ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2022, том 11, № 3, с. 223–227

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.53

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРИНЦИПА МАКСИМУМА МОДУЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

© 2022 г. К. Я. Кудрявцев[1,*]

[1]Институт интеллектуальных кибернетических систем, Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия

**e-mail: KYKudryavtsev@mephi.ru*

Поступила в редакцию 10.08.2022 г.
После доработки 11.08.2022 г.
Принята к публикации 23.08.2022 г.

В теории функции комплексного переменного хорошо известным фактом является принцип максимума модуля аналитической функции комплексной переменной, который состоит в том, что если функция аналитична в ограниченной области и непрерывна на ее границе, не является константой, то ее модуль достигает наибольшего значения лишь в точках границы. В литературе данное утверждение доказывается довольно громоздко методом от противного путем вычисления значения функции по замкнутому контуру с помощью интегральной формулы Коши. Было бы интересно получить другое, более простое доказательство принципа максимума модуля аналитической функции комплексной переменной. В данной статье приводится более простое, строгое доказательство принципа максимума модуля аналитической функции комплексной переменной. Модуль функции комплексной переменной рассматривается как функция двух переменных. В основе доказательства лежит вычисление частных производных первого и второго порядков от модуля функции, построения матрицы квадратичной формы на основе частных производных второго порядка и анализа знакоопределенности данной формы с помощью критерия Сильвестра. Доказано, что значение главного минора второго порядка меньше нуля внутри замкнутой области и, следовательно, модуль функции не имеет экстремума.

Ключевые слова: принцип максимума модуля аналитической функции комплексной переменной, модуль функции комплексной переменной, аналитические функции комплексной переменной

DOI: 10.56304/S2304487X22030051

ВВЕДЕНИЕ

Теория функции комплексного переменного играет важную роль в синтезе и анализе устойчивости аналоговых и цифровых фильтров, в спектральном анализе, операционном исчислении и других областях. Одним из фундаментальных фактов в теории функции комплексного переменного является принцип максимума модуля аналитической функции комплексной переменной [1–3]. Смысл принципа максимума модуля аналитической функции комплексной переменной состоит в следующем [4]:

– имеется функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$, которая аналитична в заданной ограниченной области D и непрерывна на ее границе Г;

– функция $f(z)$ не является тождественно постоянной в области D.

Тогда модуль $|f(z)|$ достигает своего наибольшего значения M на множестве $\bar{D} = D \cup \Gamma$ лишь в точках границы Γ области D, т.е.

$$|f(z)| < M \;\; \forall z \in D$$

Данное утверждение не является очевидным и его доказательство, приводимое в учебниках по теории функции комплексного переменного, является довольно громоздким. Оно основывается на доказательстве от противного [4]. Предполагается, что существует внутренняя точка $z \in D$, в которой $|f(z)|$ достигает максимума, т.е.:

$$\exists z \in D \mid |f(z)| = M.$$

Выделяется область G, в точках которого $|f(z)|$ достигает максимума, причем $G \neq D$

$$G = \{z \in D \mid |f(z)| = M\}.$$

Так как $G \neq D$, то существует граничная точка z_0 множества G, принадлежащая D, т.е. $z_0 \in D$, причем

$$|f(z_0)| = M.$$

Так как $z_0 \in D$, то существует некоторая окрестность $O_\delta(z_0)$ этой точки, принадлежащая D. С другой стороны, т.к. z_0 – граничная точка множества G, то существует точка z_* лежащая в окрестности $O_\delta(z_0)$, но не принадлежащая множеству G, т.е.

$$|f(z_*)| < M.$$

Если рассмотреть окружность $\gamma \in O_\delta(z_0)$ с центром в точке z_0 и радиусом $r = |z_* - z_0|$, то используя интегральную формулу Коши можно записать

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)}d\xi.$$

Здесь следует заметить, что точка z_* лежит на окружности γ.

Далее выбирается достаточно малая величина $\varepsilon > 0$, при которой выполняется соотношение

$$|f(z_*)| < M - \varepsilon,$$

и формируется окрестность точки z_*, удовлетворяющая условию:

$$O_\delta 9 z_*) \mid \forall z \in O_\delta(z_*) |f(z)| < M - \varepsilon.$$

Окружность γ разбивается на две дуги $\gamma_1 = \gamma \cap O_\delta(z_*)$ и $\gamma_2 = \gamma/\gamma_1$, причем

$$|f(z)| < M - \varepsilon \forall z \in \gamma_1,$$

$$|f(z)| \le M \quad \forall z \in \gamma_2.$$

Интеграл по окружности γ, можно представить как сумму интегралов по кривым γ_1 и γ_2. В этом случае интегральная формула Коши представляется как:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)}d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)}d\xi.$$

