ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2022, том 11, № 3, с. 218–222

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ВРИЗА С УЧЕТОМ ДИСПЕРСИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Н. А. Кудряшов[1,*], Н. В. Ермолаева[1,2]

[1]Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия

[2]Волгодонский инженерно-технический институт НИЯУ МИФИ, Волгодонск, Ростовская обл., 347360, Россия

*e-mail: nakudryashov@mephi.ru

Поступила в редакцию 18.08.2020 г.
После доработки 21.08.2022 г.
Принята к публикации 23.08.2022 г.

Рассматривается обобщенное уравнение Кортевега–де Вриза произвольного порядка. Уравнение является обобщением ряда хорошо известных уравнений: знаменитого уравнения Кортевега–де Вриза, уравнения Кавахары и некоторых других уравнений. Доказана теорема о существовании уединенных волн рассматриваемого класса уравнений. Демонстрируется вид уединенной волны для уравнения любого порядка. Конкретные вычисления выполнены для уравнения двенадцатого порядка, для которого представлены ограничения на параметры уравнения для существования уединенных волн.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, обобщенное уравнение Кортевега–де Вриза, точное решение, уединенная волна

DOI: 10.56304/S2304487X2203004X

1. ВЕДЕНИЕ

В настоящее время большой интерес проявляется к исследованию уравнений с учетом выражений, учитывающих дисперсионные слагаемые высокого порядка (см., наример, статьи [1, 4–11, 13–19]). В этой связи в данной работе рассматривается обобщенное уравнение Кортевега–де Вриза в виде

$$u_t + \sum_{n=1}^{N} \alpha_{2n} u_{2n+1,x} = \beta u u_x, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (1)$$

где функция $u(x,t)$ характеризует отклонение от положения равновесия в координате x в момент времени t, N – целое число. Уравнение (1) является обобщением некоторых хорошо известных нелинейных уравнений в частных производных. При $N = 1$ в (1) мы имеем знаменитое уравнение Кортевега–де Вриза. В случае $N = 2$ получаем уравнение Кавахары, а при $N = 3$ уравнение становится уравнением седьмого порядка, которое рассматривалось в работах Николаевского В.Н.

Уравнение не относится к типу интегрируемых уравнений и задача Коши для него в общем случае при произвольном N не решается. Более того, насколько известно автору данной работы, точные решения уравнения при $N > 3$ до настоящего времени не известны. Цель данной работы показать, что уравнение (1) имеет решения в виде уединенных волн при определенных ограничениях на параметры уравнения.

Полагая в (1)

$$u(x,t) = y(z) \quad z = x - C_0 t, \qquad (2)$$

получаем после интегрирования по z обыкновенное дифференциальное уравнение в виде

$$2\sum_{n=1}^{N} \alpha_{2n} y_{2n,x} - 2C_0 y - \beta y^2 = C_1, \qquad (3)$$

где C_1 – произвольная постоянная.

В следующем разделе мы покажем, что уравнение (3) прозвольного порядка имеет решение, которое приводит к уединенным волнам уравнения (1).

2. ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН УРАВНЕНИЯ (1) В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЦЕЛОГО N

В этом разделе покажем, что уравнение (1) имеет решение в виде уединенных волн при произвольном целом N. Этот факт сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. Фунция

$$y(z) = \frac{2^{2n} A_N \mu^n}{(4\mu\nu e^{-\sqrt{\mu}(z-z_0)} + e^{\sqrt{\mu}(z-z_0)})^n} \tag{4}$$

является решением уравнения (3), где z_0 – произвольная постоянная и N – целое число.

Доказательство. Можно заметить, что функция

$$R(z) = \frac{4\mu}{4\mu\nu e^{-\sqrt{\mu}(z-z_0)} + e^{\sqrt{\mu}(z-z_0)}} \tag{5}$$

является решением уравнения первого порядка в виде

$$R_z^2 = \mu R^2 - \nu R^4. \tag{6}$$

Поэтому функцию $y(z)$ можно записать в виде $y(z) = A_N R(z)$

$$y_{zz} = A_n n^2 \mu R^n - A_n \nu n(n+1) R^{n+2}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} y_{zzzz} = A_n \mu^2 n^4 R^n - 2A_n \mu\nu(n^4 + 3n^2 + 4n^2 + \\ + 2n)R^{n+2} + A_n \nu^2 (n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) R^{n+4} \end{aligned} \tag{8}$$

Принимая во внимание метод математической индукции мы получаем равенство

$$\begin{aligned} y_{2N,z} &= A_N F_N \mu^N R^N + \ldots + A_n \nu^n G_n R^{2n}, \\ y_{2n,z} &= \frac{d^{2N} y}{dz^{2n}}, \end{aligned} \tag{9}$$

где F_N и G_N – полиномы от n. Можно также заметить, что

$$y^2 = A_N^2 R(z)^{2n}. \tag{10}$$

С учетом (9) и (10), можно найти параметр уравнения (3) в виде

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{A_n \chi}{G_n \nu^n}. \tag{11}$$

При известном значении a_{2n} можно вычислить далее $a_{2n-2}, a_{2n-4}, \ldots, C_0$. Таким образом получаем, что функция удовлетворяет уравнению (3).

3. УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ УРАВНЕНИЯ (1) ПРИ $n = 6$

В качестве примера найдем условия для параметров уравнения (1) двенадцатого порядка. С этой целью в уравнении (1) возьмем $n = 6$. Решение уравнения (1) при $n = 6$ в соответствие с указанной выше теоремой ищем в виде [22–27]

$$y(z) = A_6 R(z)^{12}. \tag{12}$$

Подставляя (12) в уравнение (3) и учитывая производные от функции $R(z)$, получаем полином от функции $R(z)$ в виде

$$\begin{aligned} &(647647525324800 a_{12}\nu^6 - A_6\beta) A_6 R^{24} - \\ &- 1279935820800 A_6 \nu^5 (1804 a_{12}\mu + a_{10}) R^{22} + \\ &+ 4022655436800 \nu^4 A_6 \left(\frac{4038 a_{12}\mu^2}{5} + \right. \\ &\left. + a_{10}\mu + \frac{a_8}{1320} \right) R^{20} - \\ &- 4794252503040 \left(\frac{1453760 a_{12}\mu^3}{3057} + a_{10}\mu^2 + \right. \\ &\left. + \frac{115 a_8 \mu}{67254} + \frac{a_6}{538032} \right) \nu^3 A_6 R^{18} + \\ &+ 2671230481920 \nu^2 \left(\frac{35860732 a_{12}\mu^4}{115823} + \right. \\ &+ a_{10}\mu^3 + \frac{14997 a_8 \mu^2}{5096212} + \frac{149 a_6 \mu}{20384848} + \\ &\left. + \frac{a_4}{81539392} \right) A_6 R^{16} - \\ &- 682011872256 \left(\frac{3589078420 a_{12}\mu^5}{17077621} + a_{10}\mu^4 + \right. \\ &+ \frac{314245 a_8 \mu^3}{68310484} + \frac{5461 a_6 \mu^2}{273241936} + \frac{85 a_4 \mu}{1092967744} + \\ &\left. + \frac{a_2}{4371870976} \right) \nu A_6 R^{14} - \\ &- (-8916100448256 a_{12}\mu^6 - 61917364224 a_{10}\mu^5 - \\ &- 429981696 a_8 \mu^4 - 2985984 a_6 \mu^3 - 20736 a_4 \mu^2 - \\ &- 144 a_2 \mu + C_0) A_6 R^{12} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Коэффициенты этого полинома равны нулю. Откуда находим условия на параметры уравнения (1) для существования решения (12):

$$\begin{aligned} a_{12} &= \frac{A_6 \beta}{647647525324800 \nu^6}, \\ a_{10} &= -\frac{41 A \beta \mu}{14719261939200 \nu^6}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} a_8 &= \frac{2491 A \beta \mu^2}{1226605161600 \nu^6}, \\ a_6 &= -\frac{703523 A_6 \beta \mu^3}{919953871200 \nu^6} \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{195779 A_6 \beta \mu^4}{1249937325 \nu^6}, \\ a_2 &= -\frac{580424072 A_6 \beta \mu^5}{35137127025 \nu^6} \end{aligned} \tag{16}$$

$$C_0 = -\frac{67584 A \beta \mu^6}{96577 \nu^6}. \tag{17}$$

Таким образом мы олучили, что решение уравнения (1) существует при ограничениях (14)–(17) на параметры уравнения (1).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрено обобщенное уравнение Кортевега–де Вриза произвольного порядка. Исходное уравнение не относится к классу интегрируемых уравнений и задача Коши не может быть решена методом обратной задачи рассеяния. Однако уравнение в частных производных допускает преобразования сдвига по координате и времени и следовательно позволяет искать решения в переменных бегущей волны. Таким образом решение уравнения ищется используя переменные бегущей волны. Используя один из вариантов метода простейших уравнений показано, что изучаемое уравнение имеет решения в виде уединенных волн. Конкретные вычисления выполнены для уравнения двенадцатого порядка, для которго найдены условия на параметры уравнения при которых решение уравнения выражается через эксоненциальные функции.

