

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2022 г. Н. А. Кудряшов^{1,*}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия

*e-mail: nakudryashov@mephi.ru

Поступила в редакцию 18.06.2020 г.

После доработки 19.06.2022 г.

Принята к публикации 28.06.2022 г.

Рассматривается один из классов нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Предлагается алгоритм построения первых интегралов рассматриваемого класса уравнений. Для поиска аналитических решений уравнений данного класса, как правило, используются специальные подходы типа метода простейших уравнений. Предлагаемый алгоритм позволяет в ряде случаев находить общие решения нелинейных дифференциальных уравнений. Применение алгоритма иллюстрируется на примере комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау, решение которого ищется используя переменные бегущей волны. Показано, что нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка достаточно сложного вида, с помощью предлагаемого алгоритма можно свести к дифференциальному уравнению первого порядка, решение которого в общем виде можно представить в виде квадратуры. При нулевых значениях постоянных интегрирования, точные решения уравнения Гинзбурга–Ландау получены в виде аналитических выражений. Представлены точные решения уравнения Гинзбурга–Ландау в виде периодических и уединенных волн, которые выражаются через эллиптические и гиперболические функции.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, первый интеграл, общее решение, уравнение Гинзбурга–Ландау, аналитическое решение

DOI: 10.56304/S2304487X22020080

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается класс обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений в виде

$$Auy_{zz} + By_z^2 = F(y), \quad (1)$$

где зависимость $F(y)$ является полиномом от y .

Этот тип нелинейных дифференциальных уравнений часто встречается при исследовании нелинейных уравнений математической физики, если использовать переменные бегущей волны.

В частности, если искать решения обобщенного уравнения Гинзбурга–Ландау

$$iq_t + \delta q_{xx} + a|q|^{4n}q + b|q|^{-2n}q + c|q|^{2n}q + d|q|^{4n}q + \gamma q + \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] = 0, \quad (2)$$

где $q(x, t)$ – комплексная функция от x и t , n – действительное число, $a, b, c, d, \alpha, \beta, \delta$ и γ – параметры математической модели.

Уравнение Гинзбурга–Ландау – одно из популярных дифференциальных уравнений теоретической физики. Это объясняется тем, что это уравнение встречается при описании ряда физических процессов в нелинейной оптике, физике жидкостей, теории сверхпроводимости и физике плазмы [1–17].

Можно заметить, что уравнение (1) при $a = b = d = 0$ и $n = 1$ является хорошо известным уравнением Гинзбурга–Ландау. В случае $\alpha = \beta = \gamma = 0$ уравнение (1) изучалось в ряде других работ [18–25]. Таким образом, уравнение (1) – обобщение двух хорошо известных нелинейных дифференциальных уравнений.

Полагая в (2)

$$q(x, t) = y(z)e^{i(\psi(z) - \omega t)}, \quad z = x - C_0 t, \quad (3)$$

получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(\delta - 2\alpha)y_{zz} + (4\beta - 2\alpha)\frac{y_z^2}{y} - \frac{C_1^2}{\delta y^3} + \left(\omega + \gamma + \frac{C_0^2}{4\delta}\right)y + ay^{1-4n} + by^{1-2n} + cy^{1+2n} + dy^{1+4n} = 0. \quad (4)$$

В данной работе показано, что нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение (4) имеет точные решения в виде периодических и уединенных волн без каких-либо ограничений на параметры математической модели.

2. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ УРАВНЕНИЯ (1)

Заметим, что умножив все члены уравнения на $my(z)^{m-2}$, где

$$m = \frac{B + A}{A}, \quad (5)$$

уравнение (1) можно записать в виде

$$A \frac{d^2}{dz^2}(y^m) = mF(y)y^{m-2}. \quad (6)$$

Справедливость формулы (6) проверяется непосредственно вычислением производной в левой части уравнения.

Умножая обе части уравнения (6) на выражение $\frac{d}{dz}(y^m)$, уравнение (6) после интегрирования, можно записать в виде

$$A \left[\frac{d}{dz}(y^m) \right]^2 = 2m^2 \int F(y)y^{2m-3} dy + C_1, \quad (7)$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Левую часть уравнения (7) можно записать в виде

$$A \left[\frac{d}{dz}(y^m) \right]^2 = m^2 A y^{2m-2} y_z^2. \quad (8)$$

С учетом (8) уравнение (7) можно записать так

$$A y^{2m-2} y_z^2 = 2 \int F(y)y^{2m-2} dy + C_1. \quad (9)$$

Окончательно уравнение (9) можно записать в виде

$$y_z^2 = \frac{2}{A} y^{2-2m} \int F(y)y^{2m-3} dy + \frac{C_1}{A} y^{2-2m}. \quad (10)$$

Принимая во внимание, что $F(y)$ является полиномом от y , интеграл в правой части (7) вычисляется и уравнение (10) является первым интегралом исходного уравнения (1).

