

ТЕМНЫЕ И СВЕТЫЕ СОЛИТОНЫ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С НАСЫЩЕНИЕМ

© 2022 г. Е. В. Антонова^{1,*}, Н. А. Кудряшов^{1,**}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия

*e-mail: EVAntonova@mephi.ru,

**e-mail: NAKudryashov@mephi.ru

Поступила в редакцию 14.05.2022 г.

После доработки 15.05.2022 г.

Принята к публикации 17.05.2022 г.

Рассматривается обобщенная модель уравнения Шредингера, для описания распространения импульсов в нелинейной среде с насыщением. Задача Коши для этого уравнения не решается методом обратной задачи рассеяния, поэтому решение уравнения ищется в переменных бегущей волны. Получена система дифференциальных уравнений для мнимой и действительной части. Оптические солитоны для описания распространения импульсов получены в виде неявных функций. Найдены аналитические решения, выраженные через экспоненциальную функцию. Решения обобщенного нелинейного уравнения Шредингера, полученные для светлых и темных солитонов в насыщающей среде, являются уединенными волнами при определенных ограничениях на параметры модели. Представлены графики решений.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, уединенная волна, насыщенная среда, аналитическое решение

DOI: 10.56304/S2304487X22010023

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что ряд материалов нелинейной оптики имеют насыщение с увеличением мощности света [1, 2]. Явление насыщения в материалах нелинейной оптики впервые изучалось в работах [3–5]. Функция, описывающая насыщение нелинейности, должна учитывать нелинейность Керра при малой интенсивности света и учитывать насыщение для показателя преломления. В настоящее время существует несколько математических моделей для описания нелинейной оптики, одна из которых описывается нелинейным уравнением Шредингера в виде [10, 12]

$$iq_t + q_{xx} + \alpha |q|^2 q - m \left(q - \frac{q}{(1 + a |q|^2)^p} \right) = 0, \quad (1)$$

где $q(x, t)$ — комплексная функция характеризующая огибающую волнового пакета, (α, m, a) — параметры уравнения, причем $a \neq 0$, x и t — независимые переменные.

Уравнение электромагнитной волны с насыщением, зависящим от интенсивности, показателем преломления при $p = 1$ рассмотрено в работе [3]. В статье [4] математическая модель исследована численно при $p = 1$, было показано, что происходит поглощение интенсивности света в мо-

лекулярных жидкостях с индексом, зависящим от интенсивности. Уравнение (1) не принадлежит к классу интегрируемых уравнений в частных производных. Задача Коши для этого уравнения не решается методом обратного преобразования рассеяния. Однако, может иметь решение в виде бегущей волны. В работах [10–12] точные светлые и темные солитонные решения уравнения (1) найдены при $p = 2$. В работе [18] представлены решения при $p = 2$, $p = 3$. Целью данной статьи является нахождение аналитических решений нелинейного уравнения (1) при $p = 5$. Данная работа состоит из следующих частей. В п. 1 получено нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, соответствующее уравнению (1) принимая во внимание редукцию бегущей волны.

Найден также первый интеграл для полученного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения.

Аналитическое решение уравнения (1) с учетом неявных функций при $p = 5$ представлено в п. 2.

В п. 3 представлены графики полученных решений.

1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ И МНИМОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ (1)

Получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, соответствующее уравнению (1) с учетом переменных бегущей волны. Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$q(x, t) = y(z)e^{i(kz + \omega t)}, \quad (2)$$

где $y(z)$ функция от z , $z = x - C_0 t$. Производные от функции (2) имеют вид

$$q_t = -C_0 y_z e^{i(kz + \omega t)} - iC_0 k y e^{i(kz + \omega t)} + i\omega y e^{i(kz + \omega t)}, \quad (3)$$

$$q_x = y_z e^{i(kz + \omega t)} + iky e^{i(kz + \omega t)}, \quad (4)$$

$$q_{xx} = y_{zz} e^{i(kz + \omega t)} + 2iy_z e^{i(kz + \omega t)} - yk^2 e^{i(kz + \omega t)}. \quad (5)$$

Подставив (3), (4), (5) в уравнение (1) и приравняв мнимую и действительную части нулю, получаем два уравнения для $y(z)$.

$$(C_0 - 2k)y_z = 0, \quad (6)$$

$$y_{zz} + (kC_0 - k^2 - \omega - m)y + \alpha y^3 + \frac{my}{(1 + ay^2)^p} = 0. \quad (7)$$

Полагая $C_0 = 2k$, получим, что уравнение (6) удовлетворяется.

