ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2022, том 11, № 2, с. 122–132

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 533.95+517.958

О РЕДУКЦИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГАЗОДИНАМИКИ К СИСТЕМАМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

О. Н. Ульянов[1,*], Л. И. Рубина[1,]**

[1] *Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, 620108, Россия*

**e-mail: secretary@imm.uran.ru*

***e-mail: rli@imm.uran.ru*

Поступила в редакцию 21.07.2022 г.
После доработки 22.07.2022 г.
Принята к публикации 26.07.2022 г.

Рассматривается система уравнений магнитной газодинамики, учитывающая магнитную вязкость. В основе исследования системы лежит редукция систем уравнений с частными производными к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (системам ОДУ). Независимой переменной в системах ОДУ является переменная ψ, где уравнение $\psi(x, y, z, t) = \mathrm{const}$ задает поверхность уровня решений системы или функций, через которые решения системы выражаются. Для редукции рассматриваемой системы уравнений к системам ОДУ используются два подхода. В первом подходе уравнение $\psi(x, y, z, t) = \mathrm{const}$ задает поверхность уровня решений системы (компонент вектора скорости и компонент вектора напряженности магнитного поля). Во втором подходе рассматриваются безвихревые движения плазмы, в которых компоненты вектора скорости являются производными некоторой функции $Q = Q(x, y, z, t)$. В этом случае уравнение $\psi(x, y, z, t) = \mathrm{const}$ задает поверхность уровня функции $Q = Q(x, y, z, t)$ и компонент вектора напряженности магнитного поля. Найдены некоторые точные решения рассматриваемой системы уравнений в частных производных. Показано, что при определении поверхностей уровня в каждом из рассматриваемых подходов сохраняется функциональный произвол. Имеющийся функциональный произвол использован в задаче расположения линий тока потенциального течения плазмы и силовых линий магнитного поля на некоторой поверхности. Описан алгоритм получения такой поверхности.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений с частными производными, системы ОДУ, уравнения магнитной газодинамики, редукции, точные решения

DOI: 10.56304/S2304487X22020122

ВВЕДЕНИЕ

При описании динамики плазмы, а также при исследовании проблем управления движением плазмы широко используются магнитогазодинамические модели [1–7]. В них рассматриваются нелинейные системы уравнений в частных производных, для исследования которых применяются иногда аналитические [5, 6], но чаще численные методы [2, 3, 7].

В данной работе описано применение к одной из систем уравнений магнитной газодинамики развиваемого авторами метода редукции систем дифференциальных уравнений в частных производных (систем УЧП) к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (системам ОДУ). Этот аналитический метод – один из ряда методов редукции систем УЧП к системам ОДУ. Он применим для исследования как линейных [8], так и нелинейных [9] систем уравнений в частных производных. Следует отметить, что редукции УЧП к системам ОДУ и методы поиска точных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных широко распространены (см., например, в [10]). Укажем среди них прямой метод построения редукций [11, 12], метод дифференциальных связей [13], методы группового анализа и поиска симметрий [14], методы, использующие те или иные анзацы [12, 15], методы функционального разделения переменных [10], метод характеристик для сведения к системе ОДУ уравнений в частных производных первого порядка [16] и целый ряд других подходов.

Развиваемый в работе метод редукции основан, вообще говоря, на выделении и исследовании некоторого (базового) уравнения в частных производных первого порядка, которое выписывается при рассмотрении соотношений, получаемых из исходной системы УЧП в предположении, что решения системы зависят от одной независимой переменной ψ (первый подход) или являются производными некоторой функции $Q(\psi)$ (второй подход). При этом независимая переменная ψ такова, что уравнение $\psi(x, y, z, t) = \text{const}$ задает поверхность уровня решений рассматриваемой системы УЧП (первый подход) или поверхность уровня функции $Q(\psi)$ (второй подход). Редукция завершается (выписывается система ОДУ) после того, как тем или иным способом обеспечено выполнение условий, при которых все нужные для ее получения соотношения становятся следствиями базового уравнения (см. [8, 9] и данную работу). Применение этого метода редукции не связано с рассмотрением систем уравнений определенного (эллиптического, гиперболического, смешанного) типа. В статье метод применен для исследования системы магнитной газодинамики, описывающей движение плазмы с учетом магнитной вязкости [2]. Полученные системы ОДУ содержат одну произвольную функцию. Наличие произвольной функции позволило изучить возможность обтекания некоторых поверхностей безвихревым потоком плазмы при наличии поперечного магнитного поля. Этот произвол может быть использован также для решения некоторых других задач, интересующих исследователей.

1. РЕДУКЦИЯ СИСТЕМЫ МГД-УРАВНЕНИЙ, УЧИТЫВАЮЩИХ МАГНИТНУЮ ВЯЗКОСТЬ, К СИСТЕМАМ ОДУ

Для изучения плазмодинамических моделей ускорения плазмы в поперечном магнитном поле используется система магнитной газодинамики в безразмерном виде, учитывающая магнитную вязкость ν и не учитывающая гидродинамическую вязкость и теплопроводность [2]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0, \quad \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \mathbf{j}\times\mathbf{H},$$
$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} + p\nabla\mathbf{v} = \nu j^2,$$
$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{H}) - \nabla\times(\nu\mathbf{j}), \tag{1.1}$$

где $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla), \quad p = (\gamma-1)\rho\varepsilon, \quad \mathbf{j} = \nabla\times\mathbf{H},$

$$\nu = \text{const}.$$

Здесь t – время, $\{x, y, z\}$ – пространственные координаты, $\mathbf{H}(x, y, z, t)$ – вектор напряженности магнитного поля, $\mathbf{H} = \{H_1, H_2, H_3\}$, $\mathbf{j}(x, y, z, t)$ – вектор плотности электрического тока, $\mathbf{j} = \{j_1, j_2, j_3\}$, $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ – вектор скорости течения плазмы, $\mathbf{v} = \{u, v, w\}$, ρ – плотность плазмы, p – давление, $\nu \neq 0$ – магнитная вязкость.

В работе рассматривается случай, когда $\mathbf{rot}\mathbf{H} \neq 0$, так как в противном случае все члены с ν зануляются и вязкость никакой роли не играет.

Перепишем систему (1.1) в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0,$$
$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) + (\gamma-1)\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial x} +$$
$$+\left[\left(\frac{\partial H_3}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial z}\right)H_3 - \left(\frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial x}\right)H_2\right] = 0,$$
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}v + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) + (\gamma-1)\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial y} +$$
$$+\left[\left(\frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial x}\right)H_1 - \left(\frac{\partial H_2}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial y}\right)H_3\right] = 0,$$
$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) + (\gamma-1)\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial z} +$$
$$+\left[\left(\frac{\partial H_2}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial y}\right)H_2 - \left(\frac{\partial H_3}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial z}\right)H_1\right] = 0,$$
$$\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + u\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + v\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} + w\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\right) +$$
$$+(\gamma-1)\rho\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \nu\left[\left(\frac{\partial H_3}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial z}\right)^2 + \right. \tag{1.2}$$
$$\left. + \left(\frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H_2}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial y}\right)^2\right],$$
$$\frac{\partial H_1}{\partial t} - \frac{\partial(uH_2 - vH_1)}{\partial y} + \frac{\partial(wH_1 - uH_3)}{\partial z} =$$
$$= \nu\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H_3}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial z}\right)\right],$$
$$\frac{\partial H_2}{\partial t} - \frac{\partial(vH_3 - wH_2)}{\partial z} + \frac{\partial(uH_2 - vH_1)}{\partial x} =$$
$$= \nu\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H_2}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial x}\right)\right],$$
$$\frac{\partial H_3}{\partial t} - \frac{\partial(wH_1 - uH_3)}{\partial x} + \frac{\partial(vH_3 - wH_2)}{\partial y} =$$
$$= \nu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_3}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H_2}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial y}\right)\right].$$

Легко видеть, что если соответствующие функции достаточно гладкие, то справедливо

Следствие 1.