3. ПЕРВЫЙ ИНТЕГРАЛ УРАВНЕНИЯ (4)

Продemonстрируем применение метода, который представлен выше, для поиска первых интегралов нелинейного дифференциального уравне-

ния (4). Умножая все члены уравнения (4) на действительную функцию $y(z)^{m-1}$, где m имеет вид

$$m = \frac{\delta + 4\beta - 4\alpha}{\delta - 2\alpha}, \quad (11)$$

уравнение (4) можно представить в виде

$$\frac{(\delta - 2\alpha)}{m} \frac{d^2 y^m}{dz^2} - \frac{C_1^2}{\delta} y^{m-4} + \left(\gamma + \omega + \frac{C_0^2}{4\delta}\right) y^m + ay^{m-4n} + by^{m-2n} + cy^{m+2n} + dy^{m+4n} = 0. \quad (12)$$

Первый интеграл уравнения (12) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{(\delta - 2\alpha)m}{2} y^{2m-2} y_z^2 - \frac{C_1^2 m}{\delta(2m-4)} y^{2m-4} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\gamma + \omega + \frac{C_0^2}{4\delta} \right) y^{2m} + \frac{am}{2m-4n} y^{2m-4n} + \\ & + \frac{bm}{2m-2n} y^{2m-2n} + \frac{cm}{2m+2n} y^{2m+2n} + \\ & + \frac{dm}{2m+4n} y^{2m+4n} = C_2, \end{aligned} \quad (13)$$

где C_2 — постоянная интегрирования.

Окончательно уравнение (13) может быть представлено как нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\begin{aligned} & (\delta - 2\alpha)y_z^2 - \frac{C_1^2}{\delta(m-2)} y^{-2} + \left(\frac{\gamma}{m} + \frac{\omega}{m} + \frac{C_0^2}{4\delta m} \right) y^2 + \\ & + \frac{a}{m-2n} y^{2-4n} + \frac{b}{m-n} y^{2-2n} + \frac{c}{m+n} y^{2+2n} + \\ & + \frac{d}{m+2n} y^{2+4n} = C_2 y^{2-2m} \end{aligned} \quad (14)$$

при выполнении следующего условия

$$m(m-1)(m-2)(m-2n) \times (m-n)(m+n)(m+2n) \neq 0. \quad (15)$$

Поэтому проблема нахождения точных решений нелинейного дифференциального уравнения (1) сводится к решению уравнения (14).

Запишем уравнение (14) в виде

$$\begin{aligned} & y_z^2 - Ky^{-2} + Ay^{2-4n} - My^2 + By^{2-2n} + \\ & + Ey^{2+2n} + Gy^{2+4n} = \frac{C_2}{(\delta - 2\alpha)} y^{2-2m}, \end{aligned} \quad (16)$$

где параметры K, A, B, E, G, M определяются по формулам

$$\begin{aligned}
K &= \frac{C_1^2}{\delta(m-2)(\delta-2\alpha)}, \quad G = \frac{d}{(m+2n)(\delta-2\alpha)}, \\
A &= \frac{a}{(m-2n)(\delta-2\alpha)}, \\
M &= \frac{1}{(2\alpha-\delta) \left(\frac{C_0^2}{4\delta m} + \frac{\omega}{m} + \frac{\gamma}{m} \right)}, \\
B &= \frac{b}{(m-n)(\delta-2\alpha)}, \quad E = \frac{c}{(m+n)(\delta-2\alpha)}.
\end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, уравнение (16) может быть использовано для нахождения точных решений уравнения Гинзбурга–Ландау при учете переменных бегущей волны.

Заметим, что уравнение (14) может быть записано в виде интеграла

$$z - z_0 = \int \frac{dy}{\sqrt{F(y)}}, \quad (18)$$

где z_0 — произвольная постоянная и $F(y)$ — функция от y в виде

$$\begin{aligned}
F[y] &= \frac{C_2}{(\delta-2\alpha)} y^{2-2m} - G y^{2+4n} + K y^{-2} - \\
&- A y^{2-4n} + M y^2 - B y^{2-2n} - E y^{2+2n}.
\end{aligned} \quad (19)$$

Интеграл (18) в общем случае не вычисляется. Однако, решение уравнения (14) может быть получено при $C_1 = 0$ для различных значений параметров уравнения (2).

