ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2023, т. 12, № 1, с. 3–8

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

УДК 532.59:534.1

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН С МОДЕЛЬНЫМИ И ПРОИЗВОЛЬНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ЧАСТОТЫ ПЛАВУЧЕСТИ

© 2023 *В.В. Булатов*[1,*], *И.Ю. Владимиров*[2,]**

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия*

[2] *Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва, 117997, Россия*

[*] *e-mail: internalwave@mail.ru*

[**] *e-mail: iyuvladimirov@rambler.ru*

Поступила в редакцию: 07.02.2023

После доработки: 14.02.2023

Принята к публикации: 11.04.2023

В работе исследованы аналитические свойства дисперсионных соотношений уравнения внутренних гравитационных волн с модельными и произвольными распределениями частоты плавучести. Для аналитического решения задачи использовано модельное распределение частоты плавучести, которое применяется в прикладных океанологических расчетах при наличии сезонного термоклина. Получены неявные формы дисперсионных зависимостей, которые выражаются через функцию Бесселя действительного индекса. Для волновых чисел, отличных от нуля, предложен асимптотический метод исследования дисперсионного соотношения, основанный на построении равномерных асимптотик функций Бесселя для больших значений действительного индекса и аргумента, которые выражаются через функции Эйри. Для произвольного распределения частоты плавучести с помощью метода возмущений и метода ВКБ получены асимптотические представления дисперсионных соотношений при малых волновых числах. Построенные в работе решения позволяют в дальнейшем рассчитывать амплитудно-фазовые характеристики полей внутренних гравитационных волн с модельными и произвольными распределениями частоты плавучести.

Ключевые слова: стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, частота плавучести, волновая мода, дисперсионное соотношение.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.212

В современных научных исследованиях при анализе динамики внутренних гравитационных волн (ВГВ) в природных стратифицированных средах (океан, атмосфера Земли) широко используются различные аналитические модели волновой генерации [1–5]. Численные модели не позволяют эффективно рассчитывать конкретные физические задачи волновой динамики океана и атмосферы с учетом их реальной изменчивости, ориентированы на решение достаточно общих задач, требуют большой вычислительной мощности, не всегда учитывают физическую специфику решаемых задач, что существенно ограничивает их практическую применимость. Кроме того, использование мощных численных алгоритмов требует верификации и сравнения с решениями модельных задач. В результате проведения модельных расчетов волновая система может быть приближена к наблюдаемым в натурных условиях волновым картинам, что позволяет оценить физические параметры реальных источников возбуждения ВГВ в природных стратифицированных средах [4, 6–9]. В линейном приближении существующие подходы к описанию волновой картины возбуждаемых полей ВГВ основаны на представлении волновых полей интегралами Фурье и анализе получаемых интегральных решений [1, 10–13].

Цель настоящей работы – изучение аналитических свойств дисперсионных соотношений уравнения внутренних гравитационных волн с модельными и произвольными распределениями частоты плавучести.

Рассмотрим стационарную картину линейных внутренних гравитационных волн, генерируемых точечным источником мощности q в потоке стратифицированной среды, имеющим скорость V, невозмущенную плотность $\rho_0(z)$ и занимающую область (слой) $0 < z < H$, ось z направлена вниз. Источник расположен в точке $(0,\ 0,\ z_0), 0 < z_0 < H$. Тогда смещение изопик $\eta = \eta(\xi,\ y,\ z,\ z_0)$ в приближении Буссинеска и «твердой крышки» представимо в виде суммы волновых мод [5, 10, 13]

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n, \eta_n = \frac{iqV}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i(\nu y + \mu\xi)) \frac{\mu\omega_n^2(k)}{(\mu^2 V^2 - \omega_n^2(k))k^2} \varphi_n(z,k) \frac{\partial\varphi_n(z_0,k)}{\partial z_0} d\mu,$$

где собственные функции $\varphi_n(z,k)$ и собственные значения $\omega_n(k)$ (дисперсионные кривые) определяются из решения соответствующей однородной спектральной задачи [1, 5]

$$\frac{\partial^2\varphi_n(z,k)}{\partial z^2} + k^2\left(\frac{N^2(z)}{\omega_n{}^2(k)} - 1\right)\varphi_n(z,k) = 0,$$

$$k^2 = \mu^2 + \nu^2, \qquad (1)$$

$$\varphi_n(z,0) = \varphi_n(z,H) = 0,$$

где $N^2(z) = \frac{g}{\rho_0(z)}\frac{d\rho_0(z)}{dz}$ – квадрат частоты Брента-Вяйсяля (частоты плавучести); g – ускорение свободного падения.