Умножая уравнение (7) на y_z и интегрируя по z , получим первый интеграл уравнения (7), при $p \neq 1$

$$y_z^2 + (k^2 - \omega - m)y^2 + \frac{\alpha}{2}y^4 - \frac{m}{a(p-1)(1+ay^2)^{p-1}} - C_1 = 0, \quad (8)$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Таким образом, проблема нахождения аналитического решения уравнения (1) сведена к поиску точных решений уравнения (8). Рассмотрим случай, когда $\alpha = 0$, $p = 5$.

2. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (8) ПРИ $p = 5$

Пусть $\alpha = 0$ и $p = 5$, уравнение принимает вид

$$y_z^2 + (k^2 - \omega - m)y^2 - \frac{m}{4a(1+ay^2)^4} - C_1 = 0. \quad (9)$$

Будем искать решение уравнения (9), полагая

$$y(z) = \sqrt{V(z)}. \quad (10)$$

Подставляя (9) в (10), получим уравнение

$$V_z^2 = 4V^2(m + \omega - k^2) + \frac{4Vm}{4a(1+aV)^4} + 4VC_1, \quad (11)$$

которое можно записать в виде

$$(1 + aV)^4 V_z^2 = A_1 V^6 + A_2 V^5 + A_3 V^4 + A_4 V^3 + A_5 V^2 + A_6 V^1, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= -4a^4 k^2 + 4a^4 m + 4a^4 \omega, \\ A_2 &= -4C_1 a^4 - 16a^3 k^2 + 16a^3 m + 16a^3 \omega, \\ A_3 &= -16C_1 a^3 - 24a^2 k^2 + 24a^2 m + 24a^2 \omega, \end{aligned} \quad (13)$$

$$A_4 = -24C_1 a^2 - 16ak^2 + 16am + 16a\omega,$$

$$A_5 = -16C_1 a - 4k^2 + 4m + 4\omega,$$

$$A_6 = \frac{4m}{3a} - 4C_1.$$

Будем искать решение уравнения (12), используя переменные

$$V(z) = G(\xi), \quad z = \Phi(\xi). \quad (14)$$

Используя (14), имеем

$$V_z = G_\xi \xi_z, \quad (15)$$

где функция $z = \Phi(\xi)$ может быть получена из решения дифференциального уравнения

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{(1 + aG(\xi))^2}{G(\xi)}. \quad (16)$$

Запишем уравнение (12), в виде:

$$(1 + aG)^4 G_\xi^2 \xi_z^2 = A_1 G^6 + A_2 G^5 + A_3 G^4 + A_4 G^3 + A_5 G^2 + A_6 G^1. \quad (17)$$

Пусть $A_6 = 0$, тогда $C_1 = \frac{m}{3a}$. Из уравнения (17), имеем

$$G_\xi^2 = A_1 G^4 + A_2 G^3 + A_3 G^2 + A_4 G + A_5, \quad (18)$$

где A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 определяется выражением (13).

Будем искать решение уравнения (18) в виде [19–21]

$$G(\xi) = A + BW(\xi), \quad (19)$$

где $W(\xi)$ решение уравнения

$$W_\xi^2 + \alpha W^4 + \beta W^3 - \gamma W^2 = 0. \quad (20)$$

Решение (20) имеет вид:

$$W(\xi) = \frac{4\gamma e^{(\xi - \xi_0)} \sqrt{\gamma}}{\beta^2 + 4\alpha\gamma + 2e^{(\xi - \xi_0)} \sqrt{\gamma} + e^{2(\xi - \xi_0)} \sqrt{\gamma}}. \quad (21)$$