4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (2), ВЫРАЖЕННЫЕ ЧЕРЕЗ ЭЛЛИПТИЧЕСКУЮ ФУНКЦИЮ ЯКОБИ

Используя первый интеграл уравнения (2) найдем периодические и уединенные волны уравнения (14) при $C_1 = 0$. Можно указать несколько случаев, когда уравнение (14) может быть преобразовано к виду, имеющему решение, выраженное через эллиптическую функцию Якоби. В первом случае при $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$ уравнение (16) запишется в виде [18]

$$y_z^2 + A y^{2-4n} - M y^2 + B y^{2-2n} + E y^{2+2n} + G y^{2+4n} = 0. \quad (20)$$

Используя в уравнении (20) новую переменную [26]

$$y(z) = V(z)^{\frac{1}{2n}}, \quad (21)$$

имеем уравнение в виде

$$\frac{1}{4n^2} V_z^2 + A + BV - MV^2 + EV^3 + GV^4 = 0. \quad (22)$$

Общее решение уравнения (22) выражается через эллиптическую функцию. Например ис-

пользуя эллиптический синус, получаем решение [27–29]

$$V(z) = V_1 + \frac{(V_2 - V_1)P}{Y(z)^2 + P}, \quad P = \frac{V_1 - V_3}{V_3 - V_2}, \quad (23)$$

где V_1, V_2, V_3 и V_4 являются действительными корнями следующего алгебраического уравнения

$$A + BV - MV^2 + EV^3 + GV^4 = 0. \quad (24)$$

Функция $Y(z)$ выражается через эллиптический синус

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \sin\{2n\sqrt{G(V_4 - V_2)(V_1 - V_3)}(z - z_2); S\}, \\
S^2 &= \frac{(V_1 - V_4)(V_1 - V_3)}{(V_4 - V_2)(V_3 - V_2)},
\end{aligned} \quad (25)$$

где z_1 — постоянная интегрирования.

Решение (23) является периодической волной описываемой уравнением (16) при $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$.

Принимая во внимание решения (3), (21) и (23), получаем решение уравнения (2) в виде

$$\begin{aligned}
q(x, t) &= \left[V_1 + \frac{(V_2 - V_1)(V_1 - V_3)}{(V_3 - V_2)Y^2(x - C_0 t) + V_1 - V_3} \right]^{\frac{1}{2n}} \times \\
&\times e^{i\left\{ \frac{C_0}{2\delta}(x - C_0 t - z_1) - \omega t \right\}},
\end{aligned} \quad (26)$$

где V_1, V_2, V_3, V_4 — корни уравнения (24), z_2 — произвольная постоянная и $Y(x - C_0 t)$ определяется выражением (25).

5. УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ УРАВНЕНИЯ (2)

В случае $V_3 = V_4$ имеем $S = 1$, эллиптический синус вырождается в гиперболический тангенс. При этом решение уравнения (22) имеем в виде [27–29]

$$V(z) = \frac{V_2(V_1 - V_3) + V_1(V_3 - V_2)T(z)^2}{V_1 - V_3 + (V_3 - V_2)T(z)^2}, \quad (27)$$

где $T(z)$ определяется формулой

$$T(z) = \tanh\{2n\sqrt{G(V_3 - V_2)(V_1 - V_3)}(z - z_2)\}. \quad (28)$$

Оптический солитон уравнения (2) может быть записан в виде

$$\begin{aligned}
q(x, t) &= \left[V_1 + \frac{(V_2 - V_1)(V_1 - V_3)}{(V_3 - V_2)T^2(x - C_0 t) + V_1 - V_3} \right]^{\frac{1}{2n}} \times \\
&\times e^{i\left\{ \frac{C_0}{2\delta}(x - C_0 t - z_1) - \omega t \right\}},
\end{aligned} \quad (29)$$

где z_2 — произвольная постоянная.

Решение (29) соответствует светлomu и темному оптическим солитонам уравнения (2).

Полагая $a = 0$ в уравнение (2), получаем уравнение Гинзбурга–Ландау с антикубическим показателем преломления

$$iq_t + \delta q_{xx} + b|q|^{-2n}q + c|q|^{2n}q + d|q|^{4n}q + \gamma q + \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] = 0. \quad (30)$$

В этом случае имеем $A = 0$. Один из корней уравнения (24) равен нулю и решение уравнения (30) выражается формулами (26) и (29).

6. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (2) ПРИ $a = 0$ И $b = 0$

Полагая $a = 0$ и $b = 0$ в уравнении (2), имеем $A = B = 0$. Уравнение Гинзбурга–Ландау (1) в этом случае принимает вид

$$iq_t + \delta q_{xx} + c|q|^{2n}q + d|q|^{4n}q + \gamma q + \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] = 0. \quad (31)$$

Нелинейное уравнение (22) в этом случае запишется в виде

$$\frac{1}{4n^2} V_z^2 - MV^2 + EV^3 + GV^4 = 0. \quad (32)$$

Решение уравнения (32) в этом случае имеет вид оптических солитонов в виде [30–36]

$$V(z) = \frac{4Me^{-2n\sqrt{M}(z-z_3)}}{E^2 + 4GM + 2Ee^{-2n\sqrt{M}(z-z_3)} + e^{-4n\sqrt{M}(z-z_3)}}, \quad (33)$$

где z_3 — произвольная постоянная.

Принимая во внимание решения (33), (21) и (3), получаем выражение для оптического солитона уравнения (31) в виде

$$q(x, t) = \left[\frac{4Me^{-2n\sqrt{M}(x-C_0t-z_3)}}{E^2 + 4GM + 2Ee^{-2n\sqrt{M}(x-C_0t-z_3)} + e^{-4n\sqrt{M}(x-C_0t-z_3)}} \right]^{\frac{1}{2n}} e^{i\left\{\frac{C_0}{2\delta}(x-C_0t-z_3) - \omega t\right\}}. \quad (34)$$

При $a = 0$, $b = 0$, $\omega = -\gamma - \frac{C_0^2}{4\delta}$ уравнение (2) совпадает с уравнением (31). В случае $A = 0$, $B = 0$, $M = 0$, уравнение (32) может быть записано как следующее

$$\frac{1}{4n^2} V_z^2 + EV^3 + GV^4 = 0. \quad (35)$$

Решение уравнения (35) в виде уединенной волны принимает вид

$$V(z) = \frac{E}{G + En^2(z - z_4)^2}. \quad (36)$$

В этом случае оптический солитон описываемый уравнением (31) запишется в виде

$$q(x, t) = \left[\frac{E}{G + En^2(x - C_0t - z_4)^2} \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i\left\{\frac{C_0}{2\delta}(x-C_0t-z_4) - \omega t\right\}}, \quad (37)$$

где z_4 — произвольная постоянная.

7. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (2) ПРИ $a = 0$, $b = 0$ И $c = 0$

В случае $a = 0$, $b = 0$ и $c = 0$, получаем хорошо известное уравнение Гинзбурга–Ландау в виде

$$iq_t + \delta q_{xx} + d|q|^{4n}q + \gamma q + \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] = 0. \quad (38)$$

Точные решения этого уравнения были получены в целом ряде работ [8–17]) при некоторых ограничениях на значения параметров математической модели (31).

Полагая $a = 0$, $b = 0$ и $c = 0$ в уравнении (38), получаем $A = 0$, $B = 0$, $E = 0$ в уравнении (16)

$$y_z^2 - Ky^{-2} - My^2 + Gy^{2+4n} - \frac{C_2}{(\delta - 2\alpha)} y^{2-2m} = 0, \quad (39)$$

используя новую переменную

$$y = V(z)^{\frac{1}{2n}}, \quad (40)$$

получаем $K = 0$ и $C_1 = 0$ в (39). Уравнение принимает вид

$$\frac{1}{4n^2} V_z^2 - MV^2 + GV^4 - \frac{C_2}{\delta - 2\alpha} V^{\frac{m}{n}} = 0. \quad (41)$$

При $C_2 = 0$, имеем уединенную волну уравнения (41) в виде

$$V(z) = \frac{4M^2 e^{2n\sqrt{M}(z-z_5)}}{1 + 4GM e^{4n\sqrt{M}(z-z_5)}} \quad (42)$$

Решение $q(x, t)$ уравнения (38) в этом случае можно записать в следующем виде

$$q(x, t) = \left[\frac{4M^2 e^{2n\sqrt{M}(x-C_0t-z_5)}}{1 + 4GMe^{4n\sqrt{M}(x-C_0t-z_5)}} \right]^{\frac{1}{2n}} e^{i \left\{ \frac{C_0}{2\delta} (x-C_0t-z_1) - \omega t \right\}}, \quad (43)$$

где z_5 является, как обычно произвольной постоянной.