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial t\partial x} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial t\partial y} + \frac{\partial^2 H_3}{\partial t\partial z} = 0,$$

отсюда $\quad \dfrac{\partial H_1}{\partial x} + \dfrac{\partial H_2}{\partial y} + \dfrac{\partial H_3}{\partial z} = F(x, y, z).$

1.1. Первый подход

В системе (1.2) полагаем, что $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\psi)$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\psi)$, $\rho = \rho(\psi)$, $\varepsilon = \varepsilon(\psi)$, причем уравнение $\psi = \psi(t, x, y, z) = \mathrm{const}$ задает поверхность уровня этих функций. Тогда $\rho_t = \rho'\psi_t$, $\rho_x = \rho'\psi_x$, $\rho_y = \rho'\psi_y$, $\rho_z = \rho'\psi_z$, $\varepsilon_t = \varepsilon'\psi_t$, $\varepsilon_x = \varepsilon'\psi_x$, $\varepsilon_y = \varepsilon'\psi_y$, $\varepsilon_z = \varepsilon'\psi_z$, $u_t = u'\psi_t$, $u_x = u'\psi_x$, $u_y = u'\psi_y$, $u_z = u'\psi_z$, $v_t = v'\psi_t$, $v_x = v'\psi_x$, $v_y = v'\psi_y$, $v_z = v'\psi_z$, $w_t = w'\psi_t$, $w_x = w'\psi_x$, $w_y = w'\psi_y$, $w_z = w'\psi_z$, $(H_i)_t = (H_i)'\psi_t$, $(H_i)_x = (H_i)'\psi_x$, $(H_i)_y = (H_i)'\psi_y$, $(H_i)_z = (H_i)'\psi_z$, $(H_i)_{xx} = (H_i)''\psi_x^2 + (H_i)'\psi_{xx}$, $(H_i)_{yy} = (H_i)''\psi_y^2 + (H_i)'\psi_{yy}$, $(H_i)_{zz} = (H_i)''\psi_z^2 + (H_i)'\psi_{zz}$, $(H_i)_{xy} = (H_i)''\psi_x\psi_y + (H_i)'\psi_{xy}$, $(H_i)_{xz} = (H_i)''\psi_x\psi_z + (H_i)'\psi_{xz}$, $(H_i)_{zy} = (H_i)''\psi_z\psi_y + (H_i)'\psi_{xz}$, $(i = 1, 2, 3)$. Здесь штрихом обозначена производная по ψ, нижние индексы за скобками и у функции ψ обозначают независимые переменные, по которым вычисляется производная.

Подставив данные выражения в (1.2), получим

$$
\begin{gathered}
\rho'(1 + au + bv + cw) + \rho(u'a + v'b + w'c) = 0,\\
\rho u'(1 + au + bv + cw) + (\gamma - 1)a(\rho\varepsilon)' +\\
+ [(H_3'a - H_1'c)H_3 - (H_1'b - H_2'a)H_2] = 0,\\
\rho v'(1 + au + bv + cw) + (\gamma - 1)b(\rho\varepsilon)' +\\
+ [(H_1'b - H_2'a)H_1 - (H_2'c - H_3'b)H_3] = 0,\\
\rho w'(1 + au + bv + cw) + (\gamma - 1)c(\rho\varepsilon)' +\\
+ [(H_2'c - H_3'b)H_2 - (H_3'a - H_1'c)H_1] = 0,\\
\rho\varepsilon'(1 + au + bv + cw) +\\
+ (\gamma - 1)\rho\varepsilon(u'a + v'b + w'c) - \nu[(H_2'c - H_3'b)^2 + \qquad (1.3)\\
+ (H_3'a - H_1'c)^2 + (H_1'b - H_2'a)^2] = 0,\\
H_1' = (uH_2 - vH_1)'b - (wH_1 - uH_3)'c -\\
- \nu[H_1''(a_{22} + a_{33}) - H_2''a_{12} - H_3''a_{13} +\\
+ H_1'(b_{22} + b_{33}) - H_2'b_{12} - H_3'b_{13}],\\
H_2' = (vH_3 - wH_2)'c - (uH_2 - vH_1)'a -\\
- \nu[H_2''(a_{11} + a_{33}) - H_3''a_{23} - H_1''a_{12} +\\
+ H_2'(b_{33} + b_{11}) - H_3'b_{23} - H_1'b_{12}],\\
H_3' = (wH_1 - uH_3)'a - (vH_3 - wH_2)'b -\\
- \nu[H_3''(a_{11} + a_{22}) - H_1''a_{13} - H_2''a_{23} +\\
+ H_3'(b_{11} + b_{22}) - H_1'b_{13} - H_2'b_{23}],
\end{gathered}
$$

где при $\psi_t \neq 0$, $a = \dfrac{\psi_x}{\psi_t}$, $b = \dfrac{\psi_y}{\psi_t}$, $c = \dfrac{\psi_z}{\psi_t}$,

$$
\begin{gathered}
a_{11} = \frac{\psi_x^2}{\psi_t}, \quad a_{12} = \frac{\psi_x\psi_y}{\psi_t},\\
a_{13} = \frac{\psi_x\psi_z}{\psi_t}, \quad a_{23} = \frac{\psi_y\psi_z}{\psi_t}, \quad a_{22} = \frac{\psi_y^2}{\psi_t}, \qquad (1.4)\\
a_{33} = \frac{\psi_z^2}{\psi_t}, \quad b_{11} = \frac{\psi_{xx}}{\psi_t}, \quad b_{12} = \frac{\psi_{xy}}{\psi_t}, \quad b_{13} = \frac{\psi_{xz}}{\psi_t},\\
b_{22} = \frac{\psi_{yy}}{\psi_t}, \quad b_{23} = \frac{\psi_{yz}}{\psi_t}, \quad b_{33} = \frac{\psi_{zz}}{\psi_t}.
\end{gathered}
$$

Соотношения (1.3), (1.4), вообще говоря, не являются системой ОДУ. Однако, в предположении, что левые части выражений, входящих в (1.4), являются функциями переменной ψ, соотношения (1.4) можно рассматривать как переопределенную систему уравнений для функций $\psi = \psi(t, x, y, z)$, $a(\psi)$, $b(\psi)$, $c(\psi)$, $a_{11}(\psi)$, $a_{12}(\psi)$, $a_{13}(\psi)$, $a_{23}(\psi)$, $a_{22}(\psi)$, $a_{33}(\psi)$, $b_{11}(\psi)$, $b_{12}(\psi)$, $b_{13}(\psi)$, $b_{22}(\psi)$, $b_{23}(\psi)$, $b_{33}(\psi)$. Для того, чтобы соотношения (1.3) представляли собой систему ОДУ достаточно, чтобы получившаяся переопределенная система (1.4) была совместна. Покажем ниже, что это возможно.

Утверждение 1. *Если* $\psi = g(\psi)(t + ax + by + cz + l)$, *где* $g = g(\psi)$ *— произвольная функция с единственным ограничением* $g \neq k\psi$, $k = \mathrm{const}$, $a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$, $c = \mathrm{const}$, $l = \mathrm{const}$, *то система* (1.4) *совместна и система* (1.3) *сводится к системе ОДУ.*

Доказательство. Если $\psi = g(\psi)(t + \alpha x + \beta y + \mu z)$, то

$$
\psi_t = \frac{g}{1 - g'(t + ax + by + cz + l)}, \; t + ax + by + cz + l = \frac{\psi}{g}, \text{ тогда } \psi_t = \frac{g^2}{g - \psi g'} = f(\psi).
$$

Выбираем в качестве базового уравнения $\psi_t = f(\psi)$.