Для модуля $f(z_0)$ будем иметь

$$|f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)}d\xi\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)}d\xi\right|.$$

Учитывая, что

$$\left|\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)}\right| < \frac{M - \varepsilon}{r} \ \forall \xi \in \gamma_1,$$

$$\left|\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)}\right| < \frac{M}{r} \ \forall \xi \in \gamma_2,$$

и вычисляя представленные интегралы, получим:

$$|f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\left[\frac{M - \varepsilon}{r} l_{\gamma_1} + \frac{M}{r} l_{\gamma_2}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{M}{r}(l_{\gamma_1} + l_{\gamma_2}) - \frac{\varepsilon}{r} l_{\gamma_1}\right],$$

где l_{γ_1} и l_{γ_2} длины кривых γ_1 и γ_2.

Так как $l_{\gamma_1} + l_{\gamma_2} = l_\gamma = 2\pi r$, будем иметь

$$|f(z_0)| \le M - \frac{\varepsilon}{2\pi r} l_{\gamma_1} < M.$$

Таким образом, получается противоречие. С одной стороны $|f(z_0)| = M$, т.к. по предположению точка z_0 это точка в которой $|f(z_0)|$ достигает максимального значения, а с другой, при вычислении по формуле Коши $|f(z_0)| < M$. Следовательно, функция $|f(z_0)|$ не может достигать максимального значения внутри области D.

Как видно, приведенное доказательство является довольно громоздким и на первый взгляд неочевидным. Поэтому было бы интересно получить более простое и строгое доказательство принципа максимума модуля аналитической функции комплексной переменной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА МАТРИЦЫ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

Для упрощения дальнейших преобразований введем следующие обозначения:

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – аналитическая функция комплексной переменной,

$|f(z)| = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$ – модуль функции комплексной переменной ($|f(z)|$ представляет собой функцию двух переменных $x u y$).

Частные производные:

$$u_x = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y};$$

$$v_x = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y};$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}; \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}; \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y};$$

$$v_{xx} = \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2}; \quad v_{yy} = \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2}; \quad v_{xy} = \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Для доказательства предположим, что в заданной ограниченной области D имеется некоторая точка z, в которой имеется экстремум функции $|f(z)|$. Тогда должны выполняться условия:

$$\frac{\partial |f(z)|}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial |f(z)|}{\partial y} = 0.$$

Вычислим эти частные производные:

$$\frac{\partial |f(z)|}{\partial x} = \frac{2uu_x + 2vv_x}{2\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{uu_x + vv_x}{|f(z)|} = 0,$$

$$\frac{\partial |f(z)|}{\partial y} = \frac{2uu_y + 2vv_y}{2\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{uu_y + vv_y}{|f(z)|} = 0.$$

Таким образом, если в области D имеется точка экстремума, то в этой точке должны выполняться соотношения

$$\begin{cases} uu_x + vv_x = 0 \\ uu_y + vv_y = 0 \end{cases}. \qquad (1)$$

Так как $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — аналитическая функция комплексной переменной, то для нее выполняются условия Коши Римана [4]:

$$u_x = v_y; \quad u_y = -v_x. \qquad (2)$$

Исходя из этих выражений, получим дополнительные соотношения для частных производных, которые понадобятся в дальнейшем:

$$u_{xy} = v_{yy}; \quad u_{xx} = v_{xy} \qquad (3)$$

$$u_{xy} = -v_{xx}; \quad u_{yy} = -v_{xy} \qquad (4)$$

Из анализа (3) и (4) нетрудно получить:

$$u_{xx} = -u_{yy}; \quad v_{xx} = -v_{yy} \qquad (5)$$

Выполним преобразования системы (1). Исходя из соотношений (2), заменим в системе уравнений (1) v_x на $-u_y$, а v_y на u_x. В этом случае система (1) запишется как:

$$\begin{cases} uu_x - vu_y = 0, \\ uu_y + vu_x = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Если теперь первое уравнение в (6) умножить на u, а второе на v и потом их сложить, то получим следующее соотношение

$$(u^2 + v^2)u_x = 0. \qquad (7)$$

Если же первое уравнение в (6) умножить на v, а второе на u и, потом из второго вычесть первое, то получим

$$(u^2 + v^2)u_y = 0. \qquad (8)$$

Таким образом, для точки экстремума в области D (если таковая имеется), должны выполняться соотношения

$$\begin{cases} (u^2 + v^2)u_x = 0, \\ (u^2 + v^2)u_y = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Система уравнений (9) будет иметь решение, если

$$u^2 + v^2 = |f(z)|^2 = 0, \qquad (10)$$

или

$$\begin{cases} u_x = 0, \\ u_y = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Выражение (10) говорит о том, что в точке экстремума модуль функции принимает значение равное нулю, т.е. минимальное. Так как нас интересует максимум модуля функции, то для его поиска необходимо использовать систему (11). Таким образом, для точки максимума модуля функции в области D (если таковой имеется), должна выполняться система уравнений (11). С учетом аналитичности функции и выполнения условий Коши Римана система (11) может быть дополнена системой

$$\begin{cases} v_x = 0, \\ v_y = 0. \end{cases} \qquad (12)$$

Для определения типа экстремума в точке z необходимо найти матрицу A_2 квадратичной формы вида [5, 6]:

$$A_2 = \begin{Vmatrix} \frac{\partial^2 |f(z)|}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 |f(z)|}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 |f(z)|}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 |f(z)|}{\partial y^2} \end{Vmatrix}.$$

