

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 537.8

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

© 2022 г. С. П. Баутин^{1,*}, А. Г. Обухов^{2,**}

¹ Снежинский физико-технический институт НИЯУ МИФИ, Снежинск, Челябинской области, 456776, Россия

² Тюменский индустриальный университет, Тюмень, 625000, Россия

*e-mail: spbautin@mail.ru

**e-mail: agobukhov@inbox.ru

Поступила в редакцию 23.05.2022 г.

После доработки 24.05.2022 г.

Принята к публикации 31.05.2022 г.

Рассматривается система уравнений Максвелла, решения которой описывают распространение электромагнитных волн. Для этой системы в начальный момент времени ставятся дифференцируемые начальные условия, разделенные по пространственным переменным. У полученной задачи Коши в явном виде построено общее решение, которое является соответствующей линейной комбинацией плоских бегущих со скоростью света волн, распространяющихся вдоль всех трех пространственных переменных.

Ключевые слова: система уравнений Максвелла, разделение переменных, задача Коши, общее решение, плоская бегущая волна

DOI: 10.56304/S2304487X22010047

ВВЕДЕНИЕ

Система уравнений Максвелла (СУМ) при условии отсутствия зарядов и электрического тока имеет следующий вид [1–3]:

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} B = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} B = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} E = 0, \quad (4)$$

где вектор B с компонентами (u, v, w) задает магнитное поле; вектор E с компонентами (p, q, s) — электрическое поле; c — постоянная скорость света.

С точки зрения математики система (1)–(4) является переопределенной, поскольку для шести искомых функций — компонент векторов B и E — присутствуют восемь уравнений: шесть в двух векторных уравнениях (1), (2) и еще двумя уравнениями являются соотношения (3), (4). Тем не менее, как бы “лишние” уравнения (3), (4) являются следствиями объективных законов электромагнитных явлений: (3) передает отсутствие источников магнитного поля, (4) есть следствие закона Кулона [4, с. 264, 265]. В теории уравнений с частными производными соотношения типа (3), (4) называют дополнительными дифференциаль-

ными связями и имеются методы исследования таких задач [5].

В общем случае СУМ при наличии зарядов и электрического тока имеет вид [4, с. 264]:

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\operatorname{rot} B = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J, \quad (6)$$

$$\operatorname{div} B = 0, \quad (7)$$

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho, \quad (8)$$

где ρ — плотность присутствующего электрического заряда, J — плотность имеющегося электрического тока. Система из шести уравнений (5), (6) является линейной неоднородной системой уравнений с частными производными и ее общее решение состоит из суммы общего решения однородной системы (1), (2) и одного частного решения неоднородной системы (5), (6).

В работе вначале рассматривается система уравнений (1), (2) из шести уравнений для шести искомых функций. С учетом формул для вычисления оператора ротора

$$\operatorname{rot} B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}, \quad \operatorname{rot} E = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ p & q & s \end{vmatrix}$$

система уравнений (1), (2) имеет следующий вид (см. также [2, с. 182]):

$$\begin{cases} u_t = -cs_y + cq_z, \\ v_t = -cp_z + cs_x, \\ w_t = -cq_x + cp_y, \\ p_t = cw_y - cv_z, \\ q_t = cu_z - cw_x, \\ s_t = cv_x - cu_y. \end{cases} \quad (9)$$

Для системы (9) задаются начальные данные при $t = 0$:

$$\begin{cases} u(t, x, y, z)|_{t=0} = u^o(x, y, z), \\ v(t, x, y, z)|_{t=0} = v^o(x, y, z), \\ w(t, x, y, z)|_{t=0} = w^o(x, y, z), \\ p(t, x, y, z)|_{t=0} = p^o(x, y, z), \\ q(t, x, y, z)|_{t=0} = q^o(x, y, z), \\ s(t, x, y, z)|_{t=0} = s^o(x, y, z). \end{cases} \quad (10)$$

Задача Коши (9), (10) имеет единственное решение [2, с. 640–642]. Но явный вид решения задачи (9), (10) неизвестен.

Цель данной работы: в случае, когда начальные данные (10) разделены по пространственным переменным:

$$\begin{cases} u(t, x, y, z)|_{t=0} = u_1^o(x) + u_2^o(y) + u_3^o(z), \\ v(t, x, y, z)|_{t=0} = v_1^o(x) + v_2^o(y) + v_3^o(z), \\ w(t, x, y, z)|_{t=0} = w_1^o(x) + w_2^o(y) + w_3^o(z), \\ p(t, x, y, z)|_{t=0} = p_1^o(x) + p_2^o(y) + p_3^o(z), \\ q(t, x, y, z)|_{t=0} = q_1^o(x) + q_2^o(y) + q_3^o(z), \\ s(t, x, y, z)|_{t=0} = s_1^o(x) + s_2^o(y) + s_3^o(z). \end{cases} \quad (11)$$

вывести формулу общего решения задачи (9), (11) и обсудить вопрос выполнения в этом случае уравнений (3), (4).