Аналогично получаем

$$
\psi_x = \frac{ag^2}{g - \psi g'} = f(\psi)a, \quad \psi_y = \frac{bg^2}{g - \psi g'} = f(\psi)b, \quad \psi_z = \frac{cg^2}{g - \psi g'} = f(\psi)c.
$$

Тогда $a_{11} = a^2 f(\psi)$, $a_{12} = abf(\psi)$, $a_{13} = acf(\psi)$, $a_{23} = bcf(\psi)$, $a_{22} = b^2 f(\psi)$, $a_{33} = c^2 f(\psi)$, $\psi_{xx} = a^2 ff'$, $\psi_{xy} = abff'$, $\psi_{xz} = acff'$, $\psi_{yy} = b^2 ff'$, $\psi_{zz} = c^2 ff'$, $\psi_{yz} = bcff'$, $b_{11} = a^2 f'$, $b_{12} = abf'$, $b_{13} = acf'$, $b_{22} = b^2 f'$,

$b_{33} = c^2 f'$, $b_{23} = bcf'$. Система (1.4) совместна, ибо все смешанные производные функции ψ равны: $\psi_{tx} = \psi_{xt}$, $\psi_{ty} = \psi_{yt}$, $\psi_{tz} = \psi_{zt}$, $\psi_{yx} = \psi_{xy}$, $\psi_{zx} = y_{xz}$, $\psi_{ez} = \psi_{ze}$. Таким образом, получили что все коэффициенты в системе (1.3) либо постоянные, либо функции от ψ, если задана функция $g(\psi)$. Следовательно, (1.3) – система ОДУ для определения функций $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\psi)$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\psi)$, $\rho = \rho(\psi)$, $\varepsilon = \varepsilon(\psi)$, если задана функция $g(\psi)$. Что и требовалось доказать.

В частности, справедливо

Утверждение 2. *Система* (1.3) *сводится к системе ОДУ для функций* $p(\psi)$, $H_1(\psi)$, $H_2(\psi)$, $H_3(\psi)$, *если* $g(\psi) = 1$.

Доказательство. Если $g(\psi) = 1$, $a = \text{const}$, $b = \text{const}$, $c = \text{const}$, $l = \text{const}$, то система (1.3) имеет вид

$$\begin{gathered}
\rho'(1 + au + bv + cw) + \rho(u'a + v'b + w'c) = 0,\\
\rho u'(1 + au + bv + cw) + (\gamma - 1)a(\rho\varepsilon)' +\\
+ [(H_3'a - H_1'c)H_3 - (H_1'b - H_2'a)H_2] = 0,\\
\rho v'(1 + au + bv + cw) + (\gamma - 1)b(\rho\varepsilon)' +\\
+ [(H_1'b - H_2'a)H_1 - (H_2'c - H_3'b)H_3] = 0,\\
\rho w'(1 + au + bv + cw) + (\gamma - 1)c(\rho\varepsilon)' +\\
+ [(H_2'c - H_3'b)H_2 - (H_3'a - H_1'c)H_1] = 0,\\
(\rho\varepsilon)'(1 + au + bv + cw) +\\
+ \gamma(\rho\varepsilon)(u'a + v'b + w'c) - \nu[(H_2'c - H_3'b)^2 +\\
+ (H_3'a - H_1'c)^2 + (H_1'b - H_2'a)^2] = 0,\\
H_1' = (uH_2 - vH_1)'b - (wH_1 - uH_3)'c -\\
- \nu[H_2''(b^2 + c^2) - H_2''ab - H_3''ac],\\
H_2' = (vH_3 - uH_2)'c - (uH_2 - vH_1)'a -\\
- \nu[H_2''(a^2 + c^2) - H_3''bc - H_1''ab],\\
H_3' = (wH_1 - uH_3)'a - (vH_3 - uH_2)'b -\\
- \nu[H_3''(a^2 + b^2) - H_1''ac - H_2''bc].
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Из последних трех уравнений (1.5) следует, что

$$\begin{gathered}
-H_1 + (uH_2 - vH_1)b - (wH_1 - uH_3)c + N =\\
= \nu[H_1'(b^2 + c^2) - H_2'ab - H_3'ac],\\
-H_2 + (vH_3 - uH_2)c - (uH_2 - vH_1)a + M =\\
= \nu[H_2'(a^2 + c^2) - H_3'bc - H_1'ab],\\
-H_3 + (wH_1 - uH_3)a - (vH_3 - uH_2)b + K =\\
= \nu[H_3'(a^2 + b^2) - H_1'ac - H_2'bc],\\
M = \text{const}, \quad N = \text{const}, \quad K = \text{const}.
\end{gathered} \tag{1.6}$$

В системе (1.6) определитель при производных равен нулю, поэтому система имеет решение, только тогда, когда $aH_1 + bH_2 + cH_3 = aN + bM + cK$. Кроме того, из первого соотношения (1.5.) получаем $\rho(1 + au + bv + cw) = \rho_0$, $\rho_0 = \text{const}$.

Учитывая эти условия, имеем, если $\rho_0 \neq 0$, что

$$\begin{gathered}
u' = -(1/\rho_0)[0.5a(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2)' +\\
+ H_1'(Na + Mb + Kc) + (\gamma - 1)a(\rho\varepsilon)'],\\
v' = -(1/\rho_0)[0.5b(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2)' +\\
+ H_2'(Na + Mb + Kc) + (\gamma - 1)b(\rho\varepsilon)'],\\
w' = -(1/\rho_0)[0.5c(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2)' +\\
+ H_3'(Na + Mb + Kc) + (\gamma - 1)c(\rho\varepsilon)'].
\end{gathered} \tag{1.7}$$

Из (1.7) получаем, что

$$\begin{gathered}
u = -(1/\rho_0)[0.5a(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2) +\\
+ H_1(Na + Mb + Kc) + ap] + N_1,\\
v = -(1/\rho_0)[0.5b(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2) +\\
+ H_2(Na + Mb + Kc) + bp] + M_1,\\
w = -(1/\rho_0)[0.5c(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2) +\\
+ H_3(Na + Mb + Kc) + cp] + K_1,\\
N_1 = \text{const}, \quad M_1 = \text{const}, \quad K_1 = \text{const}.
\end{gathered} \tag{1.8}$$

Далее, учитывая все вышеизложенное и уравнение из системы (1.5) $(\rho\varepsilon)'(1 + au + bv + cw) + \gamma(\rho\varepsilon)(u'a + v'b + w'c) - \nu[(H_2'c - H_3'b)^2 + (H_3'a - H_1'c)^2 + (H_1'b - H_2'a)^2] = 0$, которое переходит ниже в уравнение для функции p, приходим к системе ОДУ для определения $p(\psi)$, $H_1(\psi)$, $H_2(\psi)$, $H_3(\psi)$

$$\begin{gathered}
p'(1 + au + bv + cw) + \gamma p(u'a + v'b + w'c) -\\
- \nu(a^2 + b^2 + c^2)(\gamma - 1)\times\\
\times[(H_1')^2 + (H_2')^2 + (H_3')^2] = 0,\\
\nu(a^2 + b^2 + c^2)H_1' + H_1(1 + au + bv + cw) -\\
- u(Na + Mb + Kc) = 0,\\
\nu(a^2 + b^2 + c^2)H_2' + H_2(1 + au + bv + cw) -\\
- v(Na + Mb + Kc) = 0, \; H_3' = -(a/c)H_1' - (b/c)H_2',\\
\rho(1 + au + bv + cw) = \rho_0,
\end{gathered} \tag{1.9}$$

где $u = u(p, H_1, H_2, H_3)$, $v = v(p, H_1, H_2, H_3)$, $w = w(p, H_1, H_2, H_3)$ (см. (1.8)). Таким образом, выписана система (1.9) для функций $p(\psi)$, $H_1(\psi)$, $H_2(\psi)$, $H_3(\psi)$, что и требовалось доказать.

