

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ В ОПТИЧЕСКОМ ВОЛОКНЕ С ДВУМЯ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

© 2022 г. К. В. Кан^{1,*}, Н. А. Кудряшов^{1,**}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ Москва, 115409, Россия

*e-mail: kan_13@mail.ru

**e-mail: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию 31.05.2022 г.

После доработки 01.06.2022 г.

Принята к публикации 01.06.2022 г.

В работе рассматривается задача численного моделирования процесса распространения импульсов в оптическом волокне с двумя показателями преломления. Математическая модель сформулирована на основе нелинейного уравнения Шредингера с учетом периодических граничных условий. Для поиска аналитического решения дифференциального уравнения используется переход к переменным бегущей волны в результате которого получена система двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующих действительной и мнимой частям. С помощью обобщенного метода простейших уравнений найдено точное решение данной системы в виде уединенных волн. Численное решение задачи построено с применением псевдоспектрального метода, реализованного с помощью средств программирования Python. Тестирование программного кода выполнено путем сравнения численного решения с аналитическим при учете ограничений на параметры математической модели. Проанализировано влияние параметров модели на поведение численного решения при различных значениях показателя преломления среды и составлены таблицы, показывающие зависимость погрешности от значения параметра α . Приведены графики, демонстрирующие сравнение численного решения задачи с точным при $n = 1, 3, 5$.

Ключевые слова: уединенные волны, нелинейное уравнение Шредингера, псевдоспектральный метод, оптическое волокно

DOI: 10.56304/S2304487X22010072

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время исследованию распространения импульсов в нелинейных средах, таких как оптическое волокно, уделяется большое внимание. Основными уравнениями, используемыми при описании данного процесса, являются различные обобщения нелинейного уравнения Шредингера (НУШ). Классическое НУШ содержит в себе керровскую нелинейность, однако на практике материалы, из которых состоят волноводы, могут подчиняться целому ряду типов нелинейности. К примеру, в работе [1] описываются темные и светлые солитоны для решения обобщенного НУШ с насыщением. В работах [2, 3] рассматривается обобщенное НУШ, учитывающее хроматическую дисперсию и нелинейные отражения и найдены стационарные солитонные решения. Дифференциальное уравнение с нелинейностью 3-й, 5-й и 7-й степени с учетом введения различных типов возмущения изучается в [4].

В [5] получены резонансные оптические солитоны, распространяющиеся в среде с нелинейностью третьей и четвертой степени.

В данной работе рассматривается краевая задача численного моделирования, описываемая дифференциальным уравнением с произвольным коэффициентом отражения [9], [10]

$$iu_t + \alpha u_{xx} + (a|u|^n + b|u|^{2n})u = 0, \quad (1) \\ x \in [-L/2, L/2], t > 0$$

с учетом начальных и граничных условий в виде

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad (2) \\ u(x, t) = u(x + L, t), \quad u_x(x, t) = u_x(x + L, t),$$

где $u(x, t)$ — комплексная функция, i — мнимая единица; α, a, b — действительные числа; n — коэффициент отражения, L — размер расчетной области, $\phi(x)$ — зависимость начального импульса света.

Первый раздел статьи посвящен нахождению точных решений нелинейного дифференциального уравнения (1) с помощью обобщенного метода простейших уравнений [6–8]. Во втором разделе приведено описание применения псевдоспектрального метода для решения краевой задачи (1)–(2) (подробнее о методе см. [11]). В третьем разделе представлены результаты численного моделирования, а также сравнение численного решения с аналитическим при учете различных значений параметров модели.

1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДУ (1)

Задачи Коши для уравнения (1) не решаются методом обратной задачи рассеяния, поэтому на первом этапе ищем аналитическое решение, используя переход к переменным бегущей волны. С этой целью будем искать решение в виде

$$u(x, t) = y(z) \cdot e^{i(kx - \omega t)}, \quad z = x - C_0 t, \quad (3)$$

где $y(z)$ — действительная функция, k, ω — параметры.