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ, ЗАВИСЯЩЕГО ТОЛЬКО ОТ t И ОТ x

Вначале рассматривается случай, когда нет зависимости от y, z , то есть

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

и система (9) переходит в следующую систему

$$\begin{cases} u_t = 0, \\ v_t = cs_x, \\ w_t = -cq_x, \\ p_t = 0, \\ q_t = -cw_x, \\ s_t = cv_x, \end{cases} \quad (12)$$

для которой начальные условия (11) при $t = 0$ переходят в условия:

$$\begin{cases} u|_{t=0} = u^o(x), \\ v|_{t=0} = v^o(x), \\ w|_{t=0} = w^o(x), \\ p|_{t=0} = p^o(x), \\ q|_{t=0} = q^o(x), \\ s|_{t=0} = s^o(x). \end{cases} \quad (13)$$

Из первого и четвертого уравнений системы (12) сразу получается, что функции u, p полностью совпадают с соответствующими начальными условиями из (13):

$$u(t, x) = u^o(x), \quad p(t, x) = p^o(x).$$

Оставшиеся четыре уравнения системы (12) для искомых v, w, q, s “расщепляются” на две независимые системы: одна для искомых функций v, s , другая — для w, q . И, следовательно, пары функций v, s и w, q между собой не связаны и меняются независимо друг от друга.

В результате получаются две следующие задачи Коши:

$$\begin{cases} v_t = cs_x, \\ s_t = cv_x, \\ v|_{t=0} = v^o(x), \\ s|_{t=0} = s^o(x). \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} w_t = -cq_x, \\ q_t = -cw_x, \\ w|_{t=0} = w^o(x), \\ q|_{t=0} = q^o(x). \end{cases} \quad (15)$$

Замечание 1. Неэквивалентными следствиями обеих систем из задач (14), (15) будут волновые уравнения

$$\begin{aligned} v_{tt} &= c^2 v_{xx}, & s_{tt} &= c^2 s_{xx}, \\ w_{tt} &= c^2 w_{xx}, & q_{tt} &= c^2 q_{xx}, \end{aligned}$$

которые получаются стандартным образом. Например, в случае системы (14) первое уравнение дифференцируется по времени, а второе по x :

$$v_{tt} = cs_{xt}, \quad s_{tx} = cv_{xx}$$

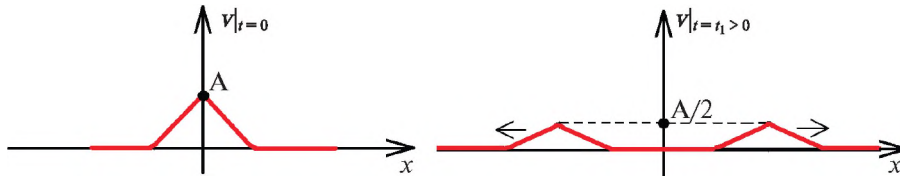


Рис. 1. Решение волнового уравнения в случае $v|_{t=0}$ в разные моменты времени.

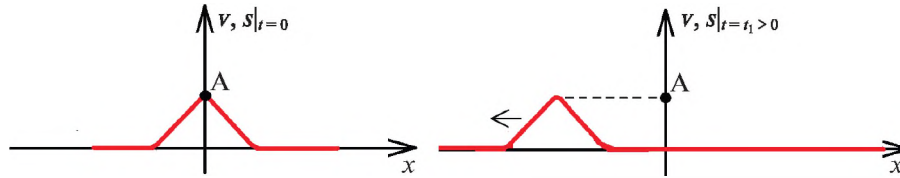


Рис. 2. Решение $v(t, x) = s(t, x)$ задачи (14) в случае $v^o(x) = s^o(x)$ в разные моменты времени.