БЛАГОДАРНОСТИ

Эта работа поддержана Российским научным фондом (проект номер 22-11-00141, тема "Разработка аналитических и численных методов для моделирования волн в диспергирующих волноводах").

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wang G., Kara A.H., Biswas A., Guggilla P., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Highly dispersive optical solitons in polarization-preserving fibers with Kerr law nonlinearity by Lie symmetry // Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics, 2022. V. 421. 127768.
2. *Kudryashov N.A.* Implicit Solitary Waves for One of the Generalized Nolinear Schrödinger Equations // Mathematics, 2021. V. 9. Iss. 23. 3024. https://doi.org/10.3390/math9233024
3. *Kudryashov N.A.* The generalized Duffing oscillator // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2021. V. 93. 105526.
4. *Zayed E.M.E., Gepreel K.A., El-Horbaty M., Biswas A., Yildirim Y., Alshehri H.M.* Highly dispersive optical solitons with complex ginzburg-landau equation having six nonlinear forms // Mathematics, 2021. V. 9. Iss. 24. 3270.
5. *Elsherbeny A.M., El-Barkouky R., Seadawy A.R., Ahmed H.M., El-Hassani R.M.I., Arnous A.H.* Highly dispersive optical soliton perturbation of Kudryashov's arbitrary form having sextic-power law refractive index // International Journal of Modern Physics B, 2021. V. 35. Iss. 24. Id. 2150247.
6. *Rabie W.B., Seadawy A.R., Ahmed H.M.* Highly dispersive Optical solitons to the generalized third-order nonlinear Schrödinger dynamical equation with applications // Optik, 2021. V. 241. 167109.
7. *Biswas A., Ekici M., Dakova A., Khan S., Moshokoa S.P., Alshehri H.M., Belic M.R.* Highly dispersive optical soliton perturbation with Kudryashov's sextic-power law nonlinear refractive index by semi-inverse variation // Results in Physics, 2021. V. 27. 104539.
8. *Gonzalez-Gaxiola O., Biswas A., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Highly dispersive optical solitons with a polynomial law of refractive index by Laplace-Adomian decomposition // Journal of Computational Electronics, 2021. V. 20. Iss. 3. P. 1216–1223.
9. *Zayed E.M.E., Al-Nowehy A.-G., Alngar M.E.M., Biswas A., Asma M., Ekici M., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Highly dispersive optical solitons in birefringent fibers with four nonlinear forms using Kudryashov's approach // Journal of Optics (India), 2021. V. 501. P. 120–131.
10. *Gonzalez-Gaxiola O., Biswas A., Asma M., Alzahrani A.K.* Highly dispersive optical solitons with non-local law of refractive index by Laplace-Adomian decomposition // Optical and Quantum Electronics, 2021. V. 53. Iss. 1. P. 55.
11. *Kudryashov N.A.* Highly dispersive optical solitons of equation with various polynomial nonlinearity law // Chaos, Solitons and Fractals, 2020. V. 140. 110202.
12. *Kudryashov N.A.* Highly Dispersive Optical Solitons of an Equation with Arbitrary Refractive Index // Regular and Chaotic Dynamics, 2020. V. 25. Iss. 6. P. 537–543.
13. *Zayed E.M.E., Alngar M.E.M., El-Horbaty M.M., Biswas A., Ekici M., Zhou Q., Khan S., Mallawi F., Belic M.R.* Highly dispersive optical solitons in the nonlinear Schrödinger's equations having polynomial law of the refractive index change // Indian Journal of Physics, 2021. V. 95. Iss. 1. P. 109–119.
14. *Gonzalez-Gaxiola O., Biswas A., Alshomrani A.S.* Highly dispersive optical solitons having Kerr law of refractive index with Laplace-Adomian decomposition // Revista Mexicana de Fisica, 2020. V. 66. Iss. 3. P. 291–296.
15. *Kudryashov N.A.* Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrödinger equations // Applied Mathematics and Computation, 2020. V. 371. 124972.
16. *Kudryashov N.A.* Highly dispersive optical solitons of the generalized nonlinear eighth-order Schrodinger equation // Optik, 2020. V. 206. 164335.
17. *Kudryashov N.A.* Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities // Optik, 2020. V. 212. 164750.
18. *Kohl R.W., Biswas A., Ekici M., Yildirim Y., Triki H., Alshomrani A.S., Belic M.R.* Highly dispersive optical soliton perturbation with quadratic-cubic refractive index by semi-inverse variational principle // Optik, 2020. V. 206. 163621.
19. *Kohl R.W., Biswas A., Ekici M., Zhou, Q., Khan S., Alshomrani A.S., Belic M.R.* Highly dispersive optical soliton perturbation with Kerr law by semi-inverse variational principle // Optik, 2019. V. 199. 163226.
20. *Biswas A., Sonmezoglu A., Ekici M., Alshomrani A.S., Belic M.R.* Highly dispersive singular optical solitons with Kerr law nonlinearity by Jacobi's elliptic ds function expansion// Optik, 2019. V. 192. 162954.