Подставляя (3) в уравнение (1), получаем систему дифференциальных уравнений, соответствующих действительной и мнимой частям соответственно:

$$\begin{aligned} \alpha y_{zz} + (\omega - \alpha k^2) y + a y^{n+1} + b y^{2n+1} &= 0, \\ (2\alpha k - C_0) y_z &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Условием совместности для данной системы является соотношение

$$C_0 = 2\alpha k.$$

В соответствии с обобщенным методом простейших уравнений решение первого дифференциального уравнения системы (4) ищем в виде $y(z) = F_0 + F_1 R(z)$ (без потери общности далее полагаем $F_0 = 0$), где $R(z)$ — решение дифференциального уравнения

$$R_z^2 = ER^2 - AR^{n+2} + BR^{2n+2}, \quad (5)$$

имеющее вид:

$$R(z) = \left[\frac{4Ee^{(z-z_0)n\sqrt{E}}}{2AEe^{(z-z_0)n\sqrt{E}} + (A^2 + 4BE)e^{2(z-z_0)n\sqrt{E}} + 1} \right]^{1/n} \quad (6)$$

Подставляя (5) в первое дифференциальное уравнение системы (4) и полагая коэффициенты мономов в полученном уравнении равными нулю, т.е.

$$\begin{aligned} 2bF_1^{2n+1} - 2\alpha BF_1(n+1) &= 0 \text{ (моном при } R^{2n}); \\ 2aF_1^{n+1} - \alpha AF_1(n+2) &= 0 \text{ (моном при } R^n); \\ 2F_1(\alpha(E - k^2) + \omega) &= 0 \text{ (моном при } R^0); \end{aligned}$$

последовательно находим, что

$$\begin{aligned} b &= \alpha B(n+1)F_1^{-2n}, \\ a &= \frac{1}{2}\alpha A(n+2)F_1^{-n}, \\ \omega &= \alpha(k^2 - E). \end{aligned}$$

Таким образом, точное решение нелинейного дифференциального уравнения (1) можно записать как

$$u(x, t) = F_1 \left[\frac{4Ee^{(x-2\alpha kt - z_0)n\sqrt{E}}}{2AEe^{(x-2\alpha kt - z_0)n\sqrt{E}} + (A^2 + 4BE)e^{2(x-2\alpha kt - z_0)n\sqrt{E}} + 1} \right]^{1/n} e^{i(kx - \alpha(k^2 - E)t)}, \quad (7)$$

с учетом выполнения соотношений:

$$\begin{aligned} a &= \frac{A(n+2)\alpha}{2}; \quad b = B(1+n)\alpha; \\ w &= (E - k^2)\alpha; \quad C_0 = 2\alpha k. \end{aligned}$$

Полученное точное решение (7) используется для тестирования программного кода, необходимого для численного решения задачи.

2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(2)

Для численного решения задачи (1)–(2) использован псевдоспектральный метод [11]. Запишем уравнение (1) в виде:

$$u_t = i(\mathcal{L} + \mathcal{N}(u))u, \quad (8)$$

при этом справа в равенстве линейная часть выражается как

$$\mathcal{L} = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

а нелинейная имеет вид

$$\mathcal{N}(u) = a|u|^n + b|u|^{2n}.$$

Решение дифференциального уравнения (8) при переходе на следующий временной слой можно выразить в виде

$$u(x, t + \tau) \approx e^{i\tau(\mathcal{L} + \mathcal{N}(u))} \times u(x, t), \quad (9)$$

где τ — шаг по времени.