и исключение из первого уравнения величины (cs_{xt}) с помощью второго уравнения, умноженного на скорость света c , дает следующее соотношение

$$v_{tt} = c^2 v_{xx},$$

то есть волновое уравнение для искомой функции $v(t, x)$. Известно, что решения неэквивалентных следствий исходной задачи могут не быть ее решениями. Например, выбор для функций $v(t, x)$, $s(t, x)$ соответствующих решений волновых уравнений в виде

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \frac{1}{2} [v^o(x - ct) + v^o(x + ct)], \\ s(t, x) &= \frac{1}{2} [s^o(x - ct) + s^o(x + ct)] \end{aligned} \quad (16)$$

не даст решение СУМ: функции (16) удовлетворяют первому уравнению системы (14) только в тривиальном случае $v^o(x) = s^o(x) \equiv 0$, то есть в случае нулевых решений СУМ. На рис. 2 для примера приведено решение задачи (14) в случае ненулевых начальных условий $v^o(x) = s^o(x)$.

Далее решение задачи Коши (14) представляется в виде рядов Тейлора, поскольку задача (1), (2), (10) попадает под действие теоремы Ковалевской [2, 6]:

$$\begin{aligned} v(t, x) &= v_0(x) + v_1(x)t + \\ &+ v_2(x)\frac{t^2}{2!} + v_3(x)\frac{t^3}{3!} + v_4(x)\frac{t^4}{4!} + \dots, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} s(t, x) &= s_0(x) + s_1(x)t + s_2(x)\frac{t^2}{2!} + \\ &+ s_3(x)\frac{t^3}{3!} + s_4(x)\frac{t^4}{4!} + \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$v_k(x) = \frac{\partial^k v(t, x)}{\partial t^k} \Big|_{t=0}, \quad s_k(x) = \frac{\partial^k s(t, x)}{\partial t^k} \Big|_{t=0}.$$

Коэффициенты $v_0(x)$, $s_0(x)$ заданы начальными условиями из задачи (14): $v_0(x) = v^o(x)$, $s_0(x) = s^o(x)$.

Коэффициенты $v_1(x)$, $s_1(x)$ определяются из уравнений системы (14), рассмотренных при $t = 0$:

$$v_1(x) = cs'_0(x), \quad s_1(x) = cv'_0(x).$$

Соотношения, получившиеся для нулевых и первых коэффициентов рядов (17), (18), берутся за базу индукции.

Делается следующее предположение индукции:

$$\begin{aligned} v_{2k}(x) &= c^{2k} v_0^{(2k)}(x), & v_{2k+1}(x) &= c^{2k+1} s_0^{(2k+1)}(x), \\ s_{2k}(x) &= c^{2k} s_0^{(2k)}(x), & s_{2k+1}(x) &= c^{2k+1} v_0^{(2k+1)}(x). \end{aligned}$$

Шаг индукции. Коэффициенты $v_{2k+2}(x)$, $s_{2k+2}(x)$ определяются при дифференцировании системы из задачи (14) $(2k+1)$ раз по t и подстановки в получившиеся соотношения значения $t = 0$:

$$\begin{aligned} v_{2k+2}(x) &= cs'_{2k+1}(x) = \\ &= c[c^{2k+1} v_0^{(2k+1)}(x)]' = c^{2k+2} v_0^{(2k+2)}(x), \\ s_{2k+2}(x) &= cv'_{2k+1}(x) = \\ &= c[c^{2k+1} s_0^{(2k+1)}(x)]' = c^{2k+2} s_0^{(2k+2)}(x). \end{aligned}$$

Для определения последующих коэффициентов $v_{2k+3}(x)$, $s_{2k+3}(x)$ уравнения системы (14) диффе-

ренцируются $(2k + 2)$ раза по t и снова полагается $t = 0$:

$$v_{2k+3}(x) = cs'_{2k+2}(x) = \\ = c[c^{2k+2}s_0^{(2k+2)}(x)]' = c^{2k+3}s_0^{(2k+3)}(x),$$

$$s_{2k+3}(x) = cv'_{2k+2}(x) = \\ = c[c^{2k+2}v_0^{(2k+2)}(x)]' = c^{2k+3}v_0^{(2k+3)}(x).$$

Методом математической индукции нужные формулы для коэффициентов рядов (17), (18) доказаны.

С учетом этих формул ряды (17), (18) получаются такими:

$$v(t, x) = v_0(x) + cs'_0(x)t + c^2v''_0(x)\frac{t^2}{2!} + \\ + c^3s'''_0(x)\frac{t^3}{3!} + c^4v^{(4)}_0(x)\frac{t^4}{4!} + \dots, \quad (19)$$

$$s(t, x) = s_0(x) + cv'_0(x)t + c^2s''_0(x)\frac{t^2}{2!} + \\ + c^3v'''_0(x)\frac{t^3}{3!} + c^4s^{(4)}_0(x)\frac{t^4}{4!} + \dots \quad (20)$$