Точные решения уравнения (38) находятся также при $m = -n$ и $m = -2n$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы рассмотрели применение метода построения первых интегралов на примере обобщенного уравнения Гинзбурга–Ландау, имеющего четыре степени нелинейности. Основной целью статьи было представить метод построения первых интегралов нелинейных дифференциальных уравнений определенного типа. Уравнение в частных производных Гинзбурга–Ландау не имеет пары Лакса и задача Коши для него не решается методом обратной задачи рассеяния. Поэтому точные решения уравнения получены используя переменные бегущей волны. Найдены периодические и уединенные волновые решения обобщенного уравнения Гинзбурга–Ландау.

БЛАГОДАРНОСТИ

Эта работа поддержана Российским научным фондом (проект номер 22-11-00141, тема “Разработка аналитических и численных методов для моделирования волн в диспергирующих волноводах”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Malomed B.A.* New findings for the old problem: Exact solutions for domainwalls in coupled real Ginzburg–Landau equations // *Physics Letters A*, 2022. V. 442. 127802.
2. *Ekici M.* Stationary optical solitons with complex Ginzburg–Landau equation having nonlinear chromatic dispersion and Kudryashov’s refractive index structures // *Physics Letters A*, 2020. V. 440. 128146.
3. *Kudryashov N.A.* First integrals and general solution of the complex Ginzburg–Landau equation // *Applied mathematics and computation*, 2020. V. 386. 125407.
4. *Biswas A., Kara A.H., Sun Y., Zhou Q., Yildirim Y., Alshehri H.M., Belic M.R.* Conservation laws for pure-cubic optical solitons with complex Ginzburg–Landau equation having several refractiveindex structures // *Results in Physics*, 2021. V. 31. 104901.
5. *Kai Y., Yin Z.* Asymptotic analysis to domain walls between traveling wave modeled by real coupled Ginzburg–Landau equations // *Chaos, Solitons and Fractals*, 2021. V. 152. 111266.
6. *Malomed B.A.* Past and Present Trends in the Development of the Pattern-Formation Theory: Domain Walls and Quasicrystals // *Physics*, 2021. V. 3. P. 1014–1045.
7. *Zayed E.M.E., Gepreel K.A., El-Horbaty M., Biswas A., Yildirim Y. and Alshehri H.M.* Highly dispersive optical solitons with complex Ginzburg–Landau equation having six nonlinear forms, *Mathematics*, 2021. V. 9 (24). P. 3270.
8. *Biswas A., Berkemeyer T., Khan S., Moraru L., Yildirim Y., Alshehri H.M.* Highly Dispersive Optical Soliton Perturbation, with Maximum Intensity, for the Complex Ginzburg–Landau Equation by Semi-Inverse Variation // *Mathematics*, 2022. V. 10 (6). P. 987.
9. *Biswas A., Yildirim Y., Ekici M., Guggilla P., Khan S., Gonzalez-Gaxiola O., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Cubic-quartic optical soliton perturbation with complex Ginzburg–Landau equation // *Journal of Applied Science and Engineering (Taiwan)*, 2021. V. 24 (6). P. 937–1004.
10. *Zayed E.M.E., Alngar M.E.M., El-Horbaty M., Biswas A., Alshomrani A.S., Ekici M., Yildirim Y., Belic M.R.* Optical solitons with complex Ginzburg–Landau equation having a plethora of nonlinear forms with a couple of improved integration norms // *Optik*, 2020. V. 207. P. 163804.
11. *Samir Islam, Badra Niveen, Ahmed Hamdy M., Arnous Ahmed H.* Solitons in birefringent fibers for CGL equation with Hamiltonian perturbations and Kerr law nonlinearity using modified extended direct algebraic method // *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2021. V. 102. 105945.
12. *Das A., Biswas A., Ekici M., Zhou Q., Alshomrani A.S., Belic M.R.* Optical solitons with complex Ginzburg–Landau equation for two nonlinear forms using F-expansion, *Chinese Journal of Physics*, 2019. V. 61. P. 255–261.
13. *Shi Y., Dai Z., Li D.* Application of Exp-function method for 2D cubic–quintic Ginzburg–Landau equation, *Applied Mathematics and Computation*, 2009. V. 210. P. 269–275.
14. *Li W., Ma G., Yu W., Zhang Y., Liu M., Yang C., Liu W.* Soliton structures in the (1+1)-dimensional Ginzburg–Landau equation with a parity-time-symmetric potential in ultrafast optics. *Chinese Physics B*, 2018. V. 27. 030504.
15. *Zayed E.M.E., Alurfi K.A.E.* New extended auxiliary equation method and its applications to nonlinear Schrodinger-type equations // *Optik*, 2016. V. 127. P. 9131–9151.
16. *Abdou M.A., Soliman A.A., Biswas A., Ekici M., Zhou Q., Moshokoa S.P.* Dark-singular combo optical solitons with fractional complex Ginzburg–Landau equation // *Optik*, 2018. V. 171. P. 463–467.
17. *Biswas A.* Chirp-free bright optical solitons and conservation laws for complex Ginzburg–Landau equation with three nonlinear forms // *Optik*, 2018. V. 174. P. 207–215.
18. *Kudryashov N.A.* A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber // *Optik*, 2019. V. 189. P. 42–52.