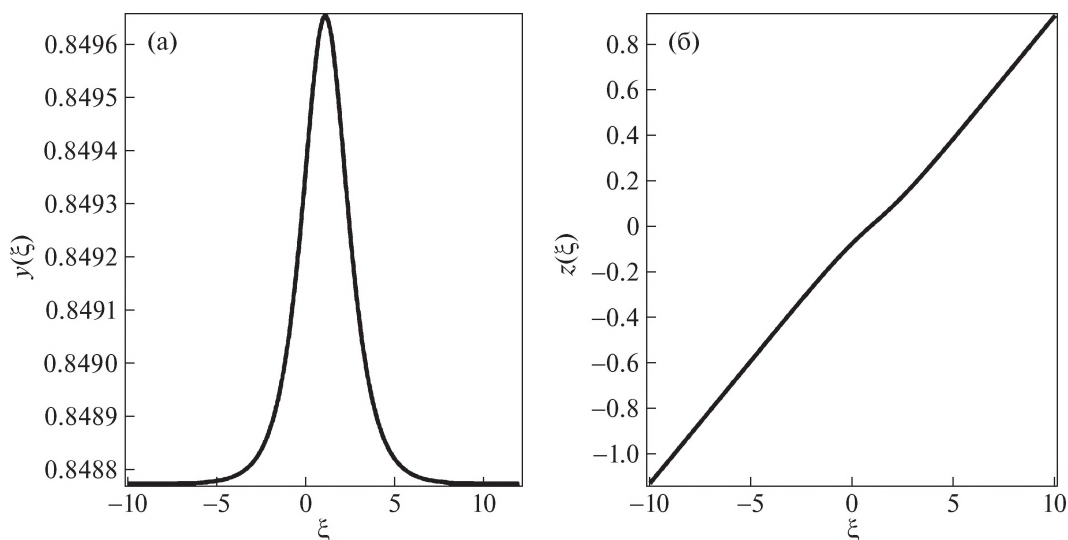


Рис. 1. а) Солитон (26) $y(\xi) = \sqrt{G(\xi)}$ при $a = -1$, $k = 1.2$, $m = 5$, $\omega = 3$, $\alpha = -0.1$, $\beta = 1.4$; б) Решение (27) уравнения (16) при $a = -1$, $k = 1.2$, $m = 5$, $\omega = 3$, $\alpha = -0.1$, $\beta = 1.4$.

Подставляя (19) в уравнение (18) и учитывая (20), получаем следующие условия:

$$B = 0, \pm \frac{\sqrt{-A_1\alpha}}{A_1}, A = \frac{\mp A_1\beta - A_2\sqrt{-A_1\alpha}}{4A_1\sqrt{-A_1\alpha}}, \quad (22)$$

$$\gamma = \frac{(8A_3\alpha - 3\beta^2)A_1 - 3A_2^2\alpha}{8A_1\alpha}, \quad (23)$$

$$A_3 = \frac{16A_1^2A_4\alpha\sqrt{-A_1\alpha} + A_1^2\beta^3 + 3A_1A_2^2\alpha\beta + 2A_2^3\alpha\sqrt{-A_1\alpha}}{8A_1\alpha(A_1\beta + A_2\sqrt{-A_1\alpha})}, \quad (24)$$

$$A_4 = \frac{256A_1^3A_5\alpha^2\sqrt{-A_1\alpha} + 2A_1^2A_2\alpha\beta^3 - A_1^2\beta^4\sqrt{-A_1\alpha} + 2A_1A_2^3\alpha^2\beta + A_2^4\alpha^2\sqrt{-A_1\alpha}}{32A_1^2\alpha^2(A_1\beta - A_2\sqrt{-A_1\alpha})}. \quad (25)$$

С учетом (19) и (22) получаем решение уравнения (8) в виде

$$y(\xi) = \left[\frac{\mp A_1\beta - A_2\sqrt{-A_1\alpha}}{4A_1\sqrt{-A_1\alpha}} \pm \frac{\sqrt{A_1\alpha}}{A_1} \frac{4\gamma e^{(\xi-\xi_0)}\sqrt{\gamma}}{\beta^2 + 4\alpha\gamma + 2e^{(\xi-\xi_0)}\sqrt{\gamma} + e^{2(\xi-\xi_0)}\sqrt{\gamma}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (26)$$