Сложение равенств (19), (20) дает следующий ряд

$$v(t, x) + s(t, x) = v_0(x) + s_0(x) + v'_0(x)(ct) + s'_0(x)(ct) + \\ + v''_0(x)\frac{(ct)^2}{2!} + s''_0(x)\frac{(ct)^2}{2!} + v'''_0(x)\frac{(ct)^3}{3!} + s'''_0(x)\frac{(ct)^3}{3!} + \\ + v^{(4)}_0(x)\frac{(ct)^4}{4!} + s^{(4)}_0(x)\frac{(ct)^4}{4!} + \dots,$$

то есть

$$v(t, x) + s(t, x) = v_0(x + ct) + s_0(x + ct).$$

Последнее равенство получается при разложении в ряды по степеням ct слагаемых $v_0(x + ct)$, $s_0(x + ct)$ из правой части последнего равенства и сравнении их с рядом для суммы $v(t, x) + s(t, x)$.

С учетом того, что $v_0 = v^o(x)$, $s_0(x) = s^o(x)$ получается:

$$v(t, x) + s(t, x) = v^o(x + ct) + s^o(x + ct). \quad (21)$$

Вычитание из равенства (19) равенства (20) дает следующий ряд

$$v(t, x) - s(t, x) = v_0(x) - s_0(x) + v'_0(x)(ct) - \\ - s'_0(x)(ct) + v''_0(x)\frac{(ct)^2}{2!} - s''_0(x)\frac{(ct)^2}{2!} + v'''_0(x)\frac{(ct)^3}{3!} - \\ - s'''_0(x)\frac{(ct)^3}{3!} + v^{(4)}_0(x)\frac{(ct)^4}{4!} - s^{(4)}_0(x)\frac{(ct)^4}{4!} + \dots,$$

то есть

$$v(t, x) - s(t, x) = v_0(x - ct) - s_0(x - ct),$$

что также проверяется разложением в ряды по степеням (ct) двух слагаемых из правой части последнего равенства и сравнении их с выписанным выше рядом для разности $v(t, x) - s(t, x)$.

С учетом того, что $v_0 = v^o(x)$, $s_0(x) = s^o(x)$ получается

$$v(t, x) - s(t, x) = v^o(x - ct) - s^o(x - ct). \quad (22)$$

Сложение полученных равенств (21), (22) приводит к формуле

$$v(t, x) = \frac{1}{2}[v^o(x + ct) + v^o(x - ct) + \\ + s^o(x + ct) - s^o(x - ct)], \quad (23)$$

а их разность дает такой ответ

$$s(t, x) = \frac{1}{2}[v^o(x + ct) - v^o(x - ct) + \\ + s^o(x + ct) + s^o(x - ct)]. \quad (24)$$

Формулы (23), (24) задают искомое решение задачи (14) в виде соответствующих комбинаций бегущих со скоростью света плоских волн. Это можно также проверить непосредственной подстановкой функций (23), (24) в задачу (14).

Вначале для функций (23), (24) проверяется выполнимость начальных условий из задачи (14):

$$v(t, x)|_{t=0} = \frac{1}{2}[v^o(x + 0) + v^o(x - 0) + \\ + s^o(x + 0) - s^o(x - 0)] = v^o(x),$$

$$s(t, x)|_{t=0} = \frac{1}{2}[v^o(x + 0) - v^o(x - 0) + \\ + s^o(x + 0) + s^o(x - 0)] = s^o(x).$$

Для проверки выполнимости уравнений из задачи (14) надо вычислить производную по t от выражения (23), а затем производную по x от выражения (24):

$$v_t(t, x) = \frac{1}{2}\{[v_0(x + ct)]' \times c + [v_0(x - ct)]' \times \\ \times (-c) + [s_0(x + ct)]' \times c - [s_0(x - ct)]' \times (-c)\} = \\ = \frac{1}{2}\{c[v_0(x + ct)]' - c[v_0(x - ct)]' + \\ + c[s_0(x + ct)]' \times c + c[s_0(x - ct)]'\},$$

$$s_x(t, x) = \frac{1}{2}\{[v_0(x + ct)]' - [v_0(x - ct)]' + \\ + [s_0(x + ct)]' - [s_0(x - ct)]'\}.$$

Для полученных соотношений первое уравнение из задачи (14)

$$v_t = cs_x$$

выполняется тождественно, поскольку

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{c[v_0(x+ct)]' - c[v_0(x-ct)]' + \\ & + c[s_0(x+ct)]' + c[s_0(x-ct)]'\} \equiv \\ & \equiv c \frac{1}{2} \{[v_0(x+ct)]' - [v_0(x-ct)]' + \\ & + [s_0(x+ct)]' - [s_0(x-ct)]'\}. \end{aligned}$$

Аналогично проводятся и выкладки, показывающие, что функции (23), (24) решают второе уравнение из задачи (14).