1.2. Второй подход

Пусть $\mathbf{rot\,v} = 0$. Известно [17], что $\mathbf{rot\,v} = 0$ тогда и только тогда, когда $u = Q_x$, $v = Q_y$, $w = Q_z$, где $Q = Q(t, x, y, z)$. В этом случае система (1.2) перепишется в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\frac{\partial Q}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial Q}{\partial z}\right) = 0,$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial Q}{\partial t} + 0.5\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)^2\right]\right\} + \frac{\partial p}{\partial x} + \left[\left(\frac{\partial H_3}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial z}\right)H_3 - \left(\frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial x}\right)H_2\right] = 0,$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial Q}{\partial t} + 0.5\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)^2\right]\right\} + \frac{\partial p}{\partial y} + \left[\left(\frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial x}\right)H_1 - \left(\frac{\partial H_2}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial y}\right)H_3\right] = 0,$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial Q}{\partial t} + 0.5\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)^2\right]\right\} + \frac{\partial p}{\partial z} + \left[\left(\frac{\partial H_2}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial y}\right)H_2 - \left(\frac{\partial H_3}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial z}\right)H_1\right] = 0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\right) + (\gamma - 1)\times \rho\varepsilon\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right) = \nu\left[\left(\frac{\partial H_3}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H_2}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial y}\right)^2\right], \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}H_2 - \frac{\partial Q}{\partial y}H_1\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial z}H_1 - \frac{\partial Q}{\partial x}H_3\right) = \nu\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H_3}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial z}\right)\right],$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}H_3 - \frac{\partial Q}{\partial z}H_2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}H_2 - \frac{\partial Q}{\partial y}H_1\right) = \nu\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H_2}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial x}\right)\right],$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial z}H_1 - \frac{\partial Q}{\partial x}H_3\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}H_3 - \frac{\partial Q}{\partial z}H_2\right) = \nu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_3}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H_2}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial y}\right)\right].$$

В системе (1.10) полагаем, что $Q = Q(\psi)$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\psi)$, $\rho = \rho(\psi)$, $\varepsilon = \varepsilon(\psi)$, $\psi = \psi(t, x, y, z) = \mathrm{const}$ задает поверхность уровня этих функций. Тогда $\rho_t = \rho'\psi_t$, $\rho_x = \rho'\psi_x$, $\rho_y = \rho'\psi_y$, $\rho_z = \rho'\psi_z$, $\varepsilon_t = \varepsilon'\psi_t$, $\varepsilon_x = \varepsilon'\psi_x$, $\varepsilon_y = \varepsilon'\psi_y$, $\varepsilon_z = \varepsilon'\psi_z$, $Q_t = Q'\psi_t$, $Q_x = Q'\psi_x$, $Q_y = Q'\psi_y$, $Q_z = Q'\psi_z$, $Q_{xx} = Q''\psi_x^2 + Q'\psi_{xx}$, $Q_{yy} = Q''\psi_y^2 + Q'\psi_{yy}$, $Q_{zz} = Q''\psi_z^2 + Q'\psi_{zz}$, $Q_{xy} = Q''\psi_x\psi_y + Q'\psi_{xy}$, $Q_{xz} = Q''\psi_x\psi_z + Q'\psi_{xz}$, $Q_{yz} = Q''\psi_z\psi_y + Q'\psi_{zy}$, $Q_{xt} = Q''\psi_x\psi_t + Q'\psi_{xt}$, $Q_{ty} = Q''\psi_t\psi_y + Q'\psi_{ty}$, $Q_{zt} = Q''\psi_z\psi_t + Q'\psi_{zt}$, $(H_i)_t = (H_i)'\psi_t$, $(H_i)_x = (H_i)'\psi_x$, $(H_i)_y = (H_i)'\psi_y$, $(H_i)_z = (H_i)'\psi_z$, $(H_i)_{xx} = (H_i)''\psi_x^2 + (H_i)'\psi_{xx}$, $(H_i)_{yy} = (H_i)''\psi_y^2 + (H_i)'\psi_{yy}$, $(H_i)_{zz} = (H_i)''\psi_z^2 + (H_i)'\psi_{zz}$, $(H_i)_{xy} = (H_i)''\psi_x\psi_y + (H_i)'\psi_{xy}$, $(H_i)_{xz} = (H_i)''\psi_x\psi_z + (H_i)'\psi_{xz}$, $(H_i)_{zy} = (H_i)''\psi_z\psi_y + (H_i)'\psi_{xz}$, $(i = 1, 2, 3)$. Здесь штрихом обозначена производная по ψ, нижние индексы за скобками и у функции ψ обозначают переменные, по которым вычисляется производная.

Подставив данные выражения в (1.10), получим

$$\rho'\psi_t + (\rho'Q' + \rho Q'')(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2) + \rho Q'(\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}) = 0,$$

$$\rho\left[Q''\psi_t + Q'\frac{\psi_{xt}}{\psi_x} + Q'Q''(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2) + (Q')^2\frac{(\psi_x\psi_{xx} + \psi_y\psi_{yy} + \psi_z\psi_{zz})}{\psi_x}\right] + p' + \left[\left(H_3' - H_1'\frac{\psi_z}{\psi_x}\right)H_3 + \left(H_1'\frac{\psi_y}{\psi_x} - H_2'\right)H_2\right] = 0,$$

$$\rho\left[Q''\psi_t + Q'\frac{\psi_{yt}}{\psi_y} + Q'Q''(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2) + (Q')^2\frac{(\psi_x\psi_{xy} + \psi_y\psi_{yy} + \psi_z\psi_{yz})}{\psi_y}\right] + p' + \left[\left(H_1' - H_2'\frac{\psi_x}{\psi_y}\right)H_1 + \left(H_2'\frac{\psi_z}{\psi_y} - H_3'\right)H_3\right] = 0,$$

$$\rho\left[Q''\psi_t + Q'\frac{\psi_{zt}}{\psi_z} + Q'Q''(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2) + (Q')^2\frac{(\psi_x\psi_{xz} + \psi_y\psi_{yz} + \psi_z\psi_{zz})}{\psi_z}\right] + p' + \left[\left(H_2' - H_3'\frac{\psi_y}{\psi_z}\right)H_2 + \left(H_3'\frac{\psi_x}{\psi_z} - H_1'\right)H_1\right] = 0,$$

$$\rho\{\epsilon'\psi_t + [Q'\epsilon' + (\gamma - 1)\epsilon Q''](\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2) + (\gamma - 1)\epsilon Q'(\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz})\} = \nu[(H_3'\psi_x + H_1'\psi_z)^2 + (H_1'\psi_y + H_2'\psi_x)^2 + (H_2'\psi_z - H_3'\psi_y)^2], \tag{1.11}$$

$$H_1'\psi_t-(Q'H_2'+H_2Q'')\psi_x\psi_y-H_2Q'\psi_{xy}+$$
$$+(Q'H_1'+H_1Q'')(\psi_z^2+\psi_y^2)+H_1Q'(\psi_{zz}+\psi_{yy})-$$
$$-(Q'H_3'+H_3Q'')\psi_x\psi_y-H_3Q'\psi_{xz}=$$
$$=\nu[H_1''(\psi_y^2+\psi_z^2)+H_1'(\psi_{yy}+\psi_{zz})-H_2''\psi_x\psi_y-$$
$$-H_2'\psi_{xy}-H_3''\psi_x\psi_y-H_3'\psi_{xz}],$$

$$H_2'\psi_t-(Q'H_3'+H_3Q'')\psi_z\psi_y-H_3Q'\psi_{zy}+$$
$$+(Q'H_2'+H_2Q'')(\psi_x^2+\psi_z^2)+H_2Q'(\psi_{zz}+\psi_{xx})-$$
$$-(Q'H_1'+H_1Q'')\psi_x\psi_y-H_1Q'\psi_{xy}=$$
$$=\nu[H_2''(\psi_x^2+\psi_z^2)+H_2'(\psi_{zz}+\psi_{xx})-H_3''\psi_y\psi_z-$$
$$-H_3'\psi_{yz}-H_1''\psi_y\psi_x-H_1'\psi_{yx}],$$

$$H_3'\psi_t-(Q'H_1'+H_1Q'')\psi_z\psi_x-H_1Q'\psi_{zx}+$$
$$+(Q'H_3'+H_3Q'')(\psi_y^2+\psi_x^2)+H_3Q'(\psi_{yy}+\psi_{xx})-$$
$$-(Q'H_2'+H_2Q'')\psi_z\psi_y-H_2Q'\psi_{yz}=$$
$$=\nu[H_3''(\psi_x^2+\psi_y^2)+H_3'(\psi_{yy}+\psi_{xx})-H_2''\psi_y\psi_z-$$
$$-H_2'\psi_{yz}-H_1''\psi_z\psi_x-H_1'\psi_{zx}].$$