где γ определяется по формуле (23). Используя (26) и подставляя $G(\xi) = y(\xi)^2$ в (16), после интегрирования полученного выражения по ξ , получаем зависимость $z(\xi)$

$$z = \ln(e^{(\xi-\xi_0)}) \left(\frac{1}{A} + a^2A + 2a \right) + \frac{2a^2B4\gamma\sqrt{\gamma} \arctan\left(\frac{2\sqrt{\gamma}(e^{(\xi-\xi_0)} + 1)}{2\sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}\sqrt{\gamma} - \gamma} \right)}{2\sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}\sqrt{\gamma} - \gamma} - \frac{2B4\gamma\sqrt{\gamma} \arctan\left(\frac{2A\sqrt{\gamma}(e^{(\xi-\xi_0)} + 1) + B4\gamma\sqrt{\gamma}}{\sqrt{4A^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}\sqrt{\gamma} - 4A^2\gamma - 4AB4\gamma\sqrt{\gamma}\sqrt{\gamma} - 16B^2\gamma^3} \right)}{2A\sqrt{A^2(\beta^2 - \alpha\gamma)}\sqrt{\gamma} - A^2\gamma - 4AB\sqrt{\gamma} - 4B^2\gamma^3} + z_0, \quad (27)$$

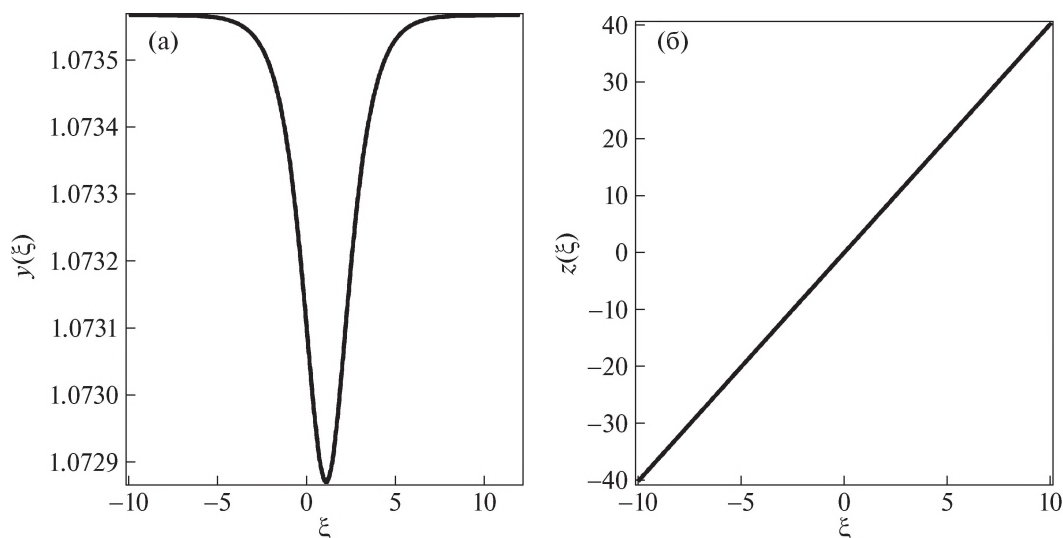


Рис 2. а) Солитон (26) $y(\xi) = \sqrt{G(\xi)}$ при $a = 1, k = 1.2, m = 5, \omega = 3, \alpha = -0.1, \beta = 1.4$; б) Решение (27) уравнения (16) при $a = 1, k = 1.2, m = 5, \omega = 3, \alpha = -0.1, \beta = 1.4$.