Таким образом, получен явный вид решения задачи (14) для которого от функций $v^\circ(x)$, $s^\circ(x)$ требуется только существование первых производных, а не аналитичность этих функций.

Далее проводится построение двух оставшихся искомым функций $w(t, x)$, $q(t, x)$, являющихся решением задачи (15).

Если в этой задаче (15) сделать замену переменной $t' = -t$, то получится задача

$$\begin{cases} w_{t'} = cq_x, \\ q_{t'} = cw_x, \\ w(t', x)|_{t'=0} = w_0(x), \\ q(t', x)|_{t'=0} = q_0(x), \end{cases}$$

которая полностью совпадает с задачей (14), если переобозначить

$$w \rightarrow v; \quad q \rightarrow s$$

и поэтому задача (15) имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} w(t, x) = & \frac{1}{2} [w^\circ(x-ct) + w^\circ(x+ct) + \\ & + q^\circ(x-ct) - q^\circ(x+ct)]; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} q(t, x) = & \frac{1}{2} [w^\circ(x-ct) - w^\circ(x+ct) + \\ & + q^\circ(x-ct) + q^\circ(x+ct)]. \end{aligned} \quad (26)$$

Построенные решения переписываются с использованием исходных обозначений искомым функций и их начальных условий:

$$\begin{cases} u(t, x) = u^\circ(x); \\ v(t, x) = \frac{1}{2} [v^\circ(x+ct) + v^\circ(x-ct) + s^\circ(x+ct) - s^\circ(x-ct)]; \\ w(t, x) = \frac{1}{2} [w^\circ(x-ct) + w^\circ(x+ct) + q^\circ(x-ct) - q^\circ(x+ct)]; \\ p(t, x) = p^\circ(x); \\ q(t, x) = \frac{1}{2} [w^\circ(x-ct) - w^\circ(x+ct) + q^\circ(x-ct) + q^\circ(x+ct)]; \\ s(t, x) = \frac{1}{2} [v^\circ(x+ct) - v^\circ(x-ct) + s^\circ(x+ct) + s^\circ(x-ct)]. \end{cases} \quad (27)$$

Таким образом, найденное в виде (27) решение уравнений (1), (2) представляют из себя соответствующие комбинации плоских бегущих волн, распространяющихся вдоль оси Ox в противоположные стороны со скоростью света.

Пары v , s и w , q компонент векторов электрического и магнитного полей определяются каждой своей парой начальных условий v° , s° и w° , q° . Каждая пара функций v , s и w , q расположена во взаимно ортогональных плоскостях, которые в свою очередь перпендикулярны плоскости $x = 0$. Естественно, что v , w и q , s также лежат во взаимно ортогональных плоскостях как соответствующие компоненты векторов B и E .

Свойства конкретных решений зависят, естественно, от вида конкретных начальных условий.

Например, если

$$v^\circ(x) = s^\circ(x),$$

то из формул (23), (24) следует, что решением для двух соответствующих компонент будет волна, бегущая только в одну сторону – влево:

$$v(t, x) = s(t, x) = v^\circ(x+ct) = s^\circ(x+ct),$$

максимальное значение которой совпадает с максимальным значением начальных условий (см. рис. 2).

А если начальные данные удовлетворяют такому равенству

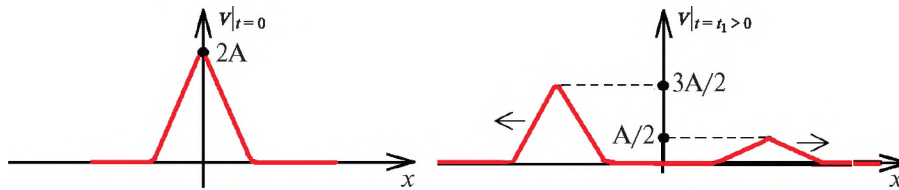
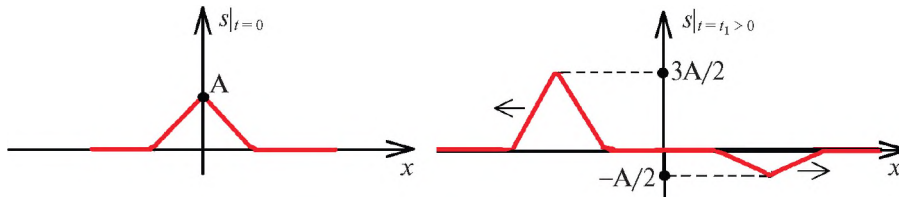
$$v^\circ(x) = 2s^\circ(x),$$