В соответствии с критерием Сильвестра [5], если значение определителя

$$\det(A_2) = \frac{\partial^2 |f(z)|}{\partial x^2}\frac{\partial^2 |f(z)|}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 |f(z)|}{\partial x \partial y}\right)^2 \qquad (13)$$

окажется меньше нуля, то функция $|f(z)|$ не будет иметь экстремума.

Для вычисления (13) необходимо найти частные производные второго порядка.

$$\frac{\partial^2 |f(z)|}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \sqrt{u^2 + v^2}}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{uu_x + vv_x}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right) =$$

$$= -(u^2 + v^2)^{-\frac{3}{2}}(uu_x + vv_x)^2 +$$

$$+ (u^2 + v^2)^{-\frac{1}{2}}(u_x^2 + uu_{xx} + v_x^2 + vv_{xx}).$$

Учитывая соотношения (11) и (12), получим

$$\frac{\partial^2 |f(z)|}{\partial x^2} = \frac{uu_{xx} + vv_{xx}}{\sqrt{u^2 + v^2}} \qquad (14)$$

Выполняя аналогичные вычисления, получим

$$\frac{\partial^2 |f(z)|}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}}{\partial y^2} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \sqrt{u^2 + v^2}}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{uu_y + vv_y}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right) =$$

$$= -(u^2 + v^2)^{-\frac{3}{2}}(uu_y + vv_y)^2 +$$

$$+ (u^2 + v^2)^{-\frac{1}{2}}(u_y^2 + uu_{yy} + v_y^2 + vv_{yy}),$$

$$\frac{\partial^2 |f(z)|}{\partial y^2} = \frac{uu_{yy} + vv_{yy}}{\sqrt{u^2 + v^2}} \qquad (15)$$

И, наконец, вычисляя $\frac{\partial^2 |f(z)|}{\partial x \partial y}$, будем иметь

$$\frac{\partial^2 |f(z)|}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \sqrt{u^2+v^2}}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{uu_x + vv_x}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) =$$

$$= -(u^2+v^2)^{-\frac{3}{2}}(uu_y + vv_y)(uu_x + vv_x) +$$

$$+(u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}}(u_y u_x + uu_{xy} + v_y v_x + vv_{xy}).$$

Учитывая соотношения (11) и (12), получим

$$\frac{\partial^2 |f(z)|}{\partial x \partial y} = \frac{uu_{xy} + vv_{xy}}{\sqrt{u^2+v^2}} \tag{16}$$

Подставляя (14), (15) и (16) в (13), будем иметь

$$\det(A_2) = \frac{uu_{xx} + vv_{xx}}{\sqrt{u^2+v^2}} \frac{uu_{yy} + vv_{yy}}{\sqrt{u^2+v^2}} - \left(\frac{uu_{xy} + vv_{xy}}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{u^2+v^2}\{(uu_{xx} + vv_{xx})(uu_{yy} + vv_{yy}) - (uu_{xy} + vv_{xy})^2\}.$$

Заменяя в соответствии с (3) и (4), v_{xy} на u_{xx} и u_{xy} на $-v_{xx}$, получим

$$\frac{1}{u^2+v^2}\{(u^2 u_{xx} u_{yy} + uvu_{yy} v_{xx} + uvu_{xx} v_{yy} +$$

$$+ v^2 v_{xx} v_{yy}) - (vu_{xx} - uv_{xx})^2\} =$$

$$= \frac{1}{u^2+v^2}\{u^2 u_{xx} u_{yy} + uvu_{yy} v_{xx} + uvu_{xx} v_{yy} +$$

$$+ v^2 v_{xx} v_{yy} - (v^2 u_{xx}^2 - 2uvu_{xx} v_{xx} + u^2 v_{xx}^2)\}.$$

Используя соотношение (5), согласно которому $u_{xx} = -u_{yy}; v_{xx} = -v_{yy}$, окончательно получим:

$$\det(A_2) = \frac{1}{u^2+v^2}\{u^2 u_{xx}(-u_{xx}) + uv(-u_{xx})v_{xx} + uvu_{xx} \times$$