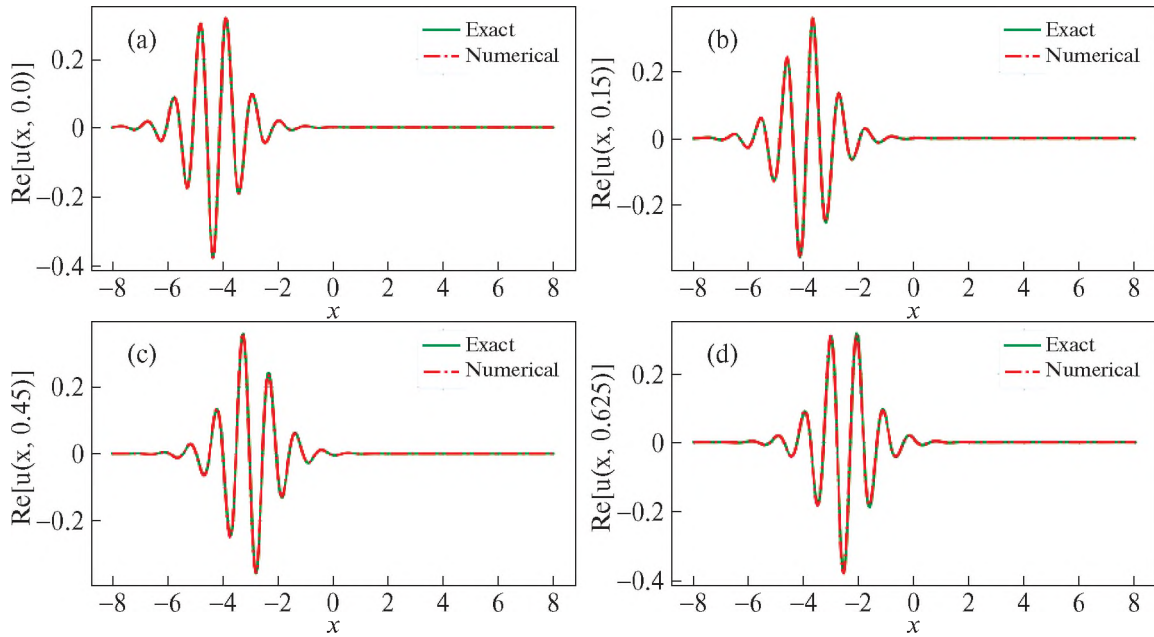


Рис. 1. Графики сравнения численного решения задачи (1)–(2) с аналитическим при $n = 1$ в момент времени: а) $t = 0$, б) $t = 0.15$, в) $t = 0.45$, д) $t = 0.625$.

При этом разбиение расчетной области с помощью узлов разностной сетки проводится в соответствии с формулой

$$x_i = i \times h, \quad i = \overline{0, N}, \quad h = L/N,$$

где N – количество разбиений, формула (9) представима в виде:

$$U^{m+1} = (\mathcal{J} - \theta i \tau \mathcal{L}_h)^{-1} (\mathcal{J} + i r (1 - \theta)) V^m, \quad (10)$$

где $0 \leq \theta \leq 1$, $r = \tau/h^2$, $\mathcal{J}$ – единичный оператор,

$$\mathcal{L}_h = \alpha \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2}.$$

Таким образом, конечная расчетная формула имеет вид:

$$U^{m+1} = (I - i r \theta S)^{-1} (I + i r (1 - \theta)) V^m, \quad (11)$$

где I – единичная матрица, i – мнимая единица, U^{m+1} – вектор значений функции $u(x, t)$ на $(m + 1)$ -м временном размерности $N - 1$,

$$V_i^m = e^{i\tau(a|u|^n + b|u|^{2n})} \times U_i^m, \quad U_i^m = u(x_i, t_m),$$

а матрица $S = (N \times N)$ с учетом периодических граничных условий $U_N = U_0$, $U_{-1} = U_{N-1}$ имеет вид:

$$S = \begin{pmatrix} -2\alpha & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & -2\alpha & \alpha & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & \dots & \alpha & -2\alpha & \alpha \\ \alpha & \dots & & \alpha & -2\alpha \end{pmatrix},$$

где показаны только ненулевые элементы матрицы.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Численное моделирование задачи проведено с применением средств программирования Python. Для реализации численного метода, описанного в разделе 2, в программном коде подключена библиотека numpy, для графической визуализации результатов моделирования использованы функции библиотеки matplotlib.