то решением для этих же двух компонент будут две, бегущие в противоположные стороны волны (см. рис. 3, 4)

$$v(x, t) = 3s^\circ(x+ct) + s^\circ(x-ct);$$

$$s(x, t) = 3s^\circ(x+ct)s - s^\circ(x-ct).$$

При этом разные значения имеют амплитуды волн, бегущих в разные стороны. Максимальное

Рис. 3. Решение $v(t, x)$ задачи (14) в случае $v^o(x) = 2s^o(x)$ в разные моменты времени.Рис. 4. Решение $s(t, x)$ задачи (14) в случае $v^o(x) = 2s^o(x)$ в разные моменты времени.

значение функции $s(t, x)$ в данном случае в полтора раза больше максимального значения начальных данных для функции $s(t, x)$.

Можно предположить, что подобные свойства решений СУМ найдут применение в конкретных электромагнитных устройствах.

На рис. 1–4 левая часть рисунков соответствует моменту времени $t = 0$, правая – моменту $t = t_1 > 0$. На правых частях рис. 1–4 стрелками показаны направления распространения бегущих волн.

Сравнение рисунков 1–4 говорит о том, что дословно переносить свойства решений волнового уравнения (неэквивалентного следствия систем (14), (15)) на свойства решений СУМ не следует, поскольку это не соответствует действительности. В частности, среди решений СУМ нет решения, которое представляет две одинаковые волны, бегущие в противоположные стороны.

Обращаясь к исходному виду СУМ – соотношения (1)–(4) – имеем, что при найденном решении (27) для выполнения соотношений (3), (4) необходимо и достаточно выполнение следующих равенств для начальных условий из задач (14), (15):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} B|_{t=0} &= 0, \\ \operatorname{div} E|_{t=0} &= 0, \end{aligned}$$

и значит

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \begin{pmatrix} u^o(x) \\ v^o(x) \\ w^o(x) \end{pmatrix} &= [u^o(x)]' = 0, \\ \operatorname{div} \begin{pmatrix} p^o(x) \\ q^o(x) \\ s^o(x) \end{pmatrix} &= [p^o(x)]' = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Условия (28) эквивалентны следующим условиям

$$u^o(x) = \text{const}; \quad p^o(x) = \text{const}. \quad (29)$$

Последнее утверждение следует из таких выкладок. Применение операции дивергенции к уравнениям (1), (2) и учет равенства

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0,$$

справедливого для любого вектора F , приводит к таким равенствам

$$\frac{\partial(\operatorname{div} B)}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial(\operatorname{div} E)}{\partial t} = 0.$$

Эти равенства являются дифференциальными уравнениями, которые при выполнении для них нулевых начальных условий (28) имеют единственные нулевые решения. И тогда для выполнения равенств (3), (4) – последних двух соотношений из СУМ – необходимо и достаточно выполнение условий (28), которые эквивалентны условиям (29).

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Для того, чтобы построенное решение (27) удовлетворяло всей системе уравнений Максвелла (1)–(4) необходимо и достаточно выполнения условий (29).

Построение решений, зависящих от (t, y) или от (t, z)

Построение решений системы уравнений Максвелла в случае зависимости только от одной из двух других пространственных переменных: только от y или только от z – производится аналогичным образом.

В частности, если решение зависит только от y , то вместо уравнений (1), (2) получается следу-

ющая система уравнений с частными производными

$$\begin{cases} u_t = -cs_y, \\ v_t = 0, \\ w_t = cp_y, \\ p_t = cw_y, \\ q_t = 0, \\ s_t = -cu_y. \end{cases} \quad (30)$$

У этой системы сразу определяются две искомые функции

$$v = v^o(y); \quad q(t, y) = q^o(y)$$

с произвольными $v^o(y)$, $q^o(y)$.

Оставшиеся четыре уравнения расщепляются на две независимые системы, каждая из двух уравнений

$$\begin{cases} u_t = -cs_y, \\ s_t = -cu_y, \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} w_t = cp_y, \\ p_t = cw_y, \end{cases} \quad (32)$$

построение решений которых проводится аналогично решению систем из задач (14), (15).

Если искомое решение уравнений (1), (2) зависит только от z , то вместо уравнений (1), (2) получается следующая система уравнений с частными производными

$$\begin{cases} u_t = -cs_y + cq_z, \\ v_t = -cp_z + cs_x, \\ w_t = -cq_x + cp_y, \\ p_t = cw_y - cv_z, \\ q_t = cu_z - cw_x, \\ s_t = cv_x - cu_y. \end{cases}$$

У этой системы сразу определяются две искомые функции

$$w(t, z) = w^o(z); \quad s(t, y) = s^o(z)$$

с произвольными $w^o(z)$, $s^o(z)$.

