

НЕКОТОРЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

© 2022 г. С. П. Баутин^{1,*}, А. Г. Обухов^{2,**}

¹ Снежинский физико-технический институт НИЯУ МИФИ, Снежинск, Челябинской области, 456776, Россия

² Тюменский индустриальный университет, Тюмень, 625000, Россия

*e-mail: spbautin@mail.ru

**e-mail: agobukhov@inbox.ru

Поступила в редакцию 26.07.2022 г.

После доработки 27.07.2022 г.

Принята к публикации 09.08.2022 г.

В работе рассматривается система уравнений Максвелла, для которой делается переход от декартовой к цилиндрической системе координат. Вместо первых двух традиционных компонент напряженности магнитного и электрического полей вводятся радиальные и окружные компоненты этих векторов. В результате в полученную систему уравнений с частными производными не входит в явном виде зависимость от полярного угла. В случае, когда искомые функции зависят только от времени и полярного радиуса с помощью разделения переменных построены конкретные решения системы уравнений Максвелла.

Ключевые слова: система уравнений Максвелла, цилиндрически симметричные решения, разделение переменных

DOI: 10.56304/S2304487X2202002X

1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Система уравнений Максвелла при условии отсутствия зарядов и электрического тока имеет следующий вид [1–3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + c \times \text{rot} \mathbf{E} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c \times \text{rot} \mathbf{B} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \text{div} \mathbf{B} = 0, \\ \text{div} \mathbf{E} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где вектор $\mathbf{B}$ с компонентами (u, v, w) задает магнитное поле; вектор $\mathbf{E}$ с компонентами (p, q, s) — электрическое поле; c — постоянная скорость света.

С точки зрения математики система (1), (2) является переопределенной поскольку для шести искомых функций — компонент векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ — присутствуют восемь уравнений: шесть в двух векторных уравнениях (1) и еще двумя уравнениями являются соотношения (2). Тем не менее, как бы “лишние” уравнения (2) являются следствиями объективных законов электромагнитных явлений: первое уравнение из (2) передает отсут-

ствие других источников магнитного поля, второе есть следствие закона Кулона [4, с. 264, 265]. В теории уравнений с частными производными соотношения типа (2) называют дополнительными дифференциальными связями для рассматриваемой системы (1) и имеются методы исследования таких задач [5].

Система (1) в прямоугольных координатах в подробной записи такая:

$$\begin{cases} u_t = -cs_y + cq_z, \\ v_t = -cp_z + cs_x, \\ w_t = -cq_x + cp_y, \\ p_t = cw_y - cv_z, \\ q_t = cu_z - cw_x, \\ s_t = cv_x - cu_y. \end{cases} \quad (3)$$

А соотношения (2) следующие

$$\begin{cases} u_x + v_y + w_z = 0, \\ p_x + q_y + s_z = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Из системы (3) с учетом соотношений (4) для всех искомых функций с помощью стандартных действий получаются волновые уравнения.

Например, для функции $u(t, x, y, z)$ первое уравнение системы (3) дифференцируется по t ,

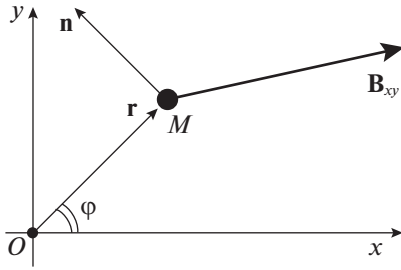


Рис. 1. Проекция вектора B_{xy} на плоскость xOy .

пятое уравнение по z , шестое уравнение по y и первое равенство из системы (4) по x . В результате получаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= -cs_{yt} + cq_{zt}; & q_{tz} &= cu_{zz} - cw_{xz}, \\ s_{ty} &= cv_{xy} - cu_{yy}; & u_{xx} + v_{yx} + w_{zx} &= 0. \end{aligned}$$

Исключение из первого полученного уравнения слагаемых q_{tz} и s_{ty} и последующая замена суммы $(v_{yx} + w_{zx})$ на $(-u_{xx})$ дает волновое уравнение для функции $u(t, x, y, z)$:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}).$$

Далее вместо уравнений (1), (2) далее рассматривается система уравнений Максвелла в виде (3), (4).

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В системах (3), (4) делается переход к цилиндрической системе координат по формулам

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z'. \end{cases}$$

В этом случае производные по старым переменным будут выражаться через производные по новым переменным следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}. \end{cases}$$

И система (3) в цилиндрических координатах имеет следующий вид (штрих у переменной z' опущен):

$$\begin{cases} u_t + c \sin \varphi s_r + c \frac{\cos \varphi}{r} s_\varphi - cq_z = 0, \\ v_t + cp_z - c \cos \varphi s_r + c \frac{\sin \varphi}{r} s_\varphi = 0, \\ w_t + c \cos \varphi q_r - c \frac{\sin \varphi}{r} q_\varphi - c \sin \varphi p_r - c \frac{\cos \varphi}{r} p_\varphi = 0, \\ p_t - c \sin \varphi w_r - c \frac{\cos \varphi}{r} w_\varphi + cv_z = 0, \\ q_t - cu_z + c \cos \varphi w_r - c \frac{\sin \varphi}{r} w_\varphi = 0, \\ s_t - c \cos \varphi v_r + c \frac{\sin \varphi}{r} v_\varphi + c \sin \varphi u_r + c \frac{\cos \varphi}{r} u_\varphi = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Уравнения (4) в цилиндрической системе координат становятся такими:

$$\begin{cases} \cos \varphi u_r - \frac{\sin \varphi}{r} u_\varphi + \sin \varphi v_r + \frac{\cos \varphi}{r} v_\varphi + w_z = 0; \\ \cos \varphi p_r - \frac{\sin \varphi}{r} p_\varphi + \sin \varphi q_r + \frac{\cos \varphi}{r} q_\varphi + s_z = 0. \end{cases} \quad (6)$$