21. *Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., Belic M.R.* Highly dispersive optical solitons in absence of self-phase modulation by Jacobi's elliptic function expansion // Optik, 2019. V. 189. P. 109–120.
22. *Kudryashov N.A.* Method for finding highly dispersive optical solitons of nonlinear differential equations // Optik, 2020. V. 206. 163550.9
23. *Kudryashov N.A.* Solitary wave solutions of hierarchy with non-localnonlinearity // Applied Mathematics Letters, 2020. V. 103. 106155.
24. *Kudryashov N.A.* Method for finding optical solitons of generalized nonlinear Schrödinger equations // Optik, 2022. V. 261. 169163.
25. *Kudryashov N.A.* First integrals and general solution of the complex Ginzburg-Landau equation // Applied Mathematics and Computation, 2020. V. 386. 125407.
26. *Sain S., Ghose-Choudhury A., Garai S.* Solitary wave solutions for the KdV-type equations in plasma: a new approach with the Kudryashov function // European Physical Journal Plus, 2021. V. 136. Iss. 2. P. 226.
27. *Ozisik M., Secer A., Bayram M., Aydin H.* An encyclopedia of Kudryashov's integrability approaches applicable to optoelectronic devices // Optik, 2022. V. 265. 169499.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2022, vol. 11, no. 3, pp. 218–222

Solitary Waves of the Generalized Korteweg–de Vries Equation Including a Dispersion of an Arbitrary Order

N. A. Kudryashov[a,#] and N. V. Ermolaeva[a,b]

[a] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*
[b] *Volgodonsk Engineering Technical Institute, Branch of National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Volgodonsk, Rostov-on-Don oblast, 347360 Russia*
[#] *e-mail: nakudryashov@mephi.ru*

Received August 18, 2022; revised August 21, 2022; accepted August 23, 2022

Abstract—The generalized Korteweg–de Vries equation of an arbitrary order is considered. The equation is a generalization of the famous Korteweg–de Vries equation, the Kawahara equation, and some other equations. A theorem on the existence of solitary waves in the considered class of equations is proved. The form of a solitary wave for an equation of any order is demonstrated. Specific calculations are performed for the twelfth-order equation, for which constraints are presented on the equation parameters for the existence of solitary waves.

Keywords: nonlinear differential equation, generalized Korteweg–de Vries equation, exact solution, solitary wave

DOI: 10.56304/S2304487X2203004X

REFERENCES

1. Wang G., Kara A.H., Biswas A., Guggilla P., Alzahrani A.K., Belic M.R. Highly dispersive optical solitons in polarization-preserving fibers with Kerr law nonlinearity by Lie symmetry. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics,* 2022, vol. 421, 127768.
2. Kudryashov N.A. Implicit Solitary Waves for One of the Generalized Nolinear Schrödinger Equations. *Mathematics,* 2021, vol. 9, iss. 23, 3024. doi.org/10.3390/math9233024
3. Kudryashov N.A. The generalized Duffing oscillator. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, vol. 93, 105526.
4. Zayed E.M.E., Gepreel K.A., El-Horbaty M., Biswas A., Yildirim Y., Alshehri H.M. Highly dispersive opticalsolitons withcomplex ginzburg-landau equation having six nonlinear forms. *Mathematics,* 2021, vol. 9, iss. 24, 3270.
5. Elsherbeny A.M., El-Barkouky R., Seadawy A.R., Ahmed H.M., El-Hassani R.M.I., Arnous A.H. Highly dispersive optical soliton perturbation of Kudryashov's arbitrary form having sextic-power law refractive index. *International Journal of Modern Physics B*, 2021, vol. 35, iss. 24, id. 2150247.
6. Rabie W.B., Seadawy A.R., Ahmed H.M. Highly dispersive Optical solitons to the generalized third-order nonlinear Schrödinger dynamical equation with applications. *Optik,* 2021, vol. 241, 167109.
7. Biswas A., Ekici M., Dakova A., Khan S., Moshokoa S.P., Alshehri H.M., Belic M.R. Highly dispersive optical soliton perturbation with Kudryashov's sextic-power law nonlinear refractive index by semi-inverse variation. *Results in Physics,* 2021, vol. 27, 104539.