Оставшиеся четыре уравнения расщепляются на две независимые системы, каждая из двух уравнений

$$\begin{cases} u_t = cq_z, \\ q_t = cu_z, \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{cases} v_t = -cp_z, \\ p_t = -cv_z, \end{cases} \quad (34)$$

построение решений которых проводится аналогично решению систем из задач (14), (15).

Общее решение задачи Коши в одном частном случае

Теорема 2. Пусть для уравнений (1), (2) начальные данные (10), записанные в следующем виде

$$B(t, x, y, z)|_{t=0} = B^o(x, y, z);$$

$$E(t, x, y, z)|_{t=0} = E^o(x, y, z),$$

разделены по пространственным переменным

$$B^o = B_1^o(x) + B_2^o(y) + B_3^o(z) \begin{pmatrix} u_1^o(x) \\ v_1^o(x) \\ w_1^o(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_2^o(y) \\ v_2^o(y) \\ w_2^o(y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_3^o(z) \\ v_3^o(z) \\ w_3^o(z) \end{pmatrix}, \quad (35)$$

$$E^o = E_1^o(x) + E_2^o(y) + E_3^o(z) \begin{pmatrix} p_1^o(x) \\ q_1^o(x) \\ s_1^o(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_2^o(y) \\ q_2^o(y) \\ s_2^o(y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_3^o(z) \\ q_3^o(z) \\ s_3^o(z) \end{pmatrix}, \quad (36)$$

где компоненты векторов B_i^o , E_i^o , $i = 1, 2, 3$ являются произвольными дифференцируемыми функциями. Тогда решение задачи Коши (1), (2), (35), (36) имеет следующий вид:

$$B(t, x, y, z) = B_1(t, x) + B_2(t, y) + B_3(t, z), \quad (37)$$

$$E(t, x, y, z) = E_1(t, x) + E_2(t, y) + E_3(t, z), \quad (38)$$

где векторы из представлений (37), (38) такие:

$$B_1 = \begin{pmatrix} u_1^o(x) \\ \frac{1}{2}[v_1^o(x+ct) + v_1^o(x-ct) + s_1^o(x+ct) - s_1^o(x-ct)] \\ \frac{1}{2}[w_1^o(x-ct) + w_1^o(x+ct) + q_1^o(x-ct) - q_1^o(x+ct)] \end{pmatrix}, \quad (39)$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} p_1^o(x) \\ \frac{1}{2}[w_1^o(x-ct) - w_1^o(x+ct) + q_1^o(x-ct) + q_1^o(x+ct)] \\ \frac{1}{2}[v_1^o(x+ct) - v_1^o(x-ct) + s_1^o(x+ct) + s_1^o(x-ct)] \end{pmatrix}, \quad (40)$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} [u_2^o(y-ct) + u_2^o(y+ct) + s_2^o(y-ct) - s_2^o(y+ct)] \\ v_2^o(y) \\ \frac{1}{2}[w_2^o(y+ct) + w_2^o(y-ct) + p_2^o(y+ct) - p_2^o(y-ct)] \end{pmatrix}, \quad (41)$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[w_2^o(y+ct) - w_2^o(y-ct) + p_2^o(y+ct) + p_2^o(y-ct)] \\ q_2^o(y) \\ \frac{1}{2}[u_2^o(y-ct) - u_2^o(y+ct) + s_2^o(y-ct) + s_2^o(y+ct)] \end{pmatrix}, \quad (42)$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[u_3^o(z+ct) + u_3^o(z-ct) + q_3^o(z+ct) - q_3^o(z-ct)] \\ \frac{1}{2}[v_3^o(z-ct) + v_3^o(z+ct) + p_3^o(z-ct) - p_3^o(z+ct)] \\ w_3^o(z) \end{pmatrix}, \quad (43)$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[v_3^o(z-ct) - v_3^o(z+ct) + p_3^o(z-ct) + p_3^o(z+ct)] \\ \frac{1}{2}[u_3^o(z+ct) - u_3^o(z-ct) + q_3^o(z+ct) + q_3^o(z-ct)] \\ s_3^o(z) \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Для выполнения в этом случае соотношений (3), (4) необходимо и достаточно выполнения следующих равенств:

$$\begin{aligned} u_1^o(x) = \text{const}; \quad v_2^o(y) = \text{const}; \quad w_3^o(z) = \text{const}; \\ p_1^o(x) = \text{const}; \quad q_2^o(y) = \text{const}; \quad s_3^o(z) = \text{const}. \end{aligned} \quad (45)$$

Доказательство теоремы.