Для численного моделирования задавались следующие значения параметров: $L = 16$ – размер расчетной области; $N = 320$ – число разбиений; $M = 500$ – количество временных слоев; $h = L/N = 0.05$ – шаг по пространственной переменной; $\tau = h^2/2 = 0.00125$ – шаг по времени; $F_1 = 1.0$; $\alpha = 0.22$; $k = 6.5$ – волновое число; $z_0 = -3$; $A = 5.0$; $B = 6.0$; $E = 3.0$; $\omega = (k^2 - E)\alpha$; $b = B(n + 1)\alpha$; $C_0 = 2\alpha k$; $a = A(n + 2)\alpha/2$.

На рисунках 1–3 представлены графики численного моделирования распространения уеди-

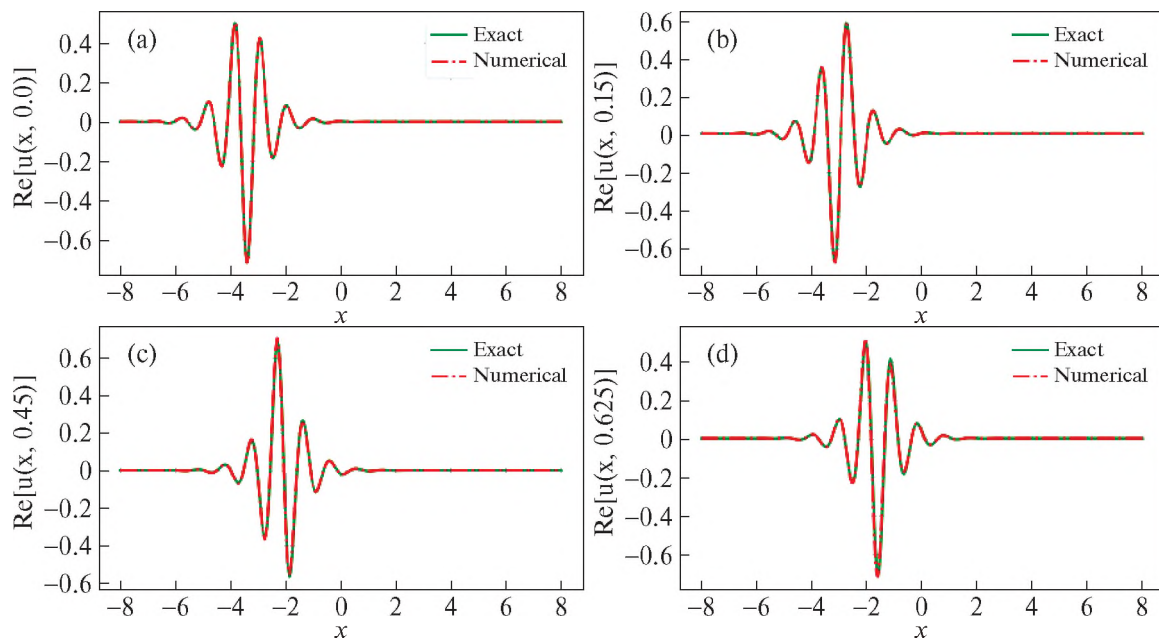


Рис. 2. Графики сравнения численного решения задачи (1)–(2) с аналитическим при $n = 3$ в момент времени: а) $t = 0$, б) $t = 0.15$, в) $t = 0.45$, г) $t = 0.625$.