В систему (5) и в уравнения (6) в явном виде через гармоники входит зависимость от полярного угла φ и поэтому в нетривиальные решения системы (5) зависимость от переменной φ тоже будет входить в явном виде. В частности, если для системы (5) при $t = 0$ задать непостоянные начальные данные, зависящие только от r , то при построении решения этой задачи Коши в виде ряда по степеням t уже в первые коэффициенты ряда войдут в явном виде гармоники от φ . Например:

$$u_t|_{t=0} = -c \sin \varphi \frac{\partial(s|_{r=0})}{\partial r}.$$

3. ВВЕДЕНИЕ НОВЫХ ИСКОМЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть на плоскости xOy в точке $M(x, y)$ задан вектор $B_{xy} = (u, v)$, являющийся проекцией вектора B на плоскость xOy (см. рис. 1).

Обозначим через r — радиус-вектор точки M в плоскости xOy , φ — его полярный угол, а через n — вектор, также лежащий в плоскости xOy , перпендикулярный вектору r и направленный влево от r (см. рис. 1).

Проекции вектора B_{xy} на r и n обозначим соответственно ζ и η :

$$\text{пр}_r B_{xy} = \zeta; \quad \text{пр}_n B_{xy} = \eta.$$

Таким образом, ζ и η есть соответственно радиальная и окружная составляющие вектора $B_{xy} = (u, v)$.

Связь старых функций u, v с новыми функциями ζ, η такая

$$\eta = v \cos \varphi - u \sin \varphi; \quad \zeta = u \cos \varphi + v \sin \varphi. \quad (7)$$

$$u = \zeta \cos \varphi - \eta \sin \varphi; \quad v = \zeta \sin \varphi + \eta \cos \varphi. \quad (8)$$

Аналогичным образом (см. рис. 1, на котором вектор $\mathbf{B}_{xy}$ надо заменить на вектор $\mathbf{E}_{xy}$) проекции вектора $\mathbf{E}_{xy}$ на $\mathbf{r}$ и $\mathbf{n}$ обозначим соответственно ϑ и κ . Таким образом, ϑ и κ есть соответственно ра-

диальная и окружная составляющие вектора $\mathbf{E}_{xy} = (p, q)$.

В результате получается, что

$$\kappa = q \cos \varphi - p \sin \varphi; \quad \vartheta = p \cos \varphi + q \sin \varphi. \quad (9)$$

$$p = \vartheta \cos \varphi - \kappa \sin \varphi; \quad q = \vartheta \sin \varphi + \kappa \cos \varphi. \quad (10)$$

С использованием соотношений (7)–(10) получается связь частных производных старых искомым функций через новые. В итоге система уравнений Максвелла в цилиндрических координатах и с новыми искомыми функциями становится такой:

$$\left\{ \begin{aligned} &\zeta_r \cos \varphi - \eta_r \sin \varphi + c \sin \varphi s_r + c \frac{\cos \varphi}{r} s_\varphi - c \vartheta_z \sin \varphi - c \kappa_z \cos \varphi = 0, \\ &\zeta_r \sin \varphi + \eta_r \cos \varphi + c \vartheta_z \cos \varphi - c \kappa_z \sin \varphi - c \cos \varphi s_r + c \frac{\sin \varphi}{r} s_\varphi = 0, \\ &w_t + c \cos \varphi (\vartheta_r \sin \varphi + \kappa_r \cos \varphi) - c \frac{\sin \varphi}{r} (\vartheta_\varphi \sin \varphi + \kappa_\varphi \cos \varphi + \vartheta \cos \varphi - \kappa \sin \varphi) - \\ &- c \frac{\cos \varphi}{r} (\vartheta_\varphi \cos \varphi - \kappa_\varphi \sin \varphi - \vartheta \sin \varphi - \kappa \cos \varphi) = 0, \\ &\vartheta_t \cos \varphi - \kappa_t \sin \varphi - c \sin \varphi w_r - c \frac{\cos \varphi}{r} w_\varphi + c \zeta_z \sin \varphi + c \eta_z \cos \varphi = 0, \\ &\vartheta_t \sin \varphi + \kappa_t \cos \varphi - c (\zeta_z \cos \varphi - \eta_z \sin \varphi) + c \cos \varphi w_r - c \frac{\sin \varphi}{r} w_\varphi = 0, \\ &s_t - c \cos \varphi (\zeta_r \sin \varphi + \eta_r \cos \varphi) + c \frac{\sin \varphi}{r} (\zeta_\varphi \sin \varphi + \eta_\varphi \cos \varphi + \zeta \cos \varphi - \eta \sin \varphi) + c \sin \varphi (\zeta_r \cos \varphi - \eta_r \sin \varphi) + \\ &+ c \frac{\cos \varphi}{r} (\zeta_\varphi \cos \varphi - \eta_\varphi \sin \varphi - \zeta \sin \varphi - \eta \cos \varphi) = 0. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Далее делаются следующие тождественные преобразования системы (11).