Справедливость формул (39)–(44) показана выше. Равенства (45) устанавливаются также, как ранее доказанные формулы (29): применение к уравнениям (1), (2) операции дивергенции приводит к двум дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{div } B) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t}(\text{div } E) = 0.$$

Если для этих уравнений задать начальные условия

$$\text{div } B|_{t=0} = 0; \quad \text{div } E|_{t=0} = 0, \quad (46)$$

то уравнения (3), (4) будут выполняться тождественно. Для выполнения равенств (46) с учетом вида начальных условий (35), (36) необходимыми

и достаточными условиями является выполнение двух равенств

$$\begin{aligned} [u_1^o(x)] + [v_2^o(y)] + [w_3^o(z)] &= 0, \\ [p_1^o(x)] + [q_2^o(y)] + [s_3^o(z)] &= 0. \end{aligned}$$

В этих суммах переменные разделены и поэтому два последних соотношения эквивалентны равенствам (45).

Теорема доказана.

Замечание 2. В книге [7, с. 208] приведена часть от точных решений СУМ, зависящих только от t , z , поскольку эта часть решений СУМ содержит, в отличие от (43), (44), только две (а не четыре) произвольные функции и не передает соответственно вторую и первую компоненты векторов E_3 и B_3 из (43), (44). Соответствующие части решений (43), (44) совпадают с упомянутыми функциями из [7, с. 208]. Кроме этого, поскольку среди полученных в данной работе решений СУМ имеются решения, приведенные на рис. 2, то утверждение из [7, с. 208]: “Таким образом, решение уравнений Максвелла для случая, когда E и H

(обозначения из [7, с. 208]) зависят лишь от одной декартовой координаты z , представляет собой наложение двух плоских волн, движущихся в противоположных направлениях оси z — является ошибочным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М.: гос. изд-во физ.-мат. литературы. 1960. 400 с.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
3. Тамм И.Е. Основы теории электричества. Москва: Наука, 1976. 616 с.
4. Парселл Э. Электричество и магнетизм. Москва: Наука, 1975. 440 с.
5. Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984. 272 с.
6. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.
7. Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. М.: изд-во “Советское радио”, 1971. 665 с.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta “MIFI”, 2022, vol. 11, no. 1, pp. 28–36

Solving the Cauchy Problem for a System of Maxwell's Equations

S. P. Bautin^{a,#} and A. G. Obukhov^{b,##}

^a Snezhinsk Institute of Physics and Technology, National Research Nuclear University MEPhI, Snezhinsk, Chelyabinsk region, 456776 Russia

^b Tyumen Industrial University, Tyumen, 625000 Russia

[#]e-mail: spbautin@mail.ru

^{##}e-mail: agobukhov@inbox.ru

Received May 23, 2022; revised May 24, 2022; accepted May 31 2022

Abstract—A system of Maxwell's equations describing the propagation of electromagnetic waves is considered. For this system, differentiable initial conditions separated by spatial variables are set at the initial time. The resulting Cauchy problem has an explicit general solution, which is the corresponding linear combination of plane waves traveling at the speed of light propagating along all three spatial directions.

Keywords: Maxwell's system of equations, separation of variables, Cauchy problem, general solution, traveling plane wave

DOI: 10.56304/S2304487X22010047

REFERENCE

1. Landau L.D., Lifschitz E.M. *Teoreticheskaja fizika. Tom 2: Teorija polja* [Theoretical physics. vol. 2: Field Theory]. Moscow, Gos. izd-vo fiz.-mat. Literatury Publ., 1960, 400 p.
2. Kurant R. *Uravnenija s chastnymi proizvodnymi* [Partial differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1964, 830 p.
3. Tamm I.E. *Osnovy teorii elektrichestva* [Fundamentals of the theory of electricity]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 616 p.
4. Parsell E. *Electrichestvo i magnetizm* [Electricity and magnetism]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 440 p.
5. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Janenko N.N. *Metod differentsialnyh svyazei i ego prilozhenija v gazovoi dinamike* [Differential coupling method and its applications in gas dynamics]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1984, 272 p.
6. Bautin S.P. *Charakteristicheskaja zadaca Koshy i ee prilozhenija v gazovoi dinamike* [The characteristic Cauchy problem and its applications in gas dynamics]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2009, 368 p.
7. Goldshtein L.D., Zernov N.V. *Elektromagnitnye polja i volny* [Electromagnetic fields and wave]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1971, 665 p.