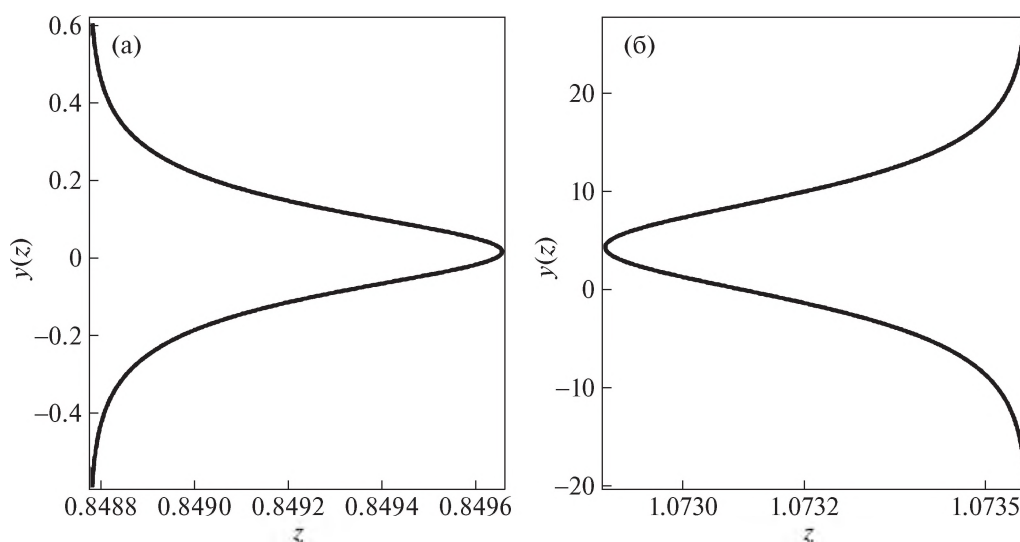


Рис. 3. а) Светлый солитон $y(z)$ уравнения (9) при $a = -1, k = 1.2, m = 5, \omega = 3, \alpha = -0.1, \beta = 1.4$; б) Темный солитон $y(z)$ уравнения (9) при $a = 1, k = 1.2, m = 5, \omega = 3, \alpha = -0.1, \beta = 1.4, t = 1$.

где A, B определяются по формулам (22), а γ определяется по формуле (23)

3. ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ (26) И (27)

Решение (26) $y(\xi) = \sqrt{G(\xi)}$ при $a = -1, k = 1.2, m = 5, \omega = 3, \alpha = -0.1, \beta = 1.4$ иллюстрируется в левой части рис. (1). Решение (27) уравнения (16)

при $a = -1, k = 1.2, m = 5, \omega = 3, \alpha = -0.1, \beta = 1.4$ показано в правой части рис. 1.

В случае $a = 1, k = 1.2, m = 5, \omega = 3, \alpha = -0.1, \beta = 1.4$ графики решений уравнения (18) и (16) представлены на рис. 2.

Решение $y(z)$ уравнения (9) при $a = -1, k = 1.2, m = 5, \omega = 3, \alpha = -0.1, \beta = 1.4$ иллюстрируются в левой части рис. 3. Решение $y(z)$ уравнения (9)

при $a = 1$, $k = 1.2$, $m = 5$, $\omega = 3$, $\alpha = -0.1$, $\beta = 1.4$ показано в правой части рис. 3.