Если первое уравнение системы (11) умножить на $\cos \varphi$, а второе на $\sin \varphi$ и результаты сложить, то получится следующее уравнение

$$\zeta_t + \frac{c}{r} s_\varphi - c \kappa_z = 0.$$

Если первое уравнение системы (11) умножить на $(-\sin \varphi)$, а второе на $\cos \varphi$ и результаты сложить, то получится следующее уравнение

$$\eta_t - c s_r + c \vartheta_z = 0.$$

Приведение подобных в третьем уравнении системы (11) приводит к такому уравнению

$$w_t + c \kappa_r - \frac{c}{r} \vartheta_\varphi + \frac{c}{r} \kappa = 0.$$

Если четвертое уравнение системы (11) умножить на $\cos \varphi$, а пятое на $\sin \varphi$ и результаты сложить, то получится следующее уравнение

$$\vartheta_t - \frac{c}{r} w_\varphi + c \eta_z = 0.$$

Если четвертое уравнение системы (11) умножить на $(-\sin \varphi)$, а пятое на $\cos \varphi$ и результаты сложить, то получится следующее уравнение

$$\kappa_t + c w_r - c \zeta_z = 0.$$

Приведение подобных в шестом уравнении системы (11) приводит к такому уравнению

$$s_t - c \eta_r + \frac{c}{r} \zeta_\varphi - \frac{c}{r} \eta = 0.$$

Итак, система (3) в цилиндрических координатах и при введении новых искомым функций имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} &\zeta_t + \frac{c}{r} s_\varphi - c \kappa_z = 0; \\ &\eta_t - c s_r + c \vartheta_z = 0; \\ &w_t + c \kappa_r - \frac{c}{r} \vartheta_\varphi + \frac{c}{r} \kappa = 0; \\ &\vartheta_t - \frac{c}{r} w_\varphi + c \eta_z = 0; \\ &\kappa_t + c w_r - c \zeta_z = 0; \\ &s_t - c \eta_r + \frac{c}{r} \zeta_\varphi - \frac{c}{r} \eta = 0. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

В систему (12) не входит в явном виде, в отличие от системы (5), зависимость от полярного угла φ .

Отметим новый момент: система (12), в отличие от системы (3), содержит в явном виде не только производные от искомых функций, но и сами функции в слагаемых: $c\kappa/r$ и $c\eta/r$ – в третьем и шестом уравнениях системы (12).

Уравнения системы (6), записанные через новые искомые функции, после приведения подобных эти уравнения образуют такую систему:

$$\begin{cases} \zeta_r + \frac{1}{r}\eta_\varphi + \frac{1}{r}\zeta + w_z = 0, \\ \vartheta_r + \frac{1}{r}\kappa_\varphi + \frac{1}{r}\vartheta + s_z = 0 \end{cases} \quad (13)$$

и в нее также не входит в явном виде зависимость от полярного угла φ .

В результате системы (12), (13) представляют систему уравнений Максвелла в цилиндрической системе координат, когда часть искомого функций: u, v, p, q – эквивалентным образом заменена на новые искомые функции $\zeta, \eta, \vartheta, \kappa$. И еще раз отметим, что в эти системы тоже в явном виде не входит независимая переменная φ .

4. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

Далее рассматривается ситуация, когда решения систем (12) и (13) зависят только от независимых переменных t и r , то есть

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial z} = 0.$$

В этом случае система (12) переходит в следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \zeta_t = 0; \\ \eta_t = cs_r; \\ w_t = -c\kappa_r - \frac{c}{r}\kappa; \\ \vartheta_t = 0; \\ \kappa_t = -cw_r; \\ s_t = c\eta_r + \frac{c}{r}\eta. \end{cases} \quad (14)$$

Из первого и четвертого уравнения следует, что

$$\zeta = \zeta^o(r); \quad \vartheta = \vartheta^o(r), \quad (15)$$

и оставшиеся уравнения из системы (14) распадаются на две независимые системы

$$\begin{cases} \eta_t = cs_r; \\ s_t = c\left(\eta_r + \frac{1}{r}\eta\right), \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} w_t = -c\left(\kappa_r + \frac{1}{r}\kappa\right); \\ \kappa_t = -cw_r. \end{cases} \quad (17)$$

Системы (16) и (17) эквивалентны: если в системе (17) сделать замену переменных $t' = -t$ и переобозначить w в s , а κ в η , то получается система (16).

В рассматриваемом частном случае отсутствия зависимости от переменных φ, z система (13) становится такой

$$\begin{cases} \zeta_r + \frac{1}{r}\zeta = 0, \\ \vartheta_r + \frac{1}{r}\vartheta = 0. \end{cases}$$

Тогда с учетом равенств (15) из последней системы получается явный вид искоемых функций

$$\zeta(t, r) = \frac{\zeta^{oo}}{r}; \quad \vartheta(t, r) = \frac{\vartheta^{oo}}{r}; \quad \zeta^{oo}, \vartheta^{oo} - \text{const.} \quad (18)$$

Таким образом решение системы уравнений Максвелла в цилиндрически симметричном случае свелось к решению системы (16).

Стандартными преобразованиями из системы (16) получаются следствия – уравнения второго порядка для каждой из искоемых функций.

Дифференцирование первого уравнения системы (16) по переменной t и дифференцирование второго уравнения по переменной r дает два таких равенства

$$\eta_{tt} = cs_{rt}, \quad s_{tr} = c\left(\eta_{rr} - \frac{1}{r^2}\eta + \frac{1}{r}\eta_r\right).$$

Последующее исключение из них производной s_{rt} приводит к уравнению только для функции η :

$$\eta_{tt} = c^2\left(\eta_{rr} + \frac{1}{r}\eta_r - \frac{1}{r^2}\eta\right), \quad (19)$$

которое является неэквивалентным следствием системы (16).