$$\times(-v_{xx}) + v^2 v_{xx}(-v_{xx}) - (v^2 u_{xx}^2 - 2uvu_{xx} v_{xx} + u^2 v_{xx}^2)\} =$$

$$= \frac{1}{u^2+v^2}\{-u^2 u_{xx}^2 - 2uvu_{xx} v_{xx} - v^2 v_{xx}^2 -$$

$$- v^2 u_{xx}^2 + 2uvu_{xx} v_{xx} - u^2 v_{xx}^2\} = \frac{1}{u^2+v^2} \times$$

$$\times\{-(u^2+v^2)u_{xx}^2 - (u^2+v^2)v_{xx}^2\} = -(u_{xx}^2 + v_{xx}^2) < 0.$$

Таким образом, $\det(A_2) < 0$, а это означает, что функция $|f(z)|$ не имеет экстремума внутри области D. Что и требовалось доказать.

ВЫВОДЫ

В работе предложено строгое доказательство принципа максимума модуля аналитической функции комплексной переменной. В основе доказательства лежит вычисление частных производных первого и второго порядков от модуля функции, построения матрицы квадратичной формы на основе частных производных второго порядка и анализа знакоопределенности данной формы с помощью критерия Сильвестра. Доказано, что значение главного минора второго порядка меньше нуля внутри замкнутой области и, следовательно, модуль функции не имеет экстремума. Предложенное доказательство является более простым и последовательным по сравнению с тем, которое приводится в классических учебниках по теории функции комплексного переменного.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морозова В.Д.* Теория функций комплексного переменного. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 520 с.
2. *Половинкин Е.С.* Курс лекций по теории функций комплексного переменного. М.: Физматкнига, 2003. 208 с.
3. *Лунц Г.Л.* Функции комплексного переменного. СПб.: Лань, 2002. 304 с.
4. *Фомин В.И.* Теория функций комплексного переменного. Тамбов: Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. 296 с.
5. *Киркинский А.С.* Математический анализ. М.: Академический Проект, 2006. 525 с.
6. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Часть 1. М.: Наука, 1971. 600 с.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2022, vol. 11, no. 3, pp. 223–227

Proof of the Maximum Modulus Principle of an Analytic Function

K. Y. Kudryavtsev[a,#]

[a] *Institute of Cyber Intelligence Systems, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[#] *e-mail: KYKudryavtsev@mephi.ru*

Received August 10, 2022; revised August 11, 2022; accepted August 23, 2022

Abstract—In the theory of functions of a complex variable, a well-known fact is the principle of maximum modulus of an analytic function of a complex variable, which states that if a function is analytic in a bounded domain and continuous on its boundary, is not a constant, then its modulus reaches its maximum value only at the points of the boundary. In the literature, this statement is proved rather cumbersome by contradiction by calculating the value of the function along a closed contour using the Cauchy integral formula. It would be interesting to obtain another, simpler proof of the principle of maximum modulus of an analytic function of a complex variable. This article provides a simpler, more rigorous proof of the maximum principle for the modulus of an analytic function of a complex variable. The modulus of a function of a complex variable is considered as a function of two variables. The proof is based on the calculation of partial derivatives of the first and second orders of the modulus of the function, the construction of a matrix of a quadratic form based on partial derivatives of the second order, and the analysis of the sign-definiteness of this form using the Sylvester criterion. It is proved that the value of the principal minor of the second order is less than zero inside the closed region and, therefore, the modulus of the function does not have an extremum.

Keywords: maximum principle for the modulus of an analytic function of a complex variable, modulus of a function of a complex variable, analytic functions of a complex variable

DOI: 10.56304/S2304487X22030051

REFERENCES

1. Morozova V.D. *Teoriya funkcij kompleksnogo peremennogo* [Theory of functions of a complex variable]. Moscow, Publishing house of MSTU Im. N.E. Bauman Publ., 2002, 520 p.
2. Polovinkin E.S. *Kurs lekcij po teorii funkcij kompleksnogo peremennogo* [A course of lectures on the theory of functions of a complex variable]. Moscow, Fizmatkniga Publ., 2003, 208 p.
3. Lunts G.L. *Funkcii kompleksnogo peremennogo* [Functions of a complex variable]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2002, 304 p.
4. Fomin V.I. *Teoriya funkcij kompleksnogo peremennogo* [The theory of functions of a complex variable]. Tambov, Publishing House of GOU VPO TSTU Publ., 2010, 296 p.
5. Kirkinsky A.S. *Matematicheskij analiz* [Mathematical analysis]. Moscow, Academic Project Publ., 2006, 525 p.
6. Ilyin V.A., Poznyak E.G. *Osnovy matematicheskogo analiza. CHast' 1* [Fundamentals of mathematical analysis. Part 1]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 600 p.