

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2019 г. А. Д. Полянин^{1,2,3,*}

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

² Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия

³ Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*e-mail: polyanin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 27.11.2018 г.

После доработки 27.11.2018 г.

Принята к публикации 04.12.2018 г.

Описаны различные классы нелинейных телеграфных уравнений с переменными коэффициентами

$$c(x)u_{tt} + d(x)u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)u_x + p(x)f(u),$$

которые допускают точные решения с функциональным разделением переменных вида $u = U(z)$, $z = \varphi(x, t)$. Показано, что функция источника $f(u)$ и любые четыре из пяти коэффициентов $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, $p(x)$ этих уравнений могут быть выбраны произвольно, а оставшийся коэффициент через них выражается. Исследованы свойства и построены некоторые решения переопределенной нелинейной системы дифференциальных уравнений, которым удовлетворяет функция $\varphi(x, t)$. Приведены примеры конкретных уравнений и их точных решений. Построены также некоторые точные решения типа обобщенной бегущей волны более сложных нелинейных телеграфных уравнений с запаздыванием вида

$$c(x)u_{tt} + d(x)u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)u_x + p(x)f(u, w), \quad w = u(x, t - \tau),$$

где $\tau > 0$ – время запаздывания, $f(u, w)$ – произвольная функция двух аргументов.

Ключевые слова: нелинейные телеграфные уравнения, нелинейные уравнения типа Клейна–Гордона, дифференциальные уравнения с запаздыванием, точные решения, решения с функциональным разделением переменных, решения типа обобщенной бегущей волны

DOI: 10.1134/S2304487X1902010X

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Краткий обзор литературы

Преобразования и точные решения различных классов нелинейных уравнений типа Клейна–Гордона вида

$$u_{tt} = [f_1(u)u_x]_x + f_2(u) \quad (1)$$

рассматривались во многих работах (см., например, [1–17] и цитируемую в них литературу). Для построения точных решений чаще всего использовались классический и неклассические методы исследования симметрий [1, 3, 4, 6, 10, 16, 17] и методы обобщенного и функционального разделения переменных [5, 7, 9, 12, 14, 15, 17].

В общем случае уравнение (1) допускает решения типа бегущей волны $u = U(kx - \lambda t)$ и при $f_2(u) = 0$ имеет автомодельное решение $u = U(x/t)$ [1]. Помимо указанных случаев известны также допускающие точные решения уравнения вида (1),

в которых две функции $f_1(u)$ и $f_2(u)$ выражаются через одну произвольную функцию $\varphi(u)$ [17]. Важно отметить, что при $f_2(u) = 0$ уравнение (1) может быть линеаризовано [11, 13, 14, 16]; в этом случае для произвольной функции $f_1(u)$ его некоторые точные решения, представленные в параметрической форме, приведены в [13, 14, 17].

В [8, 13, 14, 17–20] рассматривались нелинейные уравнения типа Клейна–Гордона с переменными коэффициентами автономного вида

$$c(x)u_{tt} = [a(x)f_1(u)u_x]_x + b(x)f_2(u). \quad (2)$$

В табл. 1 собраны некоторые уравнения вида (2), содержащие одну произвольную функцию искомой величины или пространственной переменной, допускающие точные решения (в решении уравнения № 1 вместо $\cosh\left(\frac{1}{2}\lambda t\right)$ можно взять $\sinh\left(\frac{1}{2}\lambda t\right)$).

Таблица 1. Нелинейные уравнения типа Клейна–Гордона, зависящие от произвольных функций, допускающие точные решения. Здесь $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ – произвольные функции, b_1 , b_2 , k , λ – свободные параметры

№	Уравнение	Вид решения или пояснение	Литература
1	$u_{tt} = u_{xx} + e^{\lambda x} f(u)$	$u = U(z)$, $z = e^{\frac{1}{2}\lambda x} \cosh\left(\frac{1}{2}\lambda t\right)$	[13, 14]
2	$u_{tt} = (x^k u_x)_x + f(u)$	$u = U(z)$, $z = 4x^{2-k} - (2-k)^2 t^2$, $k \neq 2$	[8, 13, 14]
3	$u_{tt} = (x^k u_x)_x + x^{k-2} f(u)$	$u = U(z)$, $z = x^{(k-2)/2} t$	[18]
4	$u_{tt} = (e^{\lambda x} u_x)_x + f(u)$	$u = U(z)$, $u = 4e^{-\lambda x} - \lambda^2 t^2$	[8, 13, 14]
5	$u_{tt} = (u^k u_x)_x + b(x)u^{k+1}$	$u = \varphi(x)\psi(t)$	[14]
6	$u_{tt} = (e^{\lambda u} u_x)_x + b(x)e^{\lambda u}$	$u = \varphi(x) + \psi(t)$	[14]
7	$u_{tt} = (u^{-4/3} u_x)_x + b(x)u^{-1/3}$	уравнение приводится к виду $v_{tt} = (v^{-4/3} v_x)_x$	[8, 13, 14]
8	$u_{tt} = [a(x)u^k u_x]_x$	$u = \varphi(x)\psi(t)$	[8, 13, 14]
9	$u_{tt} = [a(x)u_x]_x + b_1 u \ln u + b_2 u$	$u = \varphi(x)\psi(t)$	[13, 14]