А дифференцирование первого уравнения системы (16) по переменной r , а второго уравнения по t дает следующие два равенства

$$\eta_{tr} = cs_{rr}, \quad s_{tt} = c\left(\eta_{tr} + \frac{1}{r}\eta_t\right).$$

Далее с помощью первого из полученных уравнений из второго исключается η_{tr} , а с помощью первого уравнения системы (16) исключается η_t и получается одно уравнение для функции s :

$$s_{tt} = c^2\left(s_{rr} + \frac{1}{r}s_r\right). \quad (20)$$

Уравнение (20) также является неэквивалентным следствием системы (16).

Заметим, что уравнение (20) является для функции $s(t, r)$ волновым уравнением в цилиндрически симметричном случае, а уравнение (19) таковым для функции $\eta(t, r)$ таковым не является.

Также отметим, что решения уравнений (19), (20) могут не являться решениями системы (16), поскольку в этом случае функции $\eta(t, r)$, $s(t, r)$ определяются независимо друг от друга, а связи между ними, накладываемые уравнениями системы (16), могут не выполняться. Например, равенство: $\eta_t = cs_r$ — заведомо не будет справедливым, если взять стационарное решение уравнения (19), а в качестве решения уравнения (25) взять решение, с отличной от нуля частной производной по переменной r .

5. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

В системе (16) проведем разделение переменных, представив каждую из искомым функций $\eta(t, r)$, $s(t, r)$ в виде произведения новых искомым функций, зависящих каждая от своего одного независимого переменного:

$$\eta(t, r) = \eta_1(t)\eta_2(r); \quad s(t, r) = s_1(t)s_2(r). \quad (21)$$

В этом случае система (16) приобретает следующий вид

$$\begin{cases} \eta_1'(t)\eta_2(r) = cs_1(t)s_2'(r); \\ s_1'(t)s_2(r) = c \left[\eta_1(t)\eta_2'(r) + \frac{1}{r}\eta_1(t)\eta_2(r) \right] \end{cases}$$

и с помощью деления получаются следующие равенства

$$\begin{cases} \frac{\eta_1'(t)}{s_1(t)} = c \frac{s_2'(r)}{\eta_2(r)} = \lambda = \text{const}; \\ \frac{s_1'(t)}{\eta_1(t)} = c \frac{\left[\eta_2'(r) + \frac{1}{r}\eta_2(r) \right]}{s_2(r)} \mu = \text{const}. \end{cases}$$

В итоге получаются следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\frac{\eta_1'(t)}{s_1(t)} = \lambda, \quad (22)$$

$$c \frac{s_2'(r)}{\eta_2(r)} = \lambda, \quad (23)$$

$$\frac{s_1'(t)}{\eta_1(t)} = \mu, \quad (24)$$

$$c \frac{\left[\eta_2'(r) + \frac{1}{r}\eta_2(r) \right]}{s_2(r)} = \mu. \quad (25)$$

При решении уравнений (22)–(25) вначале рассматривается частный случай

$$\lambda = 0.$$

Тогда из уравнений (22), (23) следует, что

$$\eta_1(t) = \eta_{10}; \quad s_2(r) = s_{20},$$

где η_{10} , s_{20} произвольные постоянные.

Уравнение (24) для искомой $s_1(t)$ будет следующим

$$s_1'(t) = \mu\eta_{10},$$

с решением

$$s_1(t) = \mu\eta_{10}t + s_{10},$$

где s_{10} произвольная постоянная.

Уравнение (25) для искомой функции $\eta_2(r)$ становится таким

$$\eta_2'(r) + \frac{1}{r}\eta_2(r) = \frac{\mu s_{20}}{c}$$

с решением

$$\eta_2(r) = \eta_{20} \frac{1}{r} + \frac{\mu s_{20}}{2c} r, \quad \eta_{20} = \text{const},$$

где η_{20} — произвольная постоянная.

В итоге получаются следующие функции: $\eta(t, r)$ имеет вид

$$\eta(t, r) = \eta_{10}\eta_{20} \frac{1}{r} + \frac{\mu\eta_{10}s_{20}}{2c} r$$

и не зависит от t . И функция

$$s(t, r) = \mu\eta_{10}s_{20}t + s_{10}s_{20},$$

которая не зависит от r .

С учетом сделанного выше замечания о связи систем (17) и (16) в качестве решения системы (17) получаются следующие функции:

$$\kappa(t, r) = \kappa_{10}\kappa_{20} \frac{1}{r} + \frac{\mu\kappa_{10}w_{20}}{2c} r,$$

которая не зависит от t и функция

$$w(t, r) = w_{10}w_{20} - \mu\kappa_{10}w_{20}t,$$

которая не зависит от r . Здесь κ_{10} , κ_{20} , w_{10} , w_{20} — произвольные постоянные. Напомним, что при разделении переменных предполагалось, что μ — тоже произвольная постоянная.