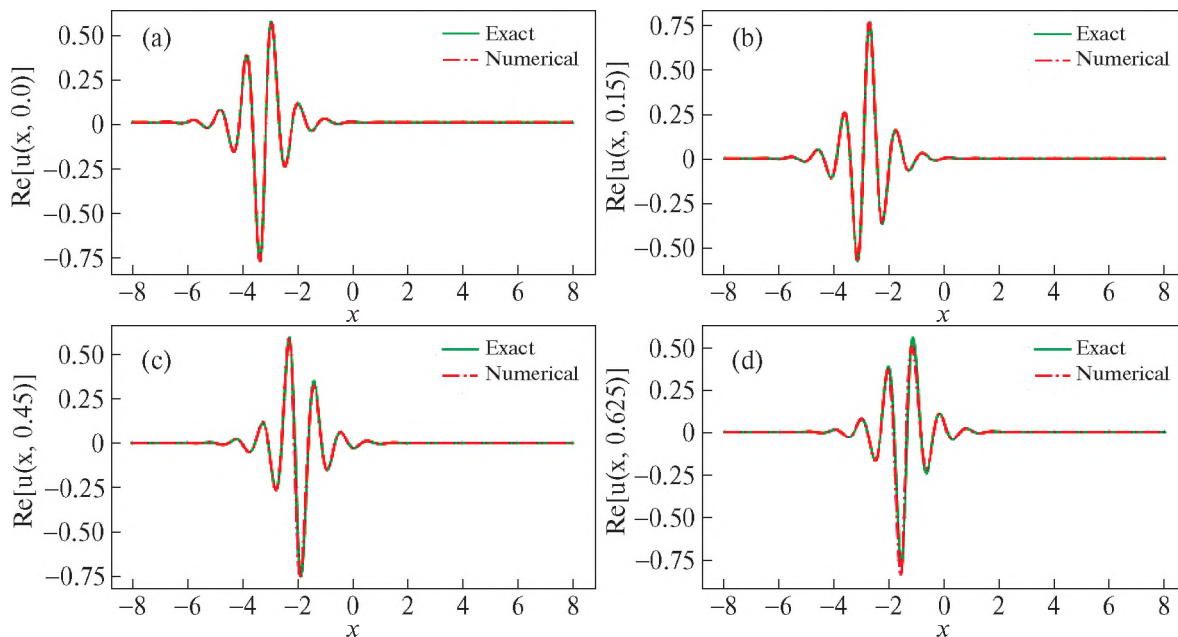


Рис. 3. Графики сравнения численного решения задачи (1)–(2) с аналитическим при $n = 5$ в момент времени: а) $t = 0$, б) $t = 0.15$, в) $t = 0.45$, г) $t = 0.625$.

ненной волны в нелинейной среде, описываемое уравнением (1).

Зависимость погрешности от параметра α представлена в таблице 1. При этом под погрешность взят максимальный модуль разности между точным и численным решениями.

Как видно, при $\alpha > 0.2$ погрешность вычислений при $n = 5$ начинает сильно возрастать.

В таблице 2 представлена зависимость погрешности от параметра α с учетом обнуления влияния слагаемого $|u|^n$ ($a = 0$) или $|u|^{2n}$ ($b = 0$).

В таблице 3 проведены численные эксперименты с учетом значений параметров a, b , равных 0 или 1.

Как видно из приведенных таблиц, наилучшие результаты численного моделирования получа-

Таблица 1. Зависимость погрешности численного решения задачи (1)–(2) от параметра α

	α	$n = 1$	$n = 3$	$n = 5$
1	0.01	0.0013	0.0034	0.0053
2	0.1	0.0120	0.0313	0.0601
3	0.2	0.0237	0.0677	0.2624
4	0.23	0.0274	0.0806	0.6254
5	0.25	0.0294	0.0898	2.5740

Таблица 2. Зависимость погрешности численного решения задачи (1)–(2) от параметра α в случаях, когда $a = 0$ или $b = 0$

$a = 0$				$b = 0$			
α	$n = 1$	$n = 3$	$n = 5$	α	$n = 1$	$n = 3$	$n = 5$
0.01	0.0024	0.0052	0.0086	0.01	0.0017	0.0033	0.0047
0.05	0.0117	0.0242	0.0514	0.1	0.0169	0.0313	0.0444
0.1	0.0231	0.0529	0.2853	0.2	0.0336	0.0627	0.1050
0.11	0.0254	0.0597	0.7134	0.5	0.0830	0.1773	0.8234
0.12	0.0276	0.0670	2.6090	0.52	0.0862	0.1865	1.0284