Спектральная задача (1) имеет полную ортонормированную (с весом $N^2(z)$) систему собственных функций $\varphi_n(z,k)$ и соответствующий набор собственных значений $\omega_n(k)$ [1, 5]. Для произвольного распределения частоты плавучести эта задача допускает только численное решение. В прикладных океанологических расчетах для изучения динамики ВГВ достаточно часто используется следующее модельное представление частоты плавучести в виде [4, 14, 15]: $N(z) = 0$ при $0 \le z \le h$; $N(z) = N_0\exp(-\alpha(z - -h))$ при $h \le z \le H$, которое позволяет исследовать задачу аналитически. Для этой модельной стратификации собственные функции $\varphi_n(z,k)$ могут быть найдены аналитически [16, 17]

$$\varphi_n(z,k) = \frac{1}{L_n}\sin h(kz) \text{ при } 0 \le z \le h,$$

$$\varphi_n(z,k) = \frac{1}{L_n}(C_n^1 J_\lambda(\beta_n(z)) + + C_n^2 Y_\lambda(\beta_n(z))) \text{ при } h \le z \le H,$$

$$C_n^{1,2} = \frac{d_n^{1,2}}{D_n},\ \beta_n(z) = \lambda\frac{N(z)}{\omega_n(k)},\ \lambda = \frac{k}{\alpha},$$

$$d_n^1 = \frac{\omega_n(k)}{N_0}\cos h(kh) Y_\lambda(\beta_n(h)) + + \sin h(kh) Y_\lambda'(\beta_n(h)),$$

$$d_n^2 = -\frac{\omega_n(k)}{N_0}\cos h(kh) J_\lambda\big(\beta_n(h)\big) - - \sin h(kh) J_\lambda'(\beta_n(h)),$$

$$D_n = J_\lambda\big(\beta_n(h)\big) Y_\lambda'\big(\beta_n(h)\big) - J_\lambda'(\beta_n(h)) Y_\lambda(\beta_n(h)),$$

$$L_n = (\int_h^H N^2(z)(C_n^1 J_\lambda(\beta_n(z)) + +C_n^2 Y_\lambda(\beta_n(z)))^2 dz)^{1/2},$$

где J_λ, Y_λ – функции Бесселя действительного индекса λ. Тогда из условия обращения в нуль собственной функции $\varphi_n(z,k)$ при $z = H$ для каждой волновой моды можно получить неявную форму дисперсионного соотношения

$$d_n^1 J_\lambda\left(\lambda\frac{N(H)}{\omega_n(k)}\right) + d_n^2 Y_\lambda\left(\lambda\frac{N(H)}{\omega_n(k)}\right) = 0, \quad (2)$$

решение которого представляет определенную вычислительную трудность.

При малых значениях волнового числа k аналитические свойства дисперсионных кривых $\omega_n(k)$ (в виде ряда по нечетным степеням k) и собственных функций $\varphi_n(z,k)$ (в виде ряда по четным степеням k) определяются из задачи (1) с помощью метода возмущений [5]: $\omega_n(k) = c_n k + a_n k^3 + \cdots$, $\varphi_n(z,k) = \varphi_{n0}(z) + \varphi_{n2}(z)k^2 + \cdots, \varphi_{n0}(0) = \varphi_{n0}(H) = 0,\ \varphi_{n2}(0) = = \varphi_{n2}(H) = 0$. Тогда для нахождения c_n, $\varphi_{n0}(z)$ получается краевая задача с нулевыми граничными условиями

$$\frac{d^2\varphi_{n0}(z)}{dz^2} + \frac{N^2(z)}{c_n^2}\varphi_{n0}(z) = 0. \qquad (3)$$

Значение a_n находится из соотношения

$$a_n = \frac{1}{2}c_n^3\int_0^H \varphi_{n0}^2(z)dz.$$

Далее, учитывая нормировку собственных функций $\varphi_n(z,k)$, можно получить

$$\int_0^H N^2(z)\varphi_{n0}^2(z)dz = 1,$$

$$\int_0^H N^2(z)\varphi_{n0}(z)\varphi_{n2}(z)dz = 0.$$

Тогда функцию $\varphi_{n2}(z)$ можно представить в виде ряда: $\varphi_{n2}(z) = \sum_{m\neq n} F_m\,\varphi_{m0}(z)$, где

$$F_m = \frac{\int_0^H \varphi_{n0}(z)\varphi_{m0}(z)dz}{c_n^{-2} - c_m^{-2}}(m \neq n).$$

