таким образом, $\varepsilon_n = \hbar\sqrt{\frac{k}{m}}(n + 1/2) = \hbar\omega_{\text{кл}}(n + 1/2)$.

3. АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Рассмотрим механическую систему, совершающую одномерное финитное движение и характеризующуюся параметром a, определяющим свойства самой системы.

Предположим, что параметр a под влиянием каких-либо внешних причин адиабатически меняется со временем; под “медленным” имеется в виду такое изменение, при котором a мало меняется за время периода T движения системы

$$T\frac{da}{dt} \ll a. \tag{7}$$

Такая система не является замкнутой и ее энергия E не сохраняется. В силу медленности изменения a можно утверждать, что скорость изменения энергии $\dot{E}$ пропорциональна скорости $\dot{a}$ изменения параметра a. Это значит, что существует такая комбинация из E и a, которая остается неизменной при движении системы; эту величину называют ***адиабатическим инвариантом*** [8].

В рассматриваемом случае движения частицы в режиме плоскостного каналирования интеграл $I = \frac{1}{2\pi}\oint p da$ остается постоянным при изменении параметра a, т.е. является адиабатическим инвариантом. Таким образом, при выполнении условия адиабатичности устойчиво сохраняется энергия поперечного движения каналированной частицы ε_n.

4. ПЛОСКОСТНОЕ КАНАЛИРОВАНИЕ В ИСКРИВЛЕННОМ МОНОКРИСТАЛЛЕ

Оценим возможность устойчивого каналированного движения в искривленном кристалле с поворотом кристаллографических плоскостей на угол Θ. В этом случае в сопутствующей системе отсчета одномерная потенциальная яма, в которой колеблется каналированная частица, движется со скоростью:

$$\dot{a} = V_{\parallel}\mathrm{tg}\Theta \approx V_{\parallel}\Theta, \qquad (8)$$

где $V_{\parallel}$ – скорость сопутствующей системы отсчета (продольная составляющая скорости каналированной частицы).

Таким образом, условие адиабатичности движения стенок канала $\dot{a} \ll \frac{a}{T}$, где T – период колебательного движения частицы в одномерной потенциальной яме:

$$T \sim \frac{a}{v_n} = a\sqrt{\frac{m}{2\varepsilon_n}}. \qquad (9)$$

Следовательно, $V_{\parallel}\cdot\Theta \ll \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon_n}}$, т.е. скорость перемещения стенки канала должна быть много меньше скорости поперечного движения частицы в режиме плоскостного каналирования. Из этого рассмотрения можно оценить предельный угол кривизны монокристалла, допускающий движение в режиме плоскостного каналирования:

$$\Theta \ll \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon_n}}/V_{\parallel}, \qquad (10)$$

т.е. $\Theta \ll \Theta_L$ – предельный угол изгиба монокристалл должен быть меньше критического угла каналирования Линдхарда [1, 2].

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках Программы стратегического академического лидерства “ПРИОРИТЕТ 2030”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tsyganov E.N.* // Preprint Fermilab TM-682, TM-684, 1976.
2. *Линдхард Й.* Влияние кристаллической решетки на движение быстрых заряженных частиц // УФН. 1969. Т. 99. № 2. С. 249–296.
3. *Калашников Н.П., Ольчак А.С.* Явление каналирования как 1-D и 2-D – модели атома в сопутствующей системе координат // Поверхность. Синхротронные и нейтронные исследования, 2022. № 5. С. 1–5.
4. *Калашников Н.П.* Когерентные взаимодействия заряженных частиц в монокристаллах. М.: Атомиздат, 1981. 224 с.
5. *Khokonov M.Kh., Bekulova I.Z., Lomonosov V.S.* // Reports of the L-th International Tulinov’s Conference “Interaction of Charged Particles with Crystals”, 2021. M. P. 71.
6. *Фано У., Фано Л.* Физика атомов и молекул. М.: ГРФМЛ. Наука, 1980. 658 с.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. Т. III. М.: ГРФМЛ “Наука”, 1977. 768 с.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учебное пособие. Т. I. Механика. М.: Наука, 1988. 216 с.

Vestnik Natsional’nogo Issledovatel’skogo Yadernogo Universiteta “MIFI”, 2022, vol. 11, no. 1, pp. 5–8

Adiabatic Invariants for Planar Channeling in a Bending Crystal (in the Accompanying Reference System)

N. P. Kalashnikov[a,#] and A. S. Olchak[a,##]

[a] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[#]*e-mail: kalash@mephi.ru*

[##]*e-mail: asolchak@mephi.ru*

Received April 17, 2022; revised May 4, 2022; accepted May 4, 2022

Abstract—The motion of relativistic electrons in the planar channeling mode in the accompanying reference system moving along the channel at a velocity equal to the longitudinal channel component of the electron velocity can be considered as an implementation of the one-dimensional atom model with parameters depending on both the kind and orientation of the crystal and the relativistic energy of the charged particle moving in the channel. The motion mode in the planar channel can remain stable even if the crystal and its planar channels of motion are curved if the bending angle is not too large. It is demonstrated that the energy quantization condition for one-dimensional channeled motion within the Bohr–Sommerfeld approach coincides with the calculated adiabatic invariant of this motion. Using the expression for the adiabatic invariant in planar channeling, the maximum bending angle of the single crystal at which stable motion in the channeling mode is still possible is estimated. It is noted that the maximum bending angle of a single crystal should not exceed the Lindhard critical channeling angle. Thus, the hypothetical possibility of using the bent single crystals to control the directions of propagation of the accelerated particles beams is limited to only small angles of deflection.

Keywords: channeling, adiabatic invariants, bending of single crystal, Bohr–Sommerfeld quantization rule, Lindhard angle, maximum bending angle

DOI: 10.56304/S2304487X22010060

REFERENCES

1. Tsyganov E.N. *Preprint Fermilab*. 1976. TM-682, TM-684.
2. Lindhard J. Vliyanie kristallicheskoj reshetki na dvizhenie bystryh zaryazhennyh chastic [Influence of the Crystal Lattice on the Motion of Fast Charged Particles]. UFN, 1969, vol. 99, no.2, pp. 249–296. (in Russian)
3. Kalashnikov N.P., Olchak A.S. Yavlenie kanalirovaniya kak 1-D i 2-D – modeli atoma v soputstvuyushchej sisteme koordinat [The phenomenon of channeling as 1-D and 2-D models of the atom in the comoving coordinate system]. *Poverhnost'. Sinhrotronnye i nejtronnye issledovaniya*, 2022. vol. 5, no. 5. pp. 1–5. (in Russian)
4. Kalashnikov N.P. *Kogerentnye vzaimodejstviya zaryazhennyh chastic v monokristallah* [Coherent Interactions of Charged Particles in Single Crystals]. Moscow, Atomizdat Publ., 1981, 224 p.
5. Khokonov M.Kh., Bekulova I.Z., Lomonosov V.S. *Reports of the L-th International Tulinov's Conference "Interaction of Charged Particles with Crystals",* Moscow, 2021. p. 71.
6. Fano U., Fano L. *Fizika atomov i molekul.* [Physics of Atoms and Molecules]. Moscow, GRFML Nauka Publ., 1980. 658 p.
7. Landau L.D., Lifshits E.M. *Kvantovaya mekhanika. Nerelyativistskaya teoriya. T. III.* [Theoretical Physics, Quantum Mechanics. vol. III]. Moscow, GRFML Nauka Publ., 1977, 768 p.
8. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika: Uchebnoe posobie. T. I. Mehanika.* [Theoretical Physics, Textbook. vol. I. Mechanics.]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 216 p.