Соотношения (1.11), вообще говоря, не являются системой ОДУ. Однако, для того, чтобы они представляли из себя систему ОДУ достаточно, чтобы соотношения

$$\psi_t=g(\psi),\quad \psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2=g_1(\psi),$$
$$\psi_{xx}+\psi_{yy}+\psi_{zz}=g_2(\psi),$$
$$\frac{\psi_{xt}}{\psi_x}=g_3(\psi),\frac{\psi_{yt}}{\psi_y}=g_4(\psi),\quad \frac{\psi_{zt}}{\psi_z}=g_5(\psi),$$
$$\frac{\psi_x\psi_{xx}+\psi_y\psi_{xy}+\psi_z\psi_{xz}}{\psi_x}=g_6(\psi),$$
$$\frac{\psi_x\psi_{xy}+\psi_y\psi_{yy}+\psi_z\psi_{yz}}{\psi_y}=g_7(\psi),\qquad (1.12)$$
$$\frac{\psi_x\psi_{xz}+\psi_y\psi_{yz}+\psi_z\psi_{zz}}{\psi_z}=g_8(\psi),$$
$$\frac{\psi_z}{\psi_x}=g_9(\psi),\quad \frac{\psi_y}{\psi_x}=g_{10}(\psi),\quad \frac{\psi_x}{\psi_y}=g_{11}(\psi),$$
$$\frac{\psi_z}{\psi_y}=g_{12}(\psi),\quad \frac{\psi_y}{\psi_z}=g_{13}(\psi),\quad \frac{\psi_x}{\psi_z}=g_{14}(\psi),$$

где $g(\psi)$, $g_i(\psi)$, $(i=1,2,\ldots,14)$ – некоторые функции, были совместной переопределенной системой уравнений. Укажем некоторые условия, при которых система (1.12) совместна.

Утверждение 3. *Если* $\psi_t=g(\psi)$, $g_1(\psi)=\alpha^2g^2(\psi)$, $g_2(\psi)=\alpha^2g(\psi)g'(\psi)$, $g_i(\psi)=g'(\psi)$, $(i=3,4,5)$, $g_j(\psi)=\alpha^2g(\psi)g'(\psi)$, $(j=6,7,8)$, $g_k=\mathrm{const}$, $(k=9,10,11,12,13,14)$, $\alpha=\mathrm{const}$, $g(\psi)\neq 0$, *то система* (12) *совместна.*

Доказательство. Выбираем в качестве базового уравнения $\psi_t=g(\psi)$. Находя производные этой функции, получаем $\psi_{xt}=g'\psi_x$, $\psi_{yt}=g'\psi_y$, $\psi_{zt}=g'\psi_z$, следовательно, $g_i(\psi)=g'(\psi)$, $(i=3,4,5)$,

$$\frac{\psi_y}{\psi_x}=g_{10}(\psi),\ g_{10}'\psi_t=\frac{\psi_{yt}}{\psi_x}-\frac{\psi_y\psi_{xt}}{\psi_x^2}=\frac{g'\psi_y}{\psi_x}-\frac{g'\psi_y}{\psi_x}=0,$$

$$\frac{\psi_z}{\psi_x}=g_9(\psi),\ g_9'\psi_t=\frac{\psi_{zt}}{\psi_x}-\frac{\psi_z\psi_{xt}}{\psi_x^2}=\frac{g'\psi_z}{\psi_x}-\frac{g'\psi_z}{\psi_x}=0.$$

Отсюда следует, что $g_k=\mathrm{const}$, $(k=9, 10, 11, 12, 13, 14)$ и $\psi_y=g_{10}\psi_x$, $\psi_z=g_9\psi_x$, $g_1(\psi)=\psi_x^2(1+g_9^2+g_{10}^2)$, тогда $g_1'\psi_t=2\psi_x\psi_{xt}(1+g_9^2+g_{10}^2)$, и $g_1'g(\psi)=2g'g_1$, $g_1(\psi)=\alpha^2g^2(\psi)$, $\alpha=\mathrm{const}$. Далее, $g_j(\psi)=0.5g_1'=\alpha^2g(\psi)g'(\psi)$, $(j=6,7,8)$. $\psi_x=\beta g(\psi)$, $\beta=\alpha/\sqrt{(1+g_9^2+g_{10}^2)}$, $\beta=\mathrm{const}$, $\psi_y=\eta g(\psi)$, $\eta=g_{10}\beta$, $\eta=\mathrm{const}$, $\psi_z=\mu g(\psi)$, $\mu=g_9\beta$, $\mu=\mathrm{const}$. Отсюда $\psi_{xx}=\beta^2gg'(\psi)$, $\psi_{yy}=\eta^2gg'(\psi)$, $\psi_{zz}=\mu^2gg'(\psi)$ и $g_2(\psi)=\alpha^2g(\psi)g'(\psi)$.

Таким образом, все соотношения системы (1.12) являются дифференциальными следствиями базового уравнения $\psi_t=g(\psi)$ при произвольной функции $g(\psi)$, если $g_1(\psi)=\alpha^2g^2(\psi)$, $g_2(\psi)=\alpha^2g(\psi)g'(\psi)$, $g_i(\psi)=g'(\psi)$, $(i=3,4,5)$, $g_j(\psi)=\alpha^2g(\psi)g'(\psi)$, $(j=6,7,8)$, $g_k=\mathrm{const}$, $(k=9, 10, 11, 12, 13, 14)$. Следовательно, при этих условиях система (1.12) совместна, что и требовалось доказать.

Отметим также, что $\psi_{xy}=\beta\eta g(\psi)g'(\psi)$, $\psi_{xz}=\beta\mu g(\psi)g'(\psi)$, $\psi_{zy}=\mu\eta g(\psi)g'(\psi)$, $\alpha^2=\beta^2+\eta^2+\mu^2$.

Следствие 2. При произвольной $g(\psi)$

$$\rho\left[Q''\psi_t+Q'\frac{\psi_{xt}}{\psi_x}+Q'Q''(\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2)+\right.$$
$$\left.+(Q')^2\frac{(\psi_x\psi_{xx}+\psi_y\psi_{xy}+\psi_z\psi_{xz})}{\psi_x}\right]+p'=$$

$$=\rho\left[Q''\psi_t+Q'\frac{\psi_{yt}}{\psi_y}+Q'Q''(\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2)+\right.$$
$$\left.+(Q')^2\frac{(\psi_x\psi_{xy}+\psi_y\psi_{yy}+\psi_z\psi_{yz})}{\psi_y}\right]+p'=$$

$$= \rho\left[Q''\psi_t + Q'\frac{\psi_{zt}}{\psi_z} + Q'Q''(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2) + \right.$$
$$\left. + (Q')^2\frac{(\psi_x\psi_{xz} + \psi_y\psi_{yz} + \psi_z\psi_{zz})}{\psi_z}\right] + p',$$

и, следовательно,

$$\left(H_3' - H_1'\frac{\psi_z}{\psi_x}\right)H_3 - \left(H_1'\frac{\psi_y}{\psi_x} - H_2'\right)H_2 =$$
$$= \left(H_1' - H_2'\frac{\psi_x}{\psi_y}\right)H_1 - \left(H_2'\frac{\psi_z}{\psi_y} - H_3'\right)H_3 =$$
$$= \left(H_2' - H_3'\frac{\psi_y}{\psi_z}\right)H_2 - \left(H_3'\frac{\psi_x}{\psi_z} - H_1'\right)H_1.$$

Следствие 3. $\mu H_3 + \eta H_2 + \beta H_1 = 0$.