При достаточно больших значениях номера моды n задача (3) решается в ВКБ приближении:

$$\varphi_{n0}(z) = \frac{A}{\sqrt{N(z)}}\sin\left(\frac{1}{c_n}\int_0^z N(\tau)d\tau\right),$$

$$c_n = \frac{\int_0^H N(z)dz}{n\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{2(n\pi)^3}\left(\frac{1}{2}\int_0^H N(z)dz\right)^2\int_0^H \frac{dz}{N(z)},$$

$$A = \left(\frac{1}{2}\int_0^H N(z)dz\right)^{-1/2}.$$

При значениях волнового числа k, отличных от нуля, можно, при достаточно малых значениях параметра α, характеризующего степень вертикальной изменчивости частоты плавучести, построить равномерную $\left(\text{по параметру}\, \lambda = \frac{k}{\alpha}\right)$ асимптотику функции $J_\lambda(\lambda x)$ при $\lambda \to \infty$ и произвольных значениях x. Поэтому для исследования аналитических свойств дисперсионного соотношения (2) представляет интерес построить равномерную (по параметру λ) асимптотику функции $J_\lambda(\lambda x)$ при $\lambda \to \infty$ и произвольных значениях x. Функция $\Phi = J_\lambda(\lambda x)$ удовлетворяет уравнению Бесселя порядка λ [17]:

$$x^2\Phi'' + x\Phi' + \lambda^2(x^2-1)\Phi = 0. \qquad (4)$$

Перейдем в (4) к новой функции $\Phi = \frac{u(x)}{\sqrt{x}}$. В результате можно получить

$$u'' + \left(\lambda^2 q_1(x) + q_2(x)\right)u = 0,$$

$$q_1(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, q_2(x) = \frac{1}{4x^2}. \qquad (5)$$

Далее, следуя общим алгоритмам построения равномерных асимптотик функций Бесселя, выполним переход к новой независимой переменной s и новой функции $v(s)$: $s = \varphi(x)$, $v = \psi(x)u(x)$, где функции $\varphi(x), \psi(x)$ подлежат определению [18]. Тогда из (5) можно получить

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \left(\varphi'' - \frac{2\psi'\varphi'}{\psi}\right)\frac{dv}{ds} +$$

$$+\left(\lambda^2\frac{q_1}{(\varphi')^2} + \frac{q_2}{(\varphi')^2} - \frac{\psi''}{\psi(\varphi')^2} + \frac{2(\psi')^2}{\psi^2(\varphi')^2}\right)v = 0. \; (6)$$

Для преобразования уравнения (6) потребуем, чтобы коэффициент при $\frac{dv}{ds}$ был равен нулю: $\varphi'' - \frac{2\psi'\varphi'}{\psi} = 0$. Тогда, интегрируя это уравнение имеем: $\psi = \sqrt{\varphi'}$. Далее требуя, чтобы $\lambda^2\frac{q_1}{(\varphi')^2} = s = \varphi(x)$, можно получить явные выражения для функции $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2}\lambda\left(\sqrt{x^2-1} - \arccos\frac{1}{x}\right)\right)^{2/3}$$

при $x > 1$,

$$\varphi(x) = -\left(\frac{3}{2}\lambda\left(-\sqrt{1-x^2} - \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{\tau}\right)\right)^{2/3}$$

при $x < 1$.

В результате уравнение (6) представимо в форме

$$\frac{d^2v}{ds^2} + (s+\delta)v = 0\,,$$

$$\delta = \frac{q_2}{(\varphi')^2} - \frac{\psi''}{\psi(\varphi')^2} + \frac{2(\psi')^2}{\psi^2(\varphi')^2},$$

где $\delta = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$ и $s = \varphi(x) = O(\lambda^{2/3})$ при $\lambda \to \infty$. Поэтому для главного члена асимптотики получается уравнение Эйри: $\frac{d^2v}{ds^2} + +sv = 0$, ограниченное решение которого: $v(s) = C\mathrm{Ai}(-s) = C\mathrm{Ai}(-\varphi(x))$, где

$$\mathrm{Ai}(\Theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\tau\Theta + \frac{\tau^3}{3})\,d\tau.$$