19. Arnous A.H., Biswas A., Ekici M., Alzahrani A.K., Belic M.R. Optical solitons and conservation laws of Kudryashov's equation with improved modified extended tanh-function, *Optik*, 2021. V. 225. P. 165406.
20. Zayed E.M.E., Alngar M.E.M. Optical soliton solutions for the generalized Kudryashov equation of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities by three integration algorithms // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2021. V. 44 (1). P. 315–324.
21. Biswas A., Asma M., Guggilla P., Mullick L., Moraru L., Ekici M., Alzahrani A.K., Belic M.R. Optical soliton perturbation with Kudryashov's equation by semi-inverse variational principle // *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2020. V. 384. Is. 33. P. 126830.
22. Biswas A., Sonmezoglu A., Ekici M., Alzahrani A.K., Belic M.R. Cubic-Quartic Optical Solitons with Differential Group Delay for Kudryashov's Model by Extended Trial Function // *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2020. V. 65. Is. 12. P. 1384–1398.
23. Ekici M. Kinky breathers, W-shaped and multi-peak soliton interactions for Kudryashov's quintuple power-law coupled with dual form of non-local refractive index structure // *Chaos, Solitons and Fractals*, 2022. V. 159. P. 112172.
24. Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A. Stationary optical solitons with Kudryashov's quintuple power-law of refractive index having nonlinear chromatic dispersion // *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2022. V. 426. P. 127885.
25. Ekici M. Optical solitons with Kudryashov's quintuple power law coupled with dual form of non-local law of refractive index with extended Jacobi's elliptic function // *Optical and Quantum Electronics*, 2022. V. 54. P. 279.
26. Kudryashov N.A. The generalized Duffing oscillator. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021. V. 93. P. 105526.
27. Kudryashov N.A. Exact solutions of the equation for surface waves in a convecting fluid, *Applied Mathematics and Computation*, 2019. V. 344–345. P. 97–106.
28. Kudryashov N.A. Solitary wave solutions of hierarchy with non-local nonlinearity // *Applied Mathematics Letters*, 2020. V. 103. P. 106155.
29. Kudryashov N.A. Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrödinger equations, *Applied Mathematics and Computation*, 2020. V. 371. P. 124972.
30. Kudryashov N.A. Implicit Solitary Waves for One of the Generalized Nonlinear Schrödinger Equations. *Mathematics*, 2021. V. 9. Is. 23. P. 3024.
31. Kudryashov N.A. Method for finding optical solitons of generalized nonlinear Schrödinger equations, *Optik*, 2022. V. 261. P. 169163.
32. Alotaibi H. Traveling wave solutions to the nonlinear evolution equation using expansion method and addendum to Kudryashov's method // *Symmetry*, 2021. V. 13. Is. 11. P. 2126.
33. Kaplan M., Akbulut A. The analysis of the soliton-type solutions of conformable equations by using generalized Kudryashov method // *Optical and Quantum Electronics*, 2021. V. 53. Is. 9. P. 498.
34. Kudryashov N.A. Stationary solitons of the generalized nonlinear Schrödinger equation with nonlinear dispersion and arbitrary refractive index // *Applied Mathematics Letters*, 2022. V. 128. 107888.
35. Rahman Z., Ali M.Z., Roshid H.-O. Closed form soliton solutions of three nonlinear fractional models through proposed improved Kudryashov method // *Chinese Physics B*, 2021. V. 30. Is. 5. 050202.
36. Kaewta S., Sirisubtawee S., Sunghul S. Application of the exp-function and generalized Kudryashov method for obtaining new exact solutions of certain nonlinear conformable time partial integro-differential equations // *Computation*, 2021. V. 9. Is. 5. P. 5.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2022, vol. 11, no. 2, pp. 109–116

Algorithm for Constructing the First Integrals for One Class of Nonlinear Differential Equations of the Second Order