Следствие 4. При любом $g(\psi)$ имеем поперечное магнитное поле

$$uH_1 + vH_2 + wH_3 = Q_xH_1 + Q_yH_2 + Q_zH_3 =$$
$$= Q'\left(\psi_xH_1 + \psi_yH_2 + \psi_zH_3\right) =$$
$$= Q'g(\psi)\left(\mu H_3 + \eta H_2 + \beta H_1\right) = 0.$$

Учитывая условие $\mu H_3 + \eta H_2 + \beta H_1 = 0$, получаем вид трех последних уравнений системы (1.11), при произвольной $g(\psi)$

$$\begin{gathered} H_i' + (Q'H_i' + H_iQ'')\alpha^2 g + H_iQ'\alpha^2 g' = \\ = \nu[H_i''\alpha^2 g + H_i'\alpha^2 g'], \quad i = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Из (1.13) имеем

$$H_i' + \alpha^2(Q'H_ig)' - \nu\alpha^2(H_i'g)' = 0,$$
$$H_i + \alpha^2(Q'H_ig) - \nu\alpha^2(H_i'g) = N_i, \quad N_i = \text{const}.$$

Если $N_i = 0$, то

$$H_2[H_1 + \alpha^2(Q'H_1g) - \nu\alpha^2(H_1'g)] -$$
$$- H_1[H_2 + \alpha^2(Q'H_2g) - \nu\alpha^2(H_2'g)] = 0,$$

следовательно, $H_2 = CH_1$, $C = \text{const}$. Аналогично, получаем $H_3 = C_1H_1$, $C_1 = \text{const}$. Но $\mu H_3 + \eta H_2 + + \beta H_1 = 0$, тогда $H_i \neq 0$, когда $\mu C_1 + \eta C + \beta = 0$.

Далее, рассматриваем

$$\begin{gathered} H_1 + \alpha^2(Q'H_1g) - \nu\alpha^2(H_1'g) = 0, \\ \text{отсюда} \quad Q' = \frac{\nu H_1'}{H_1} - \frac{1}{\alpha^2 g}. \end{gathered} \tag{1.14}$$

Перепишем систему (1.11), учитывая полученные зависимости

$$\rho' + \alpha^2(\rho Q'g)' = 0, \quad \rho(1 + \alpha^2 Q'g) = M,$$
$$\rho\left(\frac{\nu\alpha^2 gH_1'}{H_1}\right) = M,$$
$$\rho[Q''g + Q'g' + Q'Q''\alpha^2 g^2 + (Q')^2\alpha^2 gg'] +$$
$$+ p' + [0.5H_1^2(1 + C^2 + C_1^2)]' = 0,$$
$$\rho(Q'g)'[1 + \alpha^2 Q'g] + p' + [0.5H_1^2(1 + C^2 + C_1^2)]' = 0,$$

$$M\left(\frac{\nu gH_1'}{H_1} - \frac{1}{\alpha^2}\right) + p + 0.5H_1^2(1 + C^2 + C_1^2) = M_1, \tag{1.15}$$
$$M_1 = \text{const}, \quad M = \text{const},$$

$$p = M_1 - M\left(\frac{\nu gH_1'}{H_1} - \frac{1}{\alpha^2}\right) - 0.5H_1^2(1 + C^2 + C_1^2),$$

$$\varepsilon = \frac{1}{(\gamma - 1)M}\left(\frac{\alpha^2\nu gH_1'}{H_1}\right)\times$$
$$\times\left[M_1 - M\left(\frac{\nu gH_1'}{H_1} - \frac{1}{\alpha^2}\right) - 0.5H_1^2(1 + C^2 + C_1^2)\right].$$

Из системы (1.11) имеем

$$\rho\{\varepsilon' + [Q'\varepsilon' + (\gamma - 1)\varepsilon Q'']\alpha^2 g + (\gamma - 1)\varepsilon Q'\alpha^2 g'\} -$$
$$- \nu\alpha^2 g[(H_3')^2 + (H_1')^2 + (H_2')^2] = 0.$$

Отсюда получаем

$$\varepsilon' M + p\left(\frac{\nu\alpha^2 gH_1'}{H_1}\right)' - \nu\alpha^2 g(1 + C^2 + C_1^2)(H_1')^2 = 0. \tag{1.16}$$

В итоге, учитывая (1.15) и (1.16), выпишем уравнение, которому должна удовлетворять функция $H_1(\psi)$ при заданном $g(\psi)$ или функция $g(\psi)$ при заданном $H_1(\psi)$

$$\begin{gathered} \left\{-\frac{M(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)}\left(\frac{\nu gH_1'}{H_1}\right) + \frac{\gamma}{(\gamma - 1)}\times\right. \\ \left.\times\left[M_1 + \frac{M}{\alpha^2} - 0.5H_1^2(1 + C^2 + C_1^2)\right]\right\}\left(\frac{gH_1'}{H_1}\right)' - \\ - \frac{\gamma}{(\gamma - 1)}g(1 + C^2 + C_1^2)(H_1')^2 = 0, \\ \nu \neq 0, \quad \alpha \neq 0. \end{gathered} \tag{1.17}$$

Пример 1. Пусть $g = \text{const}$, тогда для определения $H_1(\psi)$ имеем

$$\begin{gathered} \left\{-\frac{M(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)}(\nu gH_1') + \frac{\gamma}{(\gamma - 1)}\times\right. \\ \left.\times H_1\left[M_1 + \frac{M}{\alpha^2} - 0.5H_1^2(1 + C^2 + C_1^2)\right]\right\}H_1''H_1 - \\ - \left\{-\frac{M(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)}(\nu gH_1') + \frac{\gamma}{(\gamma - 1)}\times\right. \\ \left.\times H_1\left[M_1 + \frac{M}{\alpha^2} + 0.5H_1^2(1 + C^2 + C_1^2)\right]\right\}(H_1')^2. \end{gathered} \tag{1.18}$$

Уравнение (1.18) имеет частное решение $H_1 = \exp(k\psi)$, если $(1 + C^2 + C_1^2) = 0$. Тогда $\psi = gt + a(x,y,z)$, $\psi_x = \beta g = a_x$, $a = \beta g x + a_1(y,z)$. Далее получаем $a(x,y,z) = g(\beta x + \eta y + \mu z)$, $\psi = g(t + \beta x + \eta y + \mu z)$.

Пример 2. Пусть $H_1' = H_1$, тогда $H_1 = k\exp\psi$, $k = \text{const}$. Если $\alpha = 1$ из (1.17) получаем

$$g'\left\{-\frac{M(\gamma+1)}{(\gamma-1)}\nu g + \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\times\right.$$
$$\left.\times\left[M_1 + M - 0.5k^2\exp(2\psi)(1 + C^2 + C_1^2)\right]\right\} - \quad (1.19)$$
$$-\frac{\gamma}{(\gamma-1)}gk^2\exp(2\psi)(1 + C^2 + C_1^2) = 0.$$

Решением уравнения (1.19) является функция $g(\psi) = \exp(2\psi)$, если $k^2 = M\nu(\gamma+1)/[\gamma(1 + C^2 + C_1^2)]$, $M_1 = -M$. В этом случае $\psi_t = \exp(2\psi)$, $\psi = -0.5\ln(-2t + a(x,y,z))$, $\psi_x = \beta\exp(2\psi) = 0.5a_x\exp(2\psi)$, $a_x = 2\beta$. Аналогично получаем $a = 2\eta$, $a_z = 2\mu$. Итак, $\psi = 0.5\ln[2(t + \beta x + \eta y + \mu z)]$, $\beta^2 + \eta^2 + \mu^2 = 1$.

2. О ВОЗМОЖНОСТИ ОБТЕКАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОТОКОМ ИОНИЗИРОВАННОГО ГАЗА В ПОПЕРЕЧНЫМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Утверждение 4. *На поверхности* $a(x,y,z) = 0$ *можно расположить линии тока потенциального поля скоростей и силовые линии магнитного поля рассматриваемой системы уравнений* (1.1).