Ниже приведены еще три уравнения, обобщающие уравнения № 3, 5, 6, 8 в табл. 1, которые содержат две произвольные функции и допускают точные решения:

$$u_{tt} = [a(x)u^k u_x]_x + b(x)u^{k+1}, \quad u = \varphi(x)\psi(t)$$

(обобщает уравнения №№ 5, 8);

$$u_{tt} = [a(x)e^{\lambda u} u_x]_x + b(x)e^{\lambda u}, \quad u = \varphi(x) + \psi(t)$$

(обобщает уравнение № 6);

$$u_{tt} = [x^k g(u)u_x]_x + x^{k-2} f(u), \quad u = U(x^{(k-2)/2} t)$$

(обобщает уравнение № 3).

Отметим также, что уравнение

$$u_{tt} = [e^{\lambda x} g(u)u_x]_x + e^{\lambda x} f(u),$$

также имеет точное (инвариантное) решение вида $u = U(z)$, $z = e^{\lambda x/2} t$.

В [8, 13, 14, 21–23] исследовались симметрии и были приведены некоторые точные решения нелинейных телеграфных уравнений вида

$$c(x)u_{tt} = [a(x)f_1(u)u_x]_x + b(x)f_2(u)u_x, \quad (3)$$

причем в [21, 22] рассматривался случай $a(x) = b(x) = 1$.

Другие родственные и более сложные нелинейные уравнения гиперболического типа исследовались, например, в [24–29].

Отметим также, что точные решения нелинейных уравнений Клейна–Гордона с запаздыванием вида

$$u_{tt} = au_{xx} + f(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (4)$$

где $\tau > 0$ – время запаздывания, были получены в [30, 31].

В данной статье будут исследоваться допускающие точные решения нелинейные уравнения Клейна–Гордона и нелинейные телеграфные уравнения достаточно общего вида (в том числе и уравнения с запаздывающим аргументом), которые зависят от одной или нескольких произвольных функций.

Важно отметить, что точные решения нелинейных уравнений математической физики, которые содержат произвольные функции и поэтому обладают значительной общностью, представляют наибольший практический интерес для тестирования и оценки точности приближенных аналитических и численных методов интегрирования соответствующих начально-краевых задач.

1.2. Используемая терминология

В данной статье термин *точное решение* будет использоваться в отношении нелинейных уравнений с частными производными, если его решение выражается:

- (i) в элементарных функциях;
- (ii) в замкнутом виде с использованием определенных или/и неопределенных интегралов;
- (iii) через решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или систем таких уравнений.

Допускаются также комбинации случаев (i)–(iii).

Для более сложных нелинейных уравнений в частных производных с запаздывающим аргументом дополнительно включаются также решения, которые выражаются через решения обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием.

2. ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Класс рассматриваемых уравнений.

Редукция нелинейного телеграфного уравнения к ОДУ

Будем рассматривать одномерные нелинейные телеграфные уравнения с переменными коэффициентами следующего вида:

$$c(x)u_{tt} + d(x)u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)u_x + p(x)f(u), \quad (5)$$

где $f(u)$ — произвольная функция. Некоторые из пяти функциональных коэффициентов $a = a(x) > 0$, $b = b(x)$, $c = c(x) > 0$, $d = d(x)$, $p = p(x)$ могут быть свободными, а другие будут через них выражаться в результате последующего анализа (свободные коэффициенты могут выбираться по-разному, см. далее). Без ограничения общности далее будем считать, что $p > 0$ (при $p < 0$ надо переобозначить функции p, f на $-p, -f$).

Замечание 1. При $c(x) \equiv 0$ уравнение (5) вырождается в нелинейное уравнение конвективной диффузии с объемной реакцией. Редукции и точные решения подобных и более сложных нелинейных уравнений параболического типа рассматривались, например, в [8, 13, 14, 17, 32–54].

Замечание 2. В специальном случае $b(x) \equiv d(x) \equiv 0$ уравнение (5) будем называть нелинейным уравнением типа Клейна–Гордона.