Тогда асимптотика функции $J_\lambda(\lambda x)$ при $\lambda \to \infty$ имеет вид

$$J_\lambda(\lambda x) \sim \frac{u}{\sqrt{x}} = \frac{C\mathrm{Ai}(-\varphi(x))}{\psi(x)\sqrt{x}},\; \psi(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{x}}\sqrt[4]{\frac{x^2-1}{\varphi(x)}}.$$

Значение постоянной C определяется из условий сшивки соответствующих асимптотических разложений. Для этого можно заметить, что при $x \to 0$ и фиксированных значениях λ

$$\varphi(x) \sim -\left(\frac{3}{2}\lambda(\ln 2 - 1 - \ln x)\right)^{2/3},$$

$$\mathrm{Ai}(-\varphi(x)) \sim \frac{\exp\left(-\frac{2}{3}(-\varphi(x))^{3/2}\right)}{2\sqrt{\pi}\,(-\varphi(x))^{1/4}} \sim \frac{\left(\frac{ex}{2}\right)^\lambda}{2\sqrt{\pi}\,(-\varphi(x))^{1/4}},$$

$$J_\lambda(\lambda x) \sim \frac{C\left(\frac{ex}{2}\right)^\lambda}{2\sqrt{\pi\lambda}}. \qquad (7)$$

С другой стороны, при $\lambda \to \infty$ и фиксированных малых значениях x [17]

$$J_\lambda(\lambda x) \sim \frac{\left(\frac{ex}{2}\right)^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \sim \frac{\left(\frac{ex}{2}\right)^\lambda}{\sqrt{2\pi\lambda}}, \qquad (8)$$

где Γ – гамма функция Эйлера. Сравнивая выражения (7) и (8), получаем $C = \sqrt{2}$. В результате равномерная по переменной x на луче $[0; +\infty)$ асимптотика функции Бесселя $J_\lambda(\lambda x)$ при $\lambda \to \infty$ имеет вид

$$J_\lambda(\lambda x) \sim \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\mathrm{Ai}(-\varphi(x))\sqrt[4]{\frac{\varphi(x)}{x^2-1}}. \qquad (9)$$

Результаты расчетов функции Бесселя $J_\lambda(\lambda x)$ и равномерной асимптотики по формуле (9) для различных значений действительного индекса λ представлены на рис. 1.

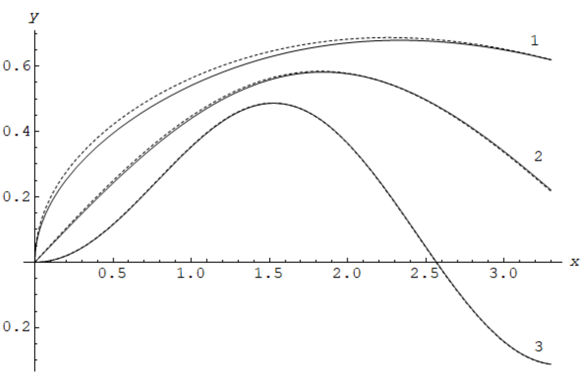

Рис. 1. Функция Бесселя $y(x) = J_\lambda(\lambda x)$ – сплошная линия, равномерная асимптотика – штриховая линия: кривая 1 – $\lambda = 0.5$, кривая 2 – $\lambda = 1$, кривая 3 – $\lambda = 2$

Асимптотический анализ поведения функций Бесселя Y_λ можно провести аналогично [18], что дает возможность эффективно рассчитывать неявную форму дисперсионного соотношения (2).