Доказательство. Если линии тока потенциального поля скоростей и силовые линии магнитного поля расположены на поверхности $a(x,y,z) = 0$, то $a_xQ_x + a_yQ_y + a_zQ_z = 0$, $a_xH_1 + a_yH_2 + a_zH_3 = 0$. Выписанные условия выполняются, если $\nabla a = \nabla Q \times \mathbf{H}$. Покоординатная запись имеет вид

$$a_x = H_2Q_z - H_3Q_y, \quad a_y = H_3Q_x - H_1Q_z, \quad a_z = H_1Q_y - H_2Q_x. \quad (2.1)$$

Смешанные производные функции $a(x,y,z)$ в (2.1) должны быть равны. Ранее получено (см. следствие 3), что $\mu C_1 + \eta C + \beta = \beta(g_9C_1 + g_{10}C + 1) = 0$. Учитывая это, выписываем условия, когда смешанные производные равны

$$a_{xy} = a_{yx}, \quad \frac{\partial H_2}{\partial y}Q_z + H_2Q_{zy} - H_3Q_{yy} - Q_y\frac{\partial H_3}{\partial y} =$$
$$= H_3Q_{xx} - H_1Q_{zx} + Q_x\frac{\partial H_3}{\partial x} - Q_z\frac{\partial H_1}{\partial x},$$

$$-\alpha^2C_1[g^2H_1'Q' + H_1(Q''g^2 + Q'gg')] = 0,$$

$$a_{xz} = a_{zx}, \quad \frac{\partial H_2}{\partial z}Q_z + H_2Q_{zz} - H_3Q_{yz} - Q_y\frac{\partial H_3}{\partial z} =$$
$$= H_1Q_{yx} - H_2Q_{xx} + Q_y\frac{\partial H_1}{\partial x} - Q_x\frac{\partial H_2}{\partial x},$$

$$\alpha^2C[H_1'g^2Q' + H_1(Q''g^2 + Q'gg')] = 0,$$

$$a_{yz} = a_{zy}, \quad H_3Q_{xz} - H_1Q_{zz} + Q_x\frac{\partial H_3}{\partial z} - Q_z\frac{\partial H_1}{\partial z} =$$
$$= H_1Q_{yy} - H_2Q_{xy} + Q_y\frac{\partial H_1}{\partial y} - Q_x\frac{\partial H_2}{\partial y}.$$

$$-\alpha^2[H_1'g^2Q' + H_1(Q''g^2 + Q'gg')] = 0.$$

Из (1.14) имеем

$$Q' = \frac{\nu H_1'}{H_1} - \frac{1}{\alpha^2 g}, \quad Q'' = \left(\frac{\nu H_1'}{H_1}\right)' + \frac{g'}{\alpha^2g^2}. \quad (2.2)$$

Отсюда получаем дополнительное условие, которому должны удовлетворять функции $H_1(\psi)$ и $g(\psi)$

$$\left(\frac{H_1'}{H_1}\right)\left(\frac{H_1'}{H_1}g - \frac{1}{\alpha^2\nu}\right) + \left(\frac{H_1'}{H_1}\right)'g + g'\left(\frac{H_1'}{H_1}\right) = 0. \quad (2.3)$$

Перепишем условие (1.17) в виде

$$-\left\{-\frac{M(\gamma+1)}{(\gamma-1)}\left(\frac{\nu gH_1'}{H_1}\right) + \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\times\right.$$
$$\left.\times\left[M_1 + \frac{M}{\alpha^2} - 0.5H_1^2(1 + C^2 + C_1^2)\right]\right\}\times$$
$$\times\left[\left(\frac{H_1'}{H_1}\right)\left(\frac{H_1'}{H_1}g - \frac{1}{\alpha^2\nu}\right) + \left(\frac{H_1'}{H_1}\right)'g\right] + \quad (2.4)$$
$$+\left\{-\frac{M(\gamma+1)}{(\gamma-1)}\left(\frac{\nu gH_1'}{H_1}\right) + \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\times\right.$$
$$\left.\times\left[M_1 + \frac{M}{\alpha^2} - 0.5H_1^2(1 + C^2 + C_1^2)\right]\right\}g\left(\frac{H_1'}{H_1}\right)' -$$
$$-\frac{\gamma}{(\gamma-1)}g(1 + C^2 + C_1^2)(H_1')^2 = 0,$$
$$\nu \neq 0, \quad \alpha \neq 0.$$

Наличие при редукции (1.1) к системе ОДУ в (1.12) произвольной функции $g(\psi)$ позволяет обеспечить выполнение этих условий. Из линейного уравнения (2.3) найдем $g(H_1(\psi))$ и, подставив полученное выражение в (2.4), получим уравнение для определения $H_1(\psi)$, через которое выражаются все остальные функции решения системы (1.11). Что и требовалось доказать.

Итак, решив систему (2.3), (2.4), найдем $\psi(x, y, z, t)$ из уравнения $\psi_t = g(\psi)$, затем $H_1(\psi)$, $H_2(\psi) = CH_1(\psi)$, $H_3(\psi) = C_1H_1(\psi)$, Q' из (2.2) и, следовательно, $Q_x = Q'\psi_x$, $Q_y = Q'\psi_y$, $Q_z = Q'\psi_z$, подставив которые в (2.1), определим вид поверхности $a(x, y, z) = 0$. Причем, как показано выше (см. следствие 4), $uH_1 + vH_2 + wH_3 = 0$, следовательно плазма удерживается на данной поверхности поперечным магнитным полем. Заметим, что при получении поверхности $a(x, y, z) = 0$ имеем константный произвол.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Системы уравнений магнитной газодинамики широко используются при описании многих физических процессов с разной степенью точности, в том числе при изучении динамики плазмы и управления ее движением.

В данной статье рассматривается одна из таких моделей (см. (1.1)). Для изучения используется метод редукции систем уравнений в частных производных к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (см. разделы Первый подход, Второй подход). Применяемые подходы позволили получить точные решения системы, которые могут служить тестами при численных расчетах (см. примеры 1, 2). Предложен алгоритм получения поверхностей, имеющих константный произвол (см. (2.1)), на которых возможно расположить линии тока потенциального поля скоростей и силовые линии поперечного магнитного поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сорокина Е.А., Ильгисонис В.И.* Уравнения равновесия плазмы в магнитном поле с трехмерными магнитными поверхностями // Физика плазмы, 2019. Т. 45. № 12. С. 1065–1071. https://doi.org/10.1134/S0367292119120084
2. *Брушлинский К.В.* Математические модели плазмы в проектах Морозова // Физика плазмы, 2019. Т. 45. № 1. С. 37–50. https://doi.org/10.1134/S0367292119010025
3. *Брушлинский К.В.* Численные модели течений ионизующегося газа // Энциклопедия низкотемпературной плазмы / ред. В.Е. Фортов. Сер. Б. Т. VII-1, ч. 2. М.: ЯНУС-К, 2008. С. 84–90.
4. *Калиткин Н.Н., Костомаров Д.П.* Математические модели физики плазмы (обзор) // Матем. моделирование. 2006. Т. 18. № 11. С. 67–94.
5. *Meleshko S.V., Moyo S., Webb G.M.* Solutions of generalized simple wave type of magnetic fluid // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2021. V. 103. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.105991
6. *Пустовитов В.Д., Чукашов Н.В.* Аналитическое решение внешней задачи равновесия плазмы эллиптического сечения в токамаке // Физика плазмы, 2021. Т. 47. № 10. С. 876–886. https://doi.org/10.31857/S0367292121100073
7. *Ledentsov L.S., Somov B.V.* Discontinuous plasma flows in magnetohydrodynamics and in the physics of magnetic reconnection // Physics-Uspekhi. 2015. V. 58. Issue 2. P. 107–133. https://doi.org/10.3367/UFNe.0185.201502a.0113
8. *Ульянов О.Н., Рубина Л.И.* О редукции одной системы уравнений в частных производных к системам обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник НИЯУ МИФИ. 2021. Т. 10. № 5. С. 418–428. https://doi.org/10.1134/S2304487X21050102
9. *Ульянов О.Н., Рубина Л.И.* О некоторых решениях одной системы уравнений плазмостатики // Вестник НИЯУ МИФИ. 2021. Т. 10. № 1. С. 12–18. https://doi.org/10.1134/S2304487X20060103
10. *Полянин А.Д., Журов А.И.* Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. М.: Издательство “ИПМех РАН”, 2020. 384 с.
11. *Clarkson P.A., Kruskal M.D.* New similarity reductions of the Boussinesq equation // J. Math. Phys. 1989. V. 30. № 10. P. 2201–2213.
12. *Clarkson P.A., Ludlow D.K., Priestley T.J.* The classical, direct, and nonclassical methods for symmetry reductions of nonlinear partial differential equations // Methods and Applications of Analysis. 1997. V. 4. Issue 2. P. 173–195.
13. *Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения к газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984. 272 с.
14. *Ovsiannikov L.V.* Group Analysis of Differential Equations. N.Y.: Academic Press, 1982. 416 p.
15. *Fushchych W.* Ansatz’95 // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 1995. V. 2. Issue 3–4. P. 216–235. https://doi.org/10.2991/jnmp.1995.2.3-4.2
16. *Курант Р.* Методы математической физики. Т. 2. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
17. *Эйхенвальд А.А.* Теоретическая физика. Москва; Ленинград: Государственное издательство, 1926. Ч. 1. Теория поля. 271 с.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2022, vol. 11, no. 2, pp. 122–132