Таблица 3. Зависимость погрешности численного решения задачи (1)–(2) от параметра α в случаях когда $a = 0$, $b = 1$; $a = 1$, $b = 0$; $a = b = 1$

$a = 0, b = 1$				$a = 1, b = 0$				$a = b = 1$			
α	$n = 1$	$n = 3$	$n = 5$	α	$n = 1$	$n = 3$	$n = 5$	α	$n = 1$	$n = 3$	$n = 5$
0.01	0.0013	0.0042	0.0077	0.01	0.0013	0.0017	0.0033	0.01	0.0013	0.0017	0.0034
0.05	0.0091	0.0250	0.0535	0.05	0.0032	0.0137	0.0211	0.1	0.0103	0.0338	0.0652
0.1	0.0253	0.0612	0.3253	0.2	0.0504	0.0851	0.1352	0.2	0.0361	0.0927	0.6816
0.111	0.0295	0.0712	0.8803	0.4	0.1995	0.2312	0.5614	0.203	0.0370	0.0952	0.9655
0.12	0.0331	0.0798	3.0428	0.48	0.2871	0.3066	1.0426	0.204	0.0373	0.0959	1.1940

ются в случае, когда не учитывается влияние слагаемого $|u|^n$, т.е. при $a = 0$. Также следует отметить, что погрешность вычислений напрямую зависит от значения α : при увеличении данного параметра возрастает ошибка численного решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведено аналитическое и численное решение задачи, описываемой обобщенным нелинейным уравнением Шредингера с произвольным показателем преломления. Точное решение рассматриваемого дифференциального уравнения определено с помощью обобщенного метода простейших уравнений. Численные эксперименты проведены при $n = 1, 3, 5$ при различных значениях параметра α . Из приведенных результатов численного моделирования следует, что с учетом указанных значений параметров погрешность вычислений не превышает 1.0 при

$n = 1$ и $n = 3$, тогда как при $n = 5$ погрешность заметно возрастает при увеличении параметра α .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kudryashov N.A. Bright and dark solitons in a nonlinear saturable medium // Physics Letters A. 2022. P. 127913.
2. Kudryashov N.A. Stationary solitons of the model with nonlinear chromatic dispersion and arbitrary refractive index // Optik. 2022. V. 259. P. 168888.
3. Kudryashov N.A. Stationary solitons of the generalized nonlinear Schrödinger equation with nonlinear dispersion and arbitrary refractive index// Applied Mathematics Letters. 2022. P. 107888.
4. Biswas A. Optical soliton cooling with polynomial law of nonlinear refractive index // Journal of Optics. 2020. V. 49. 4. P. 580–583.
5. Biswas A. et al. Resonant optical solitons with quadratic-cubic nonlinearity by semi-inverse variational principle // Optik. 2017. V. 145. P. 18–21.

6. Biswas A. et al. Optical solitons having weak non-local nonlinearity by two integration schemes // *Optik*. 2018. V. 164. P. 380–384.
7. Mirzazadeh M. et al. Optical solitons and conservation law of Kundu–Eckhaus equation // *Optik*. 2018. V. 154. P. 551–557.
8. Kumar D., Aly R.S., Atish Kumar Joardar. Modified Kudryashov method via new exact solutions for some conformable fractional differential equations arising in mathematical biology // *Chinese journal of physics*. 2018. V. 56. № 1. P. 75–85.
9. Kudryashov N.A., Lavrova S.F. Dynamical properties of the generalized model for description of propagation pulses in optical fiber with arbitrary refractive index // *Optik*. 2021. V. 245. P. 167679.
10. Кан К.В., Кудряшов Н.А. Аналитическое и численное решение обобщенного нелинейного уравнения Шредингера с произвольным коэффициентом отражения // Вестник Национального исследовательского ядерного университета МИФИ. 2021. Т. 10. № 5. С. 412–417. EDN SEVEXI. <https://doi.org/10.1134/S2304487X21050072>
11. Weideman J.A.C., Herbst B.M. Split-step methods for the solution of the nonlinear Schrödinger equation // *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1986. V. 23.3. P. 485–507.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2022, vol. 11, no. 1, pp. 37–43