Итак, в цилиндрических координатах и с соответствующими проекциями первых двух компонент векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ получено следующее частное решение системы уравнений Максвелла (1), которое удовлетворяет условиям (2):

$$\mathbf{B}(t, r, \varphi) = (\zeta, \eta, w) = \left(\frac{\zeta_{00}}{r}; \eta_{10}\eta_{20} \frac{1}{r} + \frac{\mu\eta_{10}s_{20}}{2c} r; w_{10}w_{20} - \mu\kappa_{10}w_{20}t \right), \quad (26)$$

$$\mathbf{E}(t, r, \varphi) = (\vartheta, \kappa, s) = \left(\frac{\vartheta^{oo}}{r}; \kappa_{10} \kappa_{20} \frac{1}{r} + \frac{\mu \kappa_{10} w_{20}}{2c} r; s_{10} s_{20} + \mu \eta_{10} s_{20} t \right). \quad (27)$$

Если положить

$$\zeta^{oo} = \vartheta^{oo}; \quad \eta_{10} = \kappa_{10}; \quad \eta_{20} = \kappa_{20}; \\ w_{10} = s_{10}; \quad w_{20} = s_{20};$$

то получится краткая запись выражений (26), (27)

$$\mathbf{F}_{\pm} = \left(\frac{a_1}{r}; \frac{a_2}{r} + a_3 r; a_4 \pm a_5 t \right),$$

где верхний знак относится к $\mathbf{B}$, то есть $\mathbf{F}_+ = \mathbf{B}$, нижний – к $\mathbf{E}$, то есть $\mathbf{F}_- = \mathbf{E}$. Здесь

$$a_1 = \zeta^{oo}; \quad a_2 = \eta_{10} \eta_{20}; \quad a_3 = \frac{\mu \kappa_{10} w_{20}}{2c}; \\ a_4 = s_{10} s_{20}; \quad a_5 = \mu \eta_{10} s_{20}.$$

Еще раз отметим, что первые две координаты векторов (26), (27) линейно зависят от $1/r$ и от r , но не зависят от времени. А третьи координаты этих векторов линейно зависят от времени и не зависят от r .

Далее для системы (22)–(25) рассматривается другой частный случай

$$\mu = 0.$$

Из уравнений (24), (25) следует, что

$$s_1(t) = s_{10} = \text{const}, \\ \eta_2'(r) + \frac{1}{r} \eta_2(r) = 0,$$

и поэтому

$$\eta_2(r) = \eta_{20} \frac{1}{r}, \quad \eta_{20} = \text{const}.$$

Тогда из уравнения (22) получается, что

$$\eta_1'(t) = \lambda s_{10},$$

то есть

$$\eta_1(t) = \lambda s_{10} t + \eta_{10}, \quad \eta_{10} = \text{const}.$$

В этом случае уравнение (23) становится таким

$$s_2'(r) = \frac{\lambda \eta_{20}}{c} \frac{1}{r}$$

с решением

$$s_2(r) = \frac{\lambda \eta_{20}}{c} \ln r + s_{20}.$$

В итоге в качестве решения системы (22)–(25) в случае $\mu = 0$ имеем:

$$\eta(t, r) = \eta_{20} \frac{1}{r} (\lambda s_{10} t + \eta_{10}), \\ s(t, r) = \frac{\lambda \eta_{20} s_{10}}{c} \ln r + s_{10} s_{20},$$

$$\kappa(t, r) = \kappa_{20} \frac{1}{r} (\lambda w_{10} t + \kappa_{10}),$$

$$w(t, r) = \frac{\lambda w_{10} \kappa_{20}}{c} \ln r + w_{10} w_{20}$$

И получено другое частное решение системы уравнений Максвелла

$$\mathbf{B}(t, r, \varphi) = (\zeta, \eta, w) = \left(\frac{\zeta^{oo}}{r}; \eta_{20} \frac{1}{r} (\eta_{10} + \lambda s_{10} t); \frac{\lambda w_{10} \kappa_{20}}{c} \ln r + w_{10} w_{20} \right), \quad (28)$$

$$\mathbf{E}(t, r, \varphi) = (\vartheta, \kappa, s) = \left(\frac{\vartheta^{oo}}{r}; \kappa_{20} \frac{1}{r} (\kappa_{10} - \lambda w_{10} t); \frac{\lambda \eta_{20} s_{10}}{c} \ln r + s_{10} s_{20} \right). \quad (29)$$

Если, как и выше, положить

$$\zeta^{oo} = \vartheta^{oo}; \quad \eta_{10} = \kappa_{10}; \quad \eta_{20} = \kappa_{20}; \\ w_{10} = s_{10}; \quad w_{20} = s_{20},$$

то получится краткая запись выражений (28), (29)

$$\mathbf{G}_{\pm} = \left(\frac{b_1}{r}; \frac{1}{r} [b_2 \pm b_3 t]; b_4 \ln r + b_5 \right),$$

где верхний знак относится к $\mathbf{B}$, то есть $\mathbf{G}_+ = \mathbf{B}$, нижний – к $\mathbf{E}$, то есть $\mathbf{G}_- = \mathbf{E}$. Здесь

$$b_1 = \zeta^{oo}; \quad b_2 = \eta_{20} \eta_{10}; \quad b_3 = \eta_{20} \lambda s_{10}; \\ b_4 = \frac{\lambda s_{10} \eta_{20}}{2c}; \quad b_5 = s_{10} s_{20}.$$

Также отметим, что первые и третьи координаты векторов (28), (29) линейно зависят от $1/r$ и от $\ln r$ и не зависят от времени. А вторые координаты этих векторов линейно зависят от $1/r$ и от t/r .