8. Gonzalez-Gaxiola O., Biswas A., Alzahrani A.K., Belic M.R. Highly dispersive optical solitons with a polynomial law of refractive index by Laplace-Adomian decomposition. *Journal of Computational Electronics*, 2021, vol. 20, iss. 3, pp. 1216–1223.
9. Zayed E.M.E., Al-Nowehy A.-G., Alngar M.E.M., Biswas A., Asma M., Ekici M., Alzahrani A.K., Belic M.R. Highly dispersive optical solitons in birefringent fibers with four nonlinear forms using Kudryashov's approach. *Journal of Optics (India)*, 2021, vol. 501, pp. 120–131.
10. Gonzalez-Gaxiola O., Biswas A., Asma M., Alzahrani A.K. Highly dispersive optical solitons with nonlocal law of refractive index by Laplace-Adomian decomposition. *Optical and Quantum Electronics*, 2021, vol. 53, iss.1, pp. 55.
11. Kudryashov N.A. Highly dispersive optical solitons of equation with various polynomial nonlinearity law. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2020, vol. 140, 110202.
12. Kudryashov N.A. Highly Dispersive Optical Solitons of an Equation with Arbitrary Refractive Index. *Regular and Chaotic Dynamics,* 2020, vol. 25, iss. 6, pp. 537–543.
13. Zayed E.M.E., Alngar M.E.M., El-Horbaty M.M., Biswas A., Ekici M., Zhou Q., Khan S., Mallawi F., Belic M.R. Highly dispersive optical solitons in the nonlinear Schrödinger's equations having polynomial law of the refractive index change. *Indian Journal of Physics*, 2021, vol. 95, iss. 1, pp. 109–119.
14. Gonzalez-Gaxiola O., Biswas A., Alshomrani A.S. Highly dispersive optical solitons having Kerr law of refractive index with Laplace-Adomian decomposition. *Revista Mexicana de Fisica*, 2020, vol. 66, iss. 3, pp. 291–296.
15. Kudryashov N. A. Highly dispersive solitary wave solutions of perturbednonlinear Schrödinger equations. *Applied Mathematics and Computation*, 2020, vol. 371, 124972.
16. Kudryashov N.A. Highly dispersive optical solitons of the generalized nonlinear eighth-order Schrodinger equation. *Optik*, 2020, vol. 206, 164335.
17. Kudryashov N.A. Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities. *Optik,* 2020, vol. 212, 164750.
18. Kohl R.W., Biswas A., Ekici M., Yildirim Y., Triki H., Alshomrani A.S., Belic M.R. Highly dispersive optical soliton perturbation with quadratic-cubic refractive index by semi-inverse variational principle. *Optik*, 2020, vol. 206, 163621.
19. Kohl R.W., Biswas A., Ekici M., Zhou Q., Khan S., Alshomrani A.S., Belic M.R. Highly dispersive optical soliton perturbation with Kerr law by semi-inverse variational principle. *Optik*, 2019, vol. 199, 163226.
20. Biswas A., Sonmezoglu A., Ekici M., Alshomrani A.S., Belic M.R. Highly dispersive singular optical solitons with Kerr law nonlinearity by Jacobi's elliptic ds function expansion. *Optik,* 2019, vol. 192, 162954.
21. Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., Belic M.R. Highly dispersive optical solitons in absence of self-phase modulation by Jacobi's elliptic function expansion. *Optik,* 2019, vol. 189, pp. 109–120.
22. Kudryashov N.A. Method for finding highly dispersive optical solitons of nonlinear differential equations. *Optik,* 2020, vol. 206, 163550.9
23. Kudryashov N.A. Solitary wave solutions of hierarchy with non-local nonlinearity. *Applied Mathematics Letters,* 2020, vol. 103, 106155.
24. Kudryashov N.A. Method for finding optical solitons of generalized nonlinear Schrödinger equations. *Optik*, 2022, vol. 261, 169163.
25. Kudryashov N.A. First integrals and general solution of the complex Ginzburg-Landau equation. *Applied Mathematics and Computation,* 2020, vol. 386, 125407.
26. Sain S., Ghose-Choudhury A., Garai S. Solitarywave solutions for the KdV-type equations in plasma: a new approach with the Kudryashov function. *European Physical Journal Plus*, 2021, vol. 136, iss. 2. pp. 226.
27. Ozisik M., Secer A., Bayram M., Aydin H. An encyclopedia of Kudryashov's integrability approaches applicable to optoelectronic devices. *Optik,* 2022, vol. 265, 169499.