N. A. Kudryashov^{a, #}

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: nakudryashov@mephi.ru

Received June 18, 2022; revised June 19, 2022; accepted June 28, 2022

Abstract—An algorithm for constructing the first integrals of one class of nonlinear ordinary differential equations of the second order is proposed. Special approaches such as the simplest equation method are usually used to find analytical solutions of these equations. The proposed algorithm makes it possible to find general solutions of nonlinear differential equations in some cases. The algorithm is illustrated in application to the complex Ginzburg–Landau equation. The solution of this equation is sought using traveling wave variables. It is shown that the proposed algorithm allows one to reduce a rather complex nonlinear ordinary differential equation of the second order to a first order differential equation, the general solution of which can

be represented as a quadrature. With some restrictions on the arbitrary constants, the solution of the Ginzburg–Landau equation can be presented in the form of an analytical expression.

Keywords: nonlinear differential equation, first integral, general solution, Ginzburg–Landau equation, analytical solution

DOI: 10.56304/S2304487X22020080

REFERENCES

1. Malomed B.A. New findings for the old problem: Exact solutions for domainwalls in coupled real Ginzburg–Landau equations, *Physics Letters A*, 2022, vol. 442, 127802.
2. Ekici M. Stationary optical solitons with complex Ginzburg–Landau equation having nonlinear chromatic dispersion and Kudryashov’s refractive index structures. *Physics Letters A*, 2020, vol. 440, 128146.
3. Kudryashov N.A. First integrals and general solution of the complex Ginzburg–Landau equation. *Applied mathematics and computation*, 2020, vol. 386, 125407.
4. Biswas A., Kara A.H., Sun Y., Zhou Q., Yildirim Y., Alshehri H.M., Belic M.R. Conservation laws for pure-cubic opticalsolitons with complex Ginzburg–Landau equation having several refractive index structures. *Results in Physics*, 2021, vol. 31, 104901.
5. Kai Y., Yin Z. Asymptotic analysis to domain walls between traveling wave modeled by real coupled Ginzburg–Landau equations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2021, vol. 152, 111266.
6. Malomed B.A. Past and Present Trends in the Development of the Pattern-Formation Theory: Domain Walls and Quasicrystals. *Physics*, 2021, vol. 3, pp. 1014–1045.
7. Zayed E.M.E., Gepreel K.A., El-Horbaty M., Biswas A., Yildirim Y. and Alshehri H.M. Highly dispersive optical solitons with complex Ginzburg–Landau equation having six nonlinear forms. *Mathematics*, 2021, vol. 9 (24), pp. 3270.
8. Biswas A., Berkemeyer T., Khan S., Moraru L., Yildirim Y., Alshehri H.M. Highly Dispersive Optical Soliton Perturbation, with Maximum Intensity, for the Complex Ginzburg–Landau Equation by Semi-Inverse Variation. *Mathematics*, 2022, vol. 10 (6), pp. 987.
9. Biswas A., Yildirim Y., Ekici M., Guggilla P., Khan S., Gonzalez-Gaxiola O., Alzahrani A.K., Belic M.R. Cubic-quartic optical soliton perturbation with complex Ginzburg–Landau equation. *Journal of Applied Science and Engineering (Taiwan)*, 2021, vol. 24 (6), pp. 937–1004.
10. Zayed E.M.E., Alngar M.E.M., El-Horbaty M., Biswas A., Alshomrani A.S., Ekici M., Yildirim Y., Belic M.R. Optical solitons with complex Ginzburg–Landau equation having a plethora of nonlinear forms with a couple of improved integration norms. *Optik*, 2020, vol. 207, 163804.
11. Samir Islam, Badra Niveen, Ahmed Hamdy M., Arnous Ahmed H. Solitons in birefringent fibers for CGL equation with Hamiltonian perturbations and Kerr law nonlinearity using modified extended direct algebraic method. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2021, vol. 102, 105945.
12. Das A., Biswas A., Ekici M., Zhou Q., Alshomrani A.S., Belic M.R. Optical solitons with complex Ginzburg–Landau equation for two nonlinear forms using F-expansion. *Chinese Journal of Physics*, 2019, vol. 61, pp. 255–261.
13. Shi Y., Dai Z., Li D. Application of exp-function method for 2D cubic-quintic Ginzburg–Landau equation. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, vol. 210, pp. 269–275.
14. Li W., Ma G., Yu W., Zhang Y., Liu M., Yang C., Liu W. Soliton structures in the (1+1)-dimensional Ginzburg–Landau equation with a parity-time-symmetric potential in ultrafast optics. *Chinese Physics B*, 2018, vol. 27, 030504.
15. Zayed E.M.E., Alurfi K.A.E. New extended auxiliary equation method and its applications to nonlinear Schrodinger-type equations. *Optik*, 2016, vol. 127, pp. 9131–9151.
16. Abdou M.A., Soliman A.A., Biswas A., Ekici M., Zhou Q., Moshokoa S.P. Dark-singular combo optical solitons with fractional complex Ginzburg–Landau equation. *Optik*, 2018, vol. 171, pp. 463–467.
17. Biswas A. Chirp-free bright optical solitons and conservation laws for complex Ginzburg–Landau equation with three nonlinear forms. *Optik*, 2018, vol. 174, pp. 207–215.
18. Kudryashov N.A. A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber. *Optik*, 2019, vol. 189, pp. 42–52.
19. Arnous A.H., Biswas A., Ekici M., Alzahrani A.K., Belic M.R. Optical solitons and conservation laws of Kudryashov’s equation with improved modified extended tanh-function. *Optik*, 2021, vol. 225, pp. 165406.
20. Zayed E.M.E., Alngar M.E.M. Optical soliton solutions for the generalized Kudryashov equation of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities by three integration algorithms. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2021, vol. 44 (1), pp. 315–324.
21. Biswas A., Asma M., Guggilla P., Mullick L., Moraru L., Ekici M., Alzahrani A.K., Belic M.R. Optical soliton perturbation with Kudryashov’s equation by semi-inverse variational principle. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2020, vol. 384, is. 33, 126830.
22. Biswas A., Sonmezoglu A., Ekici M., Alzahrani A.K., Belic M.R. Cubic-Quartic Optical Solitons with Differential Group Delay for Kudryashov’s Model by Extended Trial Function. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2020. vol. 65, is. 12. pp. 1384–1398.