Светлые и темные солитоны уравнения (9) определяются по формулам (10) и (27). Можно отметить, что зависимость $z = \Phi(\xi)$ практически прямая. Светлый солитон получается, если A взять со знаком минус, B взять со знаком плюс. Темный солитон возникает, если используем в этих формулах A со знаком плюс, а B со знаком минус. Светлый солитон уравнения (9) показан на рис. (3) слева при $a = -1$, $k = 1.2$, $m = 5$, $\omega = 3$, $\alpha = -0.1$, $\beta = 1.4$; темный солитон уравнения (9) при $a = 1$, $k = 1.2$, $m = 5$, $\omega = 3$, $\alpha = -0.1$, $\beta = 1.4$ показан на рис. (3) справа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано обобщение нелинейного уравнения Шредингера (1) для описания распространения импульсов в нелинейной насыщенной среде для показателя насыщения $p = 5$. Найден первый интеграл для полученного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Показано, что уравнение (1) имеет точные решения в виде уединенных волн выраженные через экспоненциальную функцию. Построены графики решений при некоторых значениях коэффициентов уравнения.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00141 “Разработка аналитических и численных методов для моделирования волн в диспергирующих волноводах”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kivshar Y.S., Agrawal G.P. Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals // Academic Press, 2003.
2. Kivshar Y.S., Luther-Davies B. Dark optical solitons: physics and applications // Phys. Rep., 1998. V. 298. P. 81–97.
3. Marburger J.H., Dawes E. Dynamical formation of a small-scale filament // Phys. Rev. Lett., 1968. V. 21 (8). P. 556–558.
4. Gustafson T.K., Kelley P.L., Chiao R.Y., Brewer R.G. Self-trapping in media with saturation of the nonlinear index // Appl. Phys. Lett., 1968. V. 12 (5). P. 165–168.
5. Reichert J.D., Wagner W.G. Self-trapped optical beams in liquids // IEEE J. Quantum Electron. QE-4 (4), 1968. P. 221–225.
6. Kudryashov N.A. Optical solitons of mathematical model with arbitrary refractive index // Optik, 2020. V. 224. P. 165391.
7. Kudryashov N.A. On traveling wave solutions of the Kundu – Eckhaus equation // Optik, 2020. V. 224. P. 165500.
8. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд. Дом Интеллекта, 2010. 364 с.
9. Kudryashov N.A., Antonova E.V. Solitary waves of equation for propagation pulse with power nonlinearities // Optik, 2020. V. 217. P. 164881.
10. Krolkowski W., Luther-Davies B. Analytic solution for soliton propagation in a nonlinear saturable medium // Opt. Lett., 1992. V. 17 (20). P. 1414–1416.
11. Krolkowski W., Luther-Davies B. Dark optical solitons in saturable nonlinear media // Opt. Lett., 1993. V. 18 (3). P. 188–190.
12. Krolkowski W., Akhmediev N., Luther-Davies B. Darker-than-black solitons: dark solitons with total phase shift greater than // Phys. Rev. E, 1993. V. 48 (5). P. 3980–3987.
13. Kudryashov N.A. First integrals and general solution of the traveling wave reduction for Schrodinger equation with anti-cubic nonlinearity // Optik, 2019. V. 185. P. 665–671.
14. Kudryashov N.A. Solitary wave solutions of hierarchy with non-local nonlinearity // Appl. Math. Lett., 2020. V. 103. P. 106155.
15. Kudryashov N.A. Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrodinger equations // Appl. Math. Comput., 2020. V. 371. P. 124972.
16. Kudryashov N.A. Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power Nonlinearities // Optik, 2020. V. 212. P. 164750.
17. Dan J., Sain S., Ghose-Choudhary A., Garai S. Application of the Kudryashov function for finding solitary wave solutions of NLS type differential equations // Optik, 2020. V. 224. P. 165519.
18. Kudryashov N.A. Bright and dark solitons in a nonlinear saturable medium // Physics Letters A, 2022. P. 127913.
19. Kudryashov N.A. Method for finding highly dispersive optical solitons of non-linear differential equations // Optik, 2019. V. 206. P. 163550.
20. Kudryashov N.A. Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power Nonlinearities // Optik, 2020. V. 212. P. 164750.
21. Kudryashov N.A. Solitary wave solutions of hierarchy with non-local nonlinearity // Appl. Math. Lett., 2020. V. 103. P. 106155.

Dark and Bright Solitons of the Nonlinear Schrödinger Equation with Saturation

E. V. Antonova^{a,#} and N. A. Kudryashov^{a,##}

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: EVAntonova@mephi.ru

^{##}e-mail: NAKudryashov@mephi.ru

Received May 14, 2022; revised May 15, 2022; accepted May 17, 2022

Abstract—A generalized model of the Schrödinger equation is considered to describe the propagation of pulses in a nonlinear medium with saturation. The Cauchy problem for it is not solved by the inverse scattering transform; the solution of the equation is considered including the travelling wave. A system of differential equations for the imaginary and real parts has been derived in terms of the traveling wave variables. Optical solitons for describing the propagation of pulses are obtained in the form of implicit functions. Analytical solutions are expressed in terms of an exponential function. The solutions obtained for light and dark solitons in a saturating medium of the generalized nonlinear Schrödinger equation are solitary waves under certain restrictions on the model parameters. The solutions obtained are plotted.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation, solitary wave, saturable medium, analytical solution