On the Reduction of the Magnetic Gas Dynamics System of Equations to Systems of Ordinary Differential Equations

O. N. Ul'yanov[a,#] and L. I. Rubina[a,##]

[a] *Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch, Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia*

[#]*e-mail: secretary@imm.uran.ru*

[##]*e-mail: rli@imm.uran.ru*

Received July 21, 2022; revised July 22, 2022; accepted July 26, 2022

Abstract—A magnetic gas dynamics system of equations including the magnetic viscosity is considered. To study this system, systems of partial differential equations is reduced to systems of ordinary differential equations using two approaches. In the first approach, the independent variable ψ of systems of ordinary differential equations is such that the equation $\psi(x, y, z, t)$ = const defines the level surface of the solutions of the original system (components of the velocity vector and components of the magnetic field strength). In the second approach, irrotational motions of plasma are considered, in which the components of the velocity are derivatives of some function $Q = Q(x, y, z, t)$. In this case, the equation $\psi(x, y, z, t)$ = const defines the level surface of the function $Q = Q(x, y, z, t)$ and the components of the magnetic field vector. Some exact solutions of the considered system of partial differential equations are found. It is shown that functional arbitrariness is preserved in each of the considered approaches when determining level surfaces. The available functional arbitrariness is used in the problem of location of streamlines of the potential plasma flow and magnetic field lines on a certain surface. An algorithm for obtaining such a surface is described.

Keywords: systems of partial differential equations, systems of ordinary differential equations, magnetic gas dynamics system of equations, reductions, exact solutions

DOI: 10.56304/S2304487X22020122

REFERENCES

1. Sorokina E.A., Ilgisonis V.I. Uravnenie ravnovesiya plazmy v magnitnom pole s trekhmernymi magnitnymi poverhnostyami. [Equations of plasma equilibrium in a magnetic field with three-dimensional magnetic surfaces]. *Plasma Physics Reports*, 2019, vol. 45, issue 12, pp. 1093–1098. https://doi.org/10.1134/S1063780X19120080
2. Brushlinskii K.V. Matematicheskie modeli plazmy v proektah Morozova [Mathematical models of plasma in Morozov's projects]. *Plasma Physics Reports*, 2019, vol. 45, issue 1, pp. 33–45. https://doi.org/10.1134/S1063780X19010021
3. Brushlinskii K.V. Chislennye modeli reshenij ionizuyushchegosya gaza [Numerical models of ionizing gas flows]. In: *Entsiklopediya nizkotemperaturnoy plazmy* (Encyclopedia of low-temperature plasma / ed. V.E. Fortov.), ser. B, vol. VII-1, part. 2. Moscow, YaANUS-K Publ., 2008. pp. 84–90. (in Russian)
4. Kalitkin N.N., Kostomarov D.P. Matematicheskie modeli fiziki plazmy (obzor) [Mathematical models of plasma physics (a survey)]. *Matematicheskoe Modelirovanie*, 2006, vol. 18, issue 11, pp. 67–94. (in Russian)
5. Meleshko S.V., Moyo S., Webb G.M. Solutions of generalized simple wave type of magnetic fluid, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, vol. 103. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.105991
6. Pustovitov V.D., Chukashev N.V. Analiticheskoe reshenie vneshnej zadachi ravnovesiya plazmy ellipticheskogo secheniya v Tokomake. [Analytical solution to external equilibrium problem for plasma with elliptic cross section in a Tokamak]. *Plasma Physics Reports*, 2021, vol. 47, issue 10, pp. 956–966. https://doi.org/10.1134/S1063780X2110007X
7. Ledentsov L.S., Somov B.V. Discontinuous plasma flows in magnetohydrodynamics and in the physics of magnetic reconnection, *Physics-Uspekhi*, 2015, vol. 58, issue 2, pp. 107–133. https://doi.org/10.3367/UFNe.0185.201502a.0113
8. Ulyanov O.N., Rubina L.I. O redukcii odnoj sistemy uravnenij v chastnyh proizvodnyh k sistemah obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. [On the reduction of one system of partial differential equations to systems of ordinary differential equations]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2021, vol. 10, no. 5, pp. 418–428. https://doi.org/10.1134/S2304487X21050102 (in Russian)
9. Ulyanov O.N., Rubina L.I. O nekotorykh resheniyakh odnoy sistemy uravneniy plazmostatiki. [On some solutions of one system of plasmostatics equations]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2021, vol. 10, no. 1, pp. 12–18.

https://doi.org/10.1134/S2304487X20060103 (in Russian).

10. Polyanin A.D., Zhurov A.I. *Metody razdeleniya peremennykh i tochnyye resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki* [Methods of Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear Equations of Mathematical Physics], Moscow, Izdatel'stvo "IPMekh RAN" Publ., 2020. 384 p. (in Russian)
11. Clarkson P.A., Kruskal M.D. New similarity reductions of the Boussinesq equation, *J. Math. Phys.* 1989, vol. 30, issue 10, pp. 2201–2213.
12. Clarkson P.A., Ludlow D.K., Priestley T.J. The classical, direct, and nonclassical methods for symmetry reductions of nonlinear partial differential equations, *Methods and Applications of Analysis*, 1997, vol. 4, issue 2, pp. 173–195.
13. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N. *Metod differentsial'nykh svyazey i yego prilozheniya v gazovoy dinamike* (Method of differential constraints and its applications in gas dynamics), Novosibirsk: Nauka Publ., 1984. 272 p. (in Russian)
14. Ovsiannikov L.V. *Group Analysis of Differential Equations*. N. Y.: Academic Press, 1982. 416 p.
15. Fushchych W. Ansatz '95, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 1995, vol. 2, issue 3–4. pp. 216–235. https://doi.org/10.2991/jnmp.1995.2.3-4.2
16. Courant R., Hilbert D. *Metody matematicheskoy fiziki. vol. II: Uravneniya s chastnymi proizvodnymi*. [Methods of mathematical physics. vol. 2: Partial differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1964, 830 p.
17. Jejhenvald A.A. *Teoreticheskaya fizika, Chast 1. Teoriya polya* (Theoretical physics. Pt.1 Field theory), Moscow; Leningrad, Gosudarstvennoe izdatel'stvo Publ., 1926, 272 p. (in Russian)