Таким образом, в работе исследованы аналитические свойства дисперсионных соотношений уравнения внутренних гравитационных волн с модельными и произвольными распределениями частоты плавучести. Для аналитического решения задачи использовано модельное распределение частоты плавучести, которое применяется в прикладных океанологических расчетах для изучения динамики внутренних гравитационных волн, в частности при наличии сезонного термоклина. Замечательной особенностью Мирового океана является наличие такого слоя – пространственной области сравнительно быстрого изменения температуры и в то же время области большой устойчивости частоты плавучести. Зависимость частоты Брента–Вяйсяля от глубины в модельном представлении может отличаться от эмпирических зависимостей, которые, однако, могут характеризоваться наличием в верхнем слое океана слоя с почти постоянной стратификацией, лежащего на подстилающим слое слабой стратификации и большой глубины. Модельное распределение частоты плавучести позволяет исследовать задачу аналитически, в то время как использование эмпирических зависимостей требует применения только численных методов. Основные качественные результаты по описанию динамики внутренних гравитационных волн, как правило, не сильно зависят от конкретной аналитической формы аппроксимации частоты плавучести. Получены неявные формы дисперсионных зависимостей, которые выражаются через функцию Бесселя действительного индекса. Для волновых чисел, отличных от нуля, предложен асимптотический метод исследования неявного дисперсионного соотношения, основанный на построении равномерных асимптотик функций Бесселя для больших значений действительного индекса и аргумента, которые выражаются через функции Эйри. Дальние поля внутренних гравитационных волн вблизи волновых фронтов определяются свойствами дисперсионного соотношения при малых волновых числах. Поэтому для произвольного распределения частоты плавучести с помощью метода возмущений и метода ВКБ получены асимптотические представления дисперсионных соотношений при малых волновых числах. Построенные в работе решения позволяют в дальнейшем рассчитывать амплитудно-фазовые характеристики полей внутренних гравитационных волн с модельными и произвольными распределениями частоты плавучести. Наибольший выигрыш при использовании данного подхода можно получить при исследовании эволюции волновых пакетов, возбуждаемых распределенными в пространстве возмущениями, так как, используя операцию свертки, можно рассчитывать волновые поля от нелокальных источников возмущений различной физической природы. Полученные аналитические результаты с различными значениями входящих в них параметров позволяют в дальнейшем проводить оценку и экспресс-анализ характеристик пакетов внутренних гравитационных волн, наблюдаемых в реальных океанических условиях.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена за счет гранта РНФ № 23-21-00194.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Miropol'skii Yu.Z., Shishkina O.V.* Dynamics of internal gravity waves in the ocean. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. 406 p.

2. *Pedlosky J.* Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin-Heildelberg: Springer, 2010. 260 p.

3. *Sutherland B.R.* Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 394 p.

4. *Ozsoy E.* Geophysical fluid dynamics II. Stratified rotating fluid dynamics of the atmosphere-ocean. Springer Textbook in Earth Sciences. Geography and Environment. Switzerland AG Cham, Springer Nature, 2021. 323 p.

5. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.

6. *Abdilghanie A.M., Diamessis P.J.* The internal gravity wave field emitted by a stably stratified turbulent wake // J. Fluid Mech. 2013. V. 720. P. 104–139.

7. *Voelker G.S., Myers P.G., Walter M., Sutherland B.R.* Generation of oceanic internal gravity waves by a cyclonic surface stress disturbance // Dynamics Atm. Oceans. 2019. V. 86. P. 116–133.

8. *Chai J., Wang Z., Yang Z., Wang Z.* Investigation of internal wave wakes generated by a submerged body in a stratified flow // Ocean Engineering. 2022. V. 266. P. 112840.

9. *Wang J., Wang S., Chen X., Wang W., Xu Y.* Three-dimensional evolution of internal waves rejected from a submarine seamount // Physics Fluids. 2017. V. 29. P. 106601.

10. *Borovikov V.A., Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Internal gravity waves excited by a body moving in a stratified fluid // Fluid Dyn. Res. 1995. V. 5. P. 325–336.

11. *Свиркунов П.Н., Калашник М.В.* Фазовые картины диспергирующих волн от движущихся локализованных источников // Успехи физ. наук. 2014. Т. 184. № 1. С. 89–100.

12. *Gnevyshev V., Badulin S.* Wave patterns of gravity–capillary waves from moving localized sources // Fluids. 2020. V. 5. P. 219.

13. *Bulatov V., Vladimirov Yu.* Generation of internal gravity waves far from moving non-local source // Symmetry. 2020. V. 12(11). P. 1899.

14. *Morozov E.G.* Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin: Springer. 2018. 317 p.

15. *Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V. (Eds.).* The ocean in motion. Springer Oceanography. Switzerland AG Cham, Springer Nature, 2018. 625 p.

16. *Garrett C., Munk W.* Space-time scales of internal waves // Geophys. Fluid Dyn. 1972. V. 3. P. 225–264.

17. *Watson G.N.* A treatise on the theory of Bessel functions (2nd Edition). Cambridge: Cambridge University Press. 1995. 814 p.