Numerical Simulation of Pulse Propagation in an Optical Fiber with Two Refractive Indices

K. V. Kan^{a,#} and N. A. Kudryashov^{a,##}

^a National Research Nuclear University MPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: kan_13@mail.ru

^{##}e-mail: nakudr@gmail.com

Received May 31, 2022; revised June 1, 2022; accepted June 1, 2022

Abstract—Pulse propagation in an optical fiber with two refractive indices is numerically simulated within the mathematical model based on the nonlinear Schrödinger equation with periodic boundary conditions. Traveling wave variables are used in order to find an analytical solution. A system of two nonlinear ordinary differential equations for the real and imaginary parts is obtained. The exact solution of this system in the form of solitary waves is found by applying the generalized simplest equation method. The numerical solution of the problem is constructed using the pseudo-spectral method implemented in Python. The program code has been tested by comparing the numerical solution with the analytical one with the restrictions on the mathematical model parameters. The influence of the model parameters on the behavior of the numerical solution is analyzed for various values of the refractive index of the medium. The tables showing the dependence of the error on the parameter α are presented. The analytical and numerical solutions are plotted and analyzed for $n = 1, 3$, and 5 .

Keywords: solitary waves, Schrödinger equation, pseudo-spectral method, optical fiber

DOI: 10.56304/S2304487X22010072

REFERENCES

1. Kudryashov N.A. Bright and dark solitons in a nonlinear saturable medium. *Physics Letters A*, 2022, pp. 127913.
2. Kudryashov N.A. Stationary solitons of the model with nonlinear chromatic dispersion and arbitrary refractive index. *Optik*, 2022, vol. 259, pp. 168888.
3. Kudryashov N.A. Stationary solitons of the generalized nonlinear Schrödinger equation with nonlinear dispersion and arbitrary refractive index. *Applied Mathematics Letters*, 2022, pp. 107888.
4. Biswas A. Optical soliton cooling with polynomial law of nonlinear refractive index. *Journal of Optics*, 2020, vol. 49.4, pp. 580–583.
5. Biswas A. et al. Resonant optical solitons with quadratic-cubic nonlinearity by semi-inverse variational principle. *Optik*, 2017, vol. 145, pp. 18–21.
6. Biswas A. et al. Optical solitons having weak non-local nonlinearity by two integration schemes. *Optik*, 2018, vol. 164, pp. 380–384.
7. Mirzazadeh M. et al. Optical solitons and conservation law of Kundu–Eckhaus equation. *Optik*, 2018, vol. 154, pp. 551–557.

8. Kumar D., Aly R.S. Atish Kumar Joardar. Modified Kudryashov method via new exact solutions for some conformable fractional differential equations arising in mathematical biology. *Chinese journal of physics*, 2018, vol. 56.1, pp. 75–85.
9. Kudryashov N.A., Lavrova S.F. Dynamical properties of the generalized model for description of propagation pulses in optical fiber with arbitrary refractive index. *Optik*, 2021, vol. 245, pp. 167679.
10. Kan K.V., Kudryashov N.A. Analiticheskoe i chislennoe reshenie obobshchennogo nelinejnogo uravneniya Shredingera s proizvol'nym koefitsientom otrazheniya [Analytical and numerical solution of the generalized nonlinear Schrödinger equation with an arbitrary reflection coefficient]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2021, vol. 10, no. 5, pp. 412–417 (in Russian). <https://doi.org/10.1134/S2304487X21050072>. – EDN SEVEXI.
11. Weideman J.A.C., Herbst B.M. Split-step methods for the solution of the nonlinear Schrödinger equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1986, vol. 23.3, pp. 485–507.