Теперь будет рассматриваться случай:

$$\lambda \neq 0; \quad \mu \neq 0.$$

Вначале для простоты последующего изложения положим

$$\lambda = c; \quad \mu = -c. \quad (30)$$

Уравнение (22) дает следующее соотношение: $\eta_1'(t) = c s_1(t)$, то есть $\eta_1''(t) = c s_1'(t)$. Из уравнения (24) также получается выражение для $s_1'(t)$:

$$s_1'(t) = -c \eta_1(t),$$

что приводит к дифференциальному уравнению

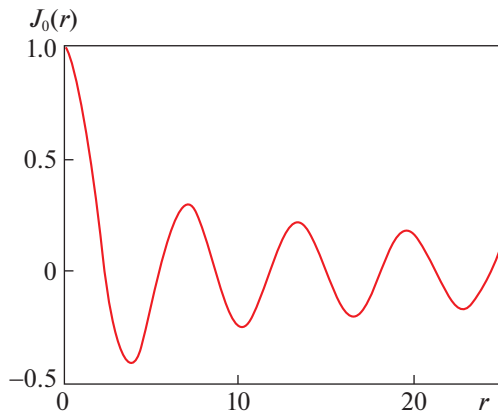
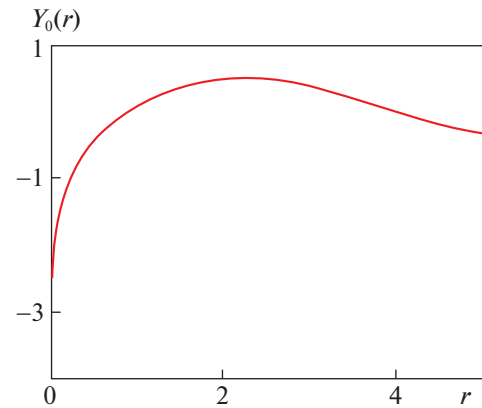
$$\eta_1''(t) + c^2 \eta_1(t) = 0$$

с общим решением

$$\eta_1(t) = C_1 \cos(ct) + C_2 \sin(ct). \quad (31)$$

И тогда из (22) следует, что

$$s_1(t) = \frac{\eta_1'(t)}{c} = -C_1 \sin(ct) + C_2 \cos(ct). \quad (32)$$


 Рис. 2. График функции Бесселя первого рода $J_0(r)$.

 Рис. 3. График функции Бесселя второго рода $Y_0(r)$.

После этого из уравнений (23), (25) получают уравнения для $s_2(r)$, $\eta_2(r)$:

$$\begin{cases} s'_2(r) = \eta_2(r), \\ \eta'_2(r) + \frac{1}{r}\eta_2(r) = -s_2(r). \end{cases}$$

После дифференцирования по r первого из этих двух уравнений

$$s''_2(r) = \eta'_2(r)$$

и последующего исключения из второго уравнения $\eta'_2(r)$ и $\eta_2(r)$ получается следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$s''_2(r) + \frac{1}{r}s'_2(r) + s_2(r) = 0,$$

которое является уравнением Бесселя [8, 9]. Общее решение этого уравнения

$$s_2(r) = D_1 J_0(r) + D_2 Y_0(r); \quad D_1, D_2 - \text{const}, \quad (33)$$

является линейной комбинацией функций $J_0(r)$ и $Y_0(r)$ – функций Бесселя первого и второго рода:

$$J_0(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \times k!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k},$$

$$Y_0(r) = \frac{2}{\pi} J_0(r) \left[\ln\left(\frac{r}{2}\right) + C \right] - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \times k!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} \left(\sum_{j=1}^k \frac{2}{j} \right),$$

где D_1, D_2 – произвольные постоянные, $C \approx 0.5772$ – постоянная Эйлера.

Приведенные степенные ряды сходятся при всех $0 \leq r < +\infty$, функция Бесселя второго рода $Y_0(r)$ при $r = 0$ имеет логарифмическую особенность.

На рис. 2, 3 приведены графики функций $J_0(r)$, $Y_0(r)$, построенные по отрезкам соответствующих рядов при $0 \leq k \leq 60$.

После этого функция $\eta_2(r)$ из уравнения (23) восстанавливается в явном виде:

$$\eta_2(r) = s'_2(r) = D_1 J'_0(r) + D_2 Y'_0(r)$$

и тогда

$$\eta(t, r) = [C_1 \cos(ct) + C_2 \sin(ct)] [D_1 J'_0(r) + D_2 Y'_0(r)], \quad (34)$$

$$s(t, r) = [-C_1 \sin(ct) + C_2 \cos(ct)] [D_1 J_0(r) + D_2 Y_0(r)]. \quad (35)$$

С учетом связи решений систем (16) и (17) получаются следующие равенства:

$$w(t, r) = [C_1 \sin(ct) + C_2 \cos(ct)] [D_1 J_0(r) + D_2 Y_0(r)], \quad (36)$$

$$\kappa(t, r) = [C_1 \cos(ct) - C_2 \sin(ct)] [D_1 J'_0(r) + D_2 Y'_0(r)]. \quad (37)$$

Таким образом найдено еще одно решение системы (1), удовлетворяющее условиям (2):

$$\mathbf{B}(t, r) = (\zeta, \eta, w); \quad \mathbf{E}(t, r) = (\vartheta, \kappa, s). \quad (38)$$

Здесь в соотношениях (38): компоненты вектора $\mathbf{B}$ задаются первым равенством из (18) и формулами (34) и (36); а компоненты вектора $\mathbf{E}$ – вторым равенством из (18) и формулами (37), (35).