18. *Доброхотов С.Ю., Миненков Д.С., Назайкинский В.Е.* Представления функций Бесселя с помощью канонического оператора Маслова // Теор. матем. физика. 2021. Т. 208(2). С. 196–217.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 1, pp. 3–8

ANALYTICAL PROPERTIES OF THE DISPERSION RELATIONS OF THE INTERNAL GRAVITY WAVES EQUATION WITH MODEL AND ARBITRARY BUOYANCY FREQUENCY DISTRIBUTIONS

V.V. Bulatov[1,*], I.Yu. Vladimirov[2,**]

[1] Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS , Moscow, pr. Vernadskogo 101-1, 119526 Russia
[2] Shirshov Institute of Oceanology RAS, Moscow, Nahimovsky pr. 36, 117997, Russia
[*] e-mail: internalwave@mail.ru
[**]e-mail: iyuvladimirov@rambler.ru

Received February 7, 2023; revised February 14, 2023; accepted April 11, 2023

In this paper we investigated the analytical properties of the dispersion relations of the equation of internal gravity waves with model and arbitrary distributions of the buoyancy frequency. For the analytical solution of the problem we used the model distribution of the buoyancy frequency, which is used in applied oceanological calculations in the presence of a seasonal thermocline. We have obtained implicit forms of dispersion dependences, which are expressed in terms of the Bessel function of the real index. For wave numbers other than zero, we proposed an asymptotic method for studying the dispersion relation, based on the construction of Bessel functions uniform asymptotics for large values of the real index and argument, which are expressed in terms of the Airy functions. For an arbitrary distribution of the buoyancy frequency, using the perturbation method and the WKBJ method, we obtained asymptotic representations of the dispersion relations for small wave numbers. The solutions constructed in this work make it possible to further calculate the amplitude-phase characteristics of the fields of internal gravity waves with model and arbitrary buoyancy frequency distributions.

Keywords: stratified medium, internal gravity waves, buoyancy frequency, wave mode, dispersion relation.

REFERENCES

1. *Miropol'skii Yu.Z., Shishkina O.V.* Dynamics of internal gravity waves in the ocean. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. 406 p.

2. *Pedlosky J.* Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin-Heildelberg: Springer, 2010. 260 p.

3. *Sutherland B.R.* Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 394 p.

4. *Ozsoy E.* Geophysical fluid dynamics II. Stratified rotating fluid dynamics of the atmosphere-ocean. Springer Textbook in Earth Sciences. Geography and Environment. Switzerland AG Cham, Springer Nature, 2021. 323 p.

5. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Volni v stratifistirovannikh sredakh [Waves in stratified medium]. M.: Nauka Publ., 2015. 735 p. (in Russian).

6. *Abdilghanie A.M., Diamessis P.J*. The internal gravity wave field emitted by a stably stratified turbulent wake. J. Fluid Mech. 2013. Vol. 720. P. 104–139.

7. *Voelker G.S., Myers P. G., Walter M., Sutherland B. R.* Generation of oceanic internal gravity waves by a cyclonic surface stress disturbance. Dynamics Atm. Oceans. 2019. Vol. 86. P. 116–133.

8. *Chai J., Wang Z., Yang Z., Wang Z.* Investigation of internal wave wakes generated by a submerged body in a stratified flow. Ocean Engineering. 2022. Vol. 266. P. 112840.

9. *Wang J., Wang, S., Chen X., Wang W., Xu Y.* Three-dimensional evolution of internal waves rejected from a submarine seamount. Physics Fluids. 2017. Vol. 29. P. 106601.

10. *Borovikov V.A., Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Internal gravity waves excited by a body moving in a stratified fluid. Fluid Dyn. Res. 1995. Vol. 5. P. 325–336.

11. *Svirkunov P.N., Kalashnik M.V.* Phase patterns of dispersive waves from moving localized sources. Phys.-Usp. 2014. Vol. 57 (1). P. 80–91.

12. *Gnevyshev V., Badulin S.* Wave patterns of gravity–capillary waves from moving localized sources. Fluids. 2020. Vol. 5. P. 219.

13. *Bulatov V., Vladimirov Yu.* Generation of internal gravity waves far from moving non-local source. Symmetry. 2020. Vol. 12(11). P. 1899.

14. *Morozov E.G.* Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin: Springer. 2018. 317 p.

15. *Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V.* (Eds.). The ocean in motion. Springer Oceanography. Switzerland AG Cham, Springer Nature, 2018. 625 p.

16. *Garrett C., Munk W.* Space-time scales of internal waves. Geophys. Fluid Dyn. 1972. Vol. 3. P. 225–264.

17. *Watson G.N.* A treatise on the theory of Bessel functions (2nd Edition). Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 814 p.

18. *Dobrokhotov S.Yu., Minenkov D.S., Nazaikinskii V.E.* Representation of Bessel function by the Maslov canonical operator. Theor. Math. Physics. 2021. Vol. 208(2). P. 1018–1037.