DOI: 10.56304/S2304487X22010023

REFERENCES

1. Kivshar Y.S., Agrawal G.P. Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals. *Academic Press*, 2003.
2. Kivshar Y.S., Luther-Davies B. Dark optical solitons: physics and applications. *Phys. Rep.*, 1998, vol. 298, pp. 81–97.
3. Marburger J.H., Dawes E. Dynamical formation of a small-scale filament. *Phys. Rev. Lett.*, 1968, vol. 21 (8), pp. 556–558.
4. Gustafson T.K., Kelley P.L., Chiao R.Y., Brewer R.G. Self-trapping in media with saturation of the nonlinear index. *Appl. Phys. Lett.*, 1968, vol. 12 (5), pp. 165–168.
5. Reichert J.D., Wagner W.G. Self-trapped optical beams in liquids. *IEEE J. Quantum Electron.* QE-4 (4), 1968, pp. 221–225.
6. Kudryashov N.A. Optical solitons of mathematical model with arbitrary refractive index. *Optik*, 2020, vol. 224, pp. 165391.
7. Kudryashov N.A. On traveling wave solutions of the Kundu – Eckhaus equation. *Optik*, 2020, vol. 224, pp. 165500.
8. Kudryashov N.A. Metody nelinejnoj matematicheskoy fiziki. [Methods of nonlinear mathematical physics]. Dolgoprudnyj. Dom Intellekta Publ., 2010, 364 p.
9. Kudryashov N.A., Antonova E.V. Solitary waves of equation for propagation pulse with power nonlinearities. *Optik*, 2020, vol. 217, pp. 164881.
10. Krolkowski W., Luther-Davies B. Analytic solution for soliton propagation in a nonlinear saturable medium. *Opt. Lett.*, 1992, vol. 17 (20), pp. 1414–1416.
11. Krolkowski W., Luther-Davies B. Dark optical solitons in saturable nonlinear media. *Opt. Lett.*, 1993, vol. 18 (3), pp. 188–190.
12. Krolkowski W., Akhmediev N., Luther-Davies B. Darker-than-black solitons: dark solitons with total phase shift greater than. *Phys. Rev. E*, 1993, vol. 48 (5), pp. 3980–3987.
13. Kudryashov N.A. First integrals and general solution of the traveling wave reduction for Schrodinger equation with anti-cubic nonlinearity. *Optik*, 2019, vol. 185, pp. 665–671.
14. Kudryashov N.A. Solitary wave solutions of hierarchy with non-local nonlinearity. *Appl. Math. Lett.*, 2020, vol. 103, pp. 106155.
15. Kudryashov N.A. Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrodinger equations. *Appl. Math. Comput.*, 2020, vol. 371, pp. 124972.
16. Kudryashov N.A. Mathematical model of propagation pulse in optical-ber with power Nonlinearities. *Optik*, 2020, vol. 212, pp. 164750.
17. Dan J., Sain S., Ghose-Choudhary A., Garai S. Application of the Kudryashov function for finding solitary wave solutions of NLS type differential equations. *Optik*, 2020, vol. 224, pp. 165519.
18. Kudryashov N.A. Bright and dark solitons in a nonlinear saturable medium. *Physics Letters A*, 2022, pp. 127913.
19. Kudryashov N.A. Method for finding highly dispersive optical solitons of non-linear differential equations. *Optik*, 2019, vol. 206, pp. 163550.
20. Kudryashov N.A. Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power Nonlinearities. *Optik*, 2020, vol. 212, pp. 164750.
21. Kudryashov N.A. Solitary wave solutions of hierarchy with non-local nonlinearity. *Appl. Math. Lett.*, 2020, vol. 103, pp. 106155.