Для того, чтобы построить еще одно решение системы уравнений Максвелла положим

$$\lambda = \mu = c.$$

Из уравнений (22), (24) следует

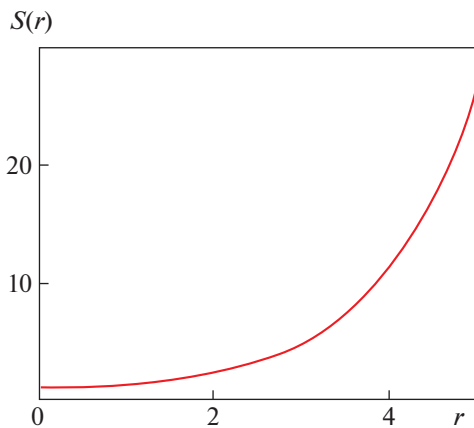
$$\eta'_1(t) = c s_1(t); \quad s'_1(t) = c \eta_1(t).$$

Отсюда после дифференцирования первого равенства по t и подстановки в полученный результат второго равенства получается следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\eta''_1(t) = c^2 \eta_1(t)$$

с общим решением

$$\eta_1(t) = F_1 e^{ct} + F_2 e^{-ct}; \quad F_1, F_2 - \text{const}. \quad (39)$$

Рис. 4. График функции $S(r)$.

Тогда

$$s_1(t) = F_1 e^{ct} - F_2 e^{-ct}. \quad (40)$$

Далее рассматриваются уравнения (23), (25). Из уравнения (23) следует, что

$$\eta_2(r) = s_2'(r); \quad \eta_2'(r) = s_2''(r).$$

Тогда из уравнения (25) следует, что

$$s_2''(r) + \frac{1}{r} s_2(r) = s_2(r),$$

то есть

$$r s_2''(r) + s_2'(r) - r s_2(r) = 0. \quad (41)$$

Ненулевое без особенности решение уравнения (41) можно построить в виде сходящегося ряда по степеням r с произволом в одну произвольную постоянную

$$s_2(r)|_{r=0} = s_2^{oo} \neq 0. \quad (42)$$

Если в уравнении (41) положить $r = 0$, то получится соотношение

$$s_2'(0) = 0,$$

которое однозначно определяет значение второй производной искомой функции в нуле.

Если уравнение (41) про дифференцировать по r

$$s_2''(r) + r s_2'''(r) + s_2''(r) - s_2(r) - r s_2'(r) = 0,$$

а потом положить $r = 0$, то получится равенство

$$2_s''(0) = s_2(0),$$

то есть значение в нуле второй производной искомой функции следующее

$$s_2''(0) = \frac{1}{2} s_2^{oo}.$$

Если уравнение (41) продифференцировать k раз по r

$$k s_2^{(k+1)}(r) + s_2^{(k+1)}(r) - k s_2^{(k-1)}(r) = 0$$

и положить в полученном соотношении $r = 0$, то получается рекуррентное соотношение для определения значений в нуле производных функции $s_2(r)$:

$$s_2^{(k+1)}(0) = \frac{k}{k+1} s_2^{(k-1)}(0). \quad (43)$$

Индукцией по k доказывается, что все значения в нуле производных нечетного порядка равны нулю

$$s_2^{(2k-1)}(0) = 0,$$

а значения в нуле производных четного порядка задаются формулой

$$s_2^{(2k)}(0) = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} s_2^{oo}.$$

Здесь использованы традиционные обозначения

$$(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-3) \cdot (2k-1);$$

$$(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k-2) \cdot (2k).$$

В результате построенное в виде степенного ряда решение задачи (41), (42) имеет следующий вид

$$S(r) = \sum_{n=0}^{\infty} s_2^{(n)}(0) \frac{r^n}{n!} = s_2^{oo} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{r^{2k}}{(2k)!} \right], \quad (44)$$

где введено обозначение $S(r) = s_2(r)$ и ряд (44) сходится при всех значениях r . В последней формуле также использовано традиционное обозначение

$$(2k)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot (2k).$$

На рис. 4 приведен график этой функции $S(r)$, построенный по начальному отрезку ряда (44).

Все остальные решения уравнения (41) имеют особенность при $r \rightarrow +0$. Для иллюстрации этого суждения далее численно построены функции $S(r)$, $s_{22}(r)$, $s_{23}(r)$ – решения трех начальных задач для уравнения (41). Для всех трех этих функций взяты одинаковые начальные значения при $r = 1$

$$S(1) = s_{22}(1) = s_{23}(1) = 1.2660658095,$$

а значения производных при $r = 1$ брались разными

$$S'(1) = 0.5651584201, \quad s_{22}'(1) = 0.5, \quad s_{23}'(1) = 0.6.$$

На рис. 5 цифрами 1, 2, 3 помечены графики функций $S(r)$, $s_{22}(r)$ и $s_{23}(r)$ – численно построенных решений при соответствующих значениях

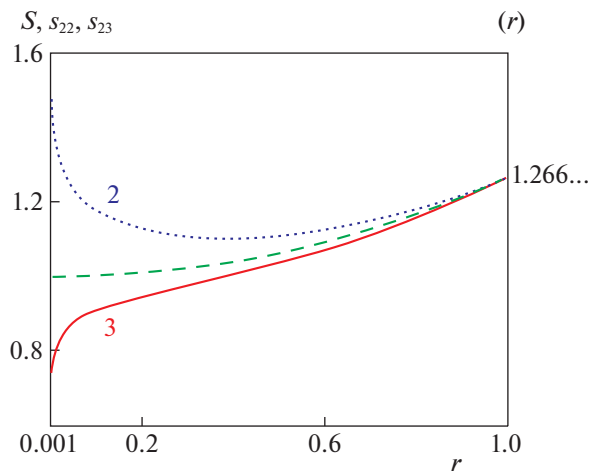


Рис. 5. Интегральные кривые уравнения (41).

производных в точке $r = 1$. При этом первое решение совпало с решением, заданным формулой (44) вплоть до точки $r = 1$: в ней численно построенное решение имеет нужное значение, равное единице. Интегральные кривые при двух других значениях $s'_{22}(1)$, $s'_{23}(1)$ строились при $0.001 \leq r \leq 1$ и при приближении к точке $r = 0$ первая быстро возрастала, вторая – быстро убывала. На данный момент аналитически описать эти особенности при $r \rightarrow +0$ не удалось.