23. Ekici M. Kinky breathers, W-shaped and multi-peak soliton interactions for Kudryashov's quintuple power-law coupled with dual form of non-local refractive index structure. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2022, vol. 159, pp. 112172.
24. Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A. Stationary optical solitons with Kudryashov's quintuple power-law of refractive index having nonlinear chromatic dispersion. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2022, vol. 426, pp. 127885.
25. Ekici M. Optical solitons with Kudryashov's quintuple power law coupled with dual form of non-local law of refractive index with extended Jacobi's elliptic function. *Optical and Quantum Electronics*, 2022, vol. 54, pp. 279.
26. Kudryashov N.A. The generalized Duffing oscillator. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, vol. 93, pp. 105526.
27. Kudryashov N.A. Exact solutions of the equation for surface waves in a convecting fluid. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, vol. 344–345, pp. 97–106.
28. Kudryashov N.A. Solitary wave solutions of hierarchy with non-local nonlinearity. *Applied Mathematics Letters*, 2020, vol. 103, pp. 106155.
29. Kudryashov N.A. Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrödinger equations. *Applied Mathematics and Computation*, 2020, vol. 371, pp. 124972.
30. Kudryashov N.A. Implicit Solitary Waves for One of the Generalized Nonlinear Schrödinger Equations. *Mathematics*, 2021, vol. 9, is. 23, pp. 3024.
31. Kudryashov N.A. Method for finding optical solitons of generalized nonlinear Schrödinger equations, *Optik*, 2022, vol. 261, pp. 169163.
32. Alotaibi H. Traveling wave solutions to the nonlinear evolution equation using expansion method and addendum to Kudryashov's method. *Symmetry*, 2021, vol. 13, is. 11, pp. 2126.
33. Kaplan M., Akbulut A. The analysis of the soliton-type solutions of conformable equations by using generalized Kudryashov method. *Optical and Quantum Electronics*, 2021, vol. 53, is. 9, pp. 498.
34. Kudryashov N.A. Stationary solitons of the generalized nonlinear Schrödinger equation with nonlinear dispersion and arbitrary refractive index. *Applied Mathematics Letters*, 2022, vol. 128, pp. 107888.
35. Rahman Z., Ali M.Z., Roshid H.-O. Closed form soliton solutions of three nonlinear fractional models through proposed improved Kudryashov method. *Chinese Physics B*, 2021, vol. 30, is. 5, 050202.
36. Kaewta S., Sirisubtawee S., Sungnol S. Application of the exp-function and generalized Kudryashov method for obtaining new exact solutions of certain nonlinear conformable time partial integro-differential equations. *Computation*, 2021, vol. 9, is. 5, pp. 5.