С ростом r после значения $r = 1$ функции $s_{22}(r)$ и $s_{23}(r)$ монотонно и достаточно быстро возрастают, подобно функции $S(r)$, график которой приведен на рис. 4.

Окончательно, в качестве функции $s_2(r)$ можно брать, например, линейную комбинацию функций $S(r)$, $s_{22}(r)$:

$$s_2(r) = K_1 S(r) + K_2 s_{22}(r); \quad K_1, K_2 - \text{const.}$$

Следовательно,

$$s(t, r) = (F_1 e^{ct} + F_2 e^{-ct}) [K_1 S(r) + K_2 s_{22}(r)]. \quad (45)$$

После этого из уравнения (23) однозначно определится функция $\eta_2(r)$ и, следовательно, функция $\eta(t, r)$

$$\eta(t, r) = (F_1 e^{ct} + F_2 e^{-ct}) [K_1 S'(r) + K_2 s'_{22}(r)]. \quad (46)$$

Затем с учетом связи систем (16) и (17) определятся функции $\kappa(t, r)$, $w(t, r)$:

$$\kappa(t, r) = (F_1 e^{-ct} + F_2 e^{ct}) [K_1 S'(r) + K_2 s'_{22}(r)]. \quad (47)$$

$$w(t, r) = (F_1 e^{-ct} + F_2 e^{ct}) [K_1 S(r) + K_2 s_{22}(r)]. \quad (48)$$

Таким образом найдено еще одно цилиндрически симметричное частное решение системы уравнений Максвелла

$$\mathbf{B}(t, r) = (\zeta, \eta, w); \quad \mathbf{E}(t, r) = (\vartheta, \kappa, s). \quad (49)$$

Здесь в равенствах (49): компоненты вектора $\mathbf{B}$ задаются первым равенством из (18) и формулами (46), (48). А компоненты вектора $\mathbf{E}$ – вторым равенством из (18) и формулами (47), (45).

6. ВЫВОДЫ

Замечание 1. При выборе конкретных значений констант λ , μ в качестве сомножителей можно вводить целые положительные константы n , m и тогда решения систем (16), (17) можно строить в виде рядов по n и по m . Особенности в коэффициентах этих рядов будут такие же, как и в построенных частных решениях.

Замечание 2. Можно не связывать выбор значений констант λ и μ со значением константы c . Естественно, решения систем (16), (17) тогда тоже будут строиться. Однако, физическая интерпретация таких решений потребует более громоздких рассуждений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1960. 400 с.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
3. Тамм И.Е. Основы теории электричества. Москва: Наука, 1976. 616 с.
4. Парселл Э. Электричество и магнетизм. Москва: Наука, 1975. 440 с.
5. Сидоров А.Ф., Шанеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984. 272 с.
6. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.
7. Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. М.: изд-во "Советское радио", 1971. 665 с.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.
9. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

Some Axisymmetric Solutions of the System of Maxwell's Equations

S. P. Bautin^{a,#} and A. G. Obukhov^{b,##}

^a *Snezhinsk Institute of Physics and Technology, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Snezhinsk, Chelyabinsk oblast, 456776 Russia*

^b *Tyumen Industrial University, Tyumen, 625000 Russia*

[#]*e-mail: spbautin@mail.ru*

^{##}*e-mail: agobukhov@inbox.ru*

Received July 26, 2022; revised July 27, 2022; accepted August 9, 2022

Abstract—The system of Maxwell's equations is considered after the transition from the Cartesian to cylindrical coordinate system. Instead of the first two traditional components of magnetic and electric field strength, radial and circumferential components of these vectors are introduced. The resulting system of partial differential equations does not explicitly include the dependence on the polar angle. In the case where the desired functions depend only on time and the radial coordinates, specific solutions of the system of Maxwell's equations are constructed using the separation of variables.

Keywords: system of Maxwell's equations, axisymmetric solutions, separation of variables

DOI: 10.56304/S2304487X2202002X

REFERENCE

1. Landau L.D., Lifschits E.M. *Teoreticheskaja fizika. Tom 2. Teorija polja* [Theoretical physics. Volume 2. Field Theory]. Moscow, gos. izd-vo fiz.-mat. Literatury Publ., 1960. 400 p. (in Russian)
2. Kurant R. *Uravnenija s chastnymi proizvodnymi* [Partial differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1964, 830 p.
3. Tamm I.E. *Osnovy teorii elektrichestva* [Fundamentals of the theory of electricity]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 616 p.
4. Parsell E. *Elektrichestvo i magnetizm* [Electricity and magnetism]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 440 p.
5. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Janenko N.N. *Metod differentsialnyh svyazei i ego prilozhenija v gazovoi dinamike* [Differential coupling method and its applications in gas dynamics]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1984. 272 p.
6. Bautin S.P. *Charakteristicheskaja zadaca Koshy i ee prilozhenija v gazovoi dinamike* [The characteristic Cauchy problem and its applications in gas dynamics]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2009. 368 p.
7. Goldshtein L.D., Zernov N.V. *Elektromagnitnye polja i volny* [Electromagnetic fields and wave]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1971, 665 p.
8. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlja nauchnyh rabotnikov i inzhenerov* [Handbook of Mathematics for researchers and engineers]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 720 p.
9. Zaitsev V.F., Polyanin A.D. *Spravochnik po obyknennym differentsialnym uravnenijam* [Handbook of ordinary differential equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 576 p.