Ищем точные решения уравнения (5) в виде суперпозиции функций

$$u = U(z), \quad z = \varphi(x, t). \quad (6)$$

Подставив (6) в (5), получим функционально-дифференциальное уравнение

$$[a(x)\varphi_x^2 - c(x)\varphi_t^2]U_{zz}'' + \{[a(x)\varphi_x]_x - c(x)\varphi_{tt} + b(x)\varphi_x - d(x)\varphi_t\}U_z' + p(x)f(U) = 0. \quad (7)$$

В частном случае $U(z) = z$, уравнение (7) совпадает с исходным уравнением (5) (т.е. на этом этапе никакие решения не потеряны). Потребуем теперь, чтобы выполнялись соотношения

$$p(x) = s(\varphi)[a(x)\varphi_x^2 - c(x)\varphi_t^2], \quad (8)$$

$$c(x)\varphi_{tt} + d(x)\varphi_t = [a(x)\varphi_x]_x + b(x)\varphi_x + k(\varphi)[a(x)\varphi_x^2 - c(x)\varphi_t^2], \quad (9)$$

где $s(\varphi), k(\varphi)$ — некоторые функции ($s \not\equiv 0$). Тогда уравнение (7) редуцируется к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$U_{zz}'' - k(z)U_z' + s(z)f(U) = 0. \quad (10)$$

Точные решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (10) для некоторых функций $k(z), s(z), f(U)$ можно найти в [55, 56].

В частном случае $k(z) \equiv 0$, что соответствует линейному уравнению (9), при $s(z) = 1$ общее решение уравнения (10) для любой функции $f(U)$ можно представить в неявном виде [55]:

$$\int [C_1 - 2 \int f(U) dU]^{-1/2} dU = C_2 \pm z, \quad (11)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Уравнения (8)–(10) позволяют несколькими способами конструктивно находить точные решения широкого класса нелинейных телеграфных уравнений вида (5).

Замечание 3. В уравнении (5) без ограничения общности два из пяти функциональных коэффициентов $a(x), b(x), c(x), d(x), p(x)$ можно положить равными единице. В частности, если поделить обе части уравнения на c , а затем перейти от t, x к новым независимым переменным $t, y = \int \sqrt{c/a} dx$, то получим уравнение в канонической форме $u_{tt} + d_1(y)u_t = u_{yy} + b_1(y)u_y + p_1(y)f(u)$. Нетрудно найти преобразование $t, \bar{y} = \bar{y}(y)$, которое приводит уравнение (5) к другой канонической форме $u_{tt} + d_2(\bar{y})u_t = [a_2(\bar{y})u_{\bar{y}}]_{\bar{y}} + p_2(\bar{y})f(u)$. Однако исследование уравнения в общем виде (5) более удобно поскольку включает его любые канонические и неканонические формы.

Замечание 4. В уравнениях (5), (7)–(9) вместо $a(x), b(x), c(x), d(x), p(x)$ могут стоять функции двух переменных $a(x, t), b(x, t), c(x, t), d(x, t), p(x, t)$.

2.2. Определяющая система уравнений и ее свойства. Прямая процедура построения точных решений

В случае общего положения уравнения (8) и (9) при заданных функциях $a = a(x), b = b(x), c = c(x), d = d(x), p = p(x), k(\varphi), s(\varphi)$ представляют собой переопределенную нелинейную систему уравнений относительно функции φ (эту систему будем называть *определяющей системой уравнений*).

Нелинейные преобразования

$$\varphi = F(\psi) \quad (12)$$

сохраняют вид уравнений (8) и (9), меняя функциональные коэффициенты $k(\varphi)$ и $s(\varphi)$ по правилу:

$$k(\varphi) \Rightarrow k(F(\psi))F_{\psi}'(\psi) + \frac{F_{\psi\psi}''(\psi)}{F_{\psi}'(\psi)}, \quad (13)$$

$$s(\varphi) \Rightarrow s(F(\psi)) \left[F_{\psi}'(\psi) \right]^2.$$

Вырожденному случаю $k(\varphi) \equiv 0$ соответствует линейное уравнение гиперболического типа с переменными коэффициентами (9). При $k(\varphi) \neq 0$ подстановка

$$\psi = C_1 \int K(\varphi) d\varphi + C_2, \quad K(\varphi) = \exp \left[\int k(\varphi) d\varphi \right], \quad (14)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, приводит нелинейное уравнение (9) к линейному уравнению

$$c(x)\psi_{tt} + d(x)\psi_t = [a(x)\psi_x]_x + b(x)\psi_x. \quad (15)$$

В частном случае $k(\psi) = k = \text{const}$ можно использовать подстановку

$$\varphi = k^{-1} \ln |\psi|, \quad (16)$$

которая следует из (14).

Поскольку преобразования вида (12) меняют только функциональные коэффициенты $k(\varphi)$ и $s(\varphi)$ в уравнениях (8) и (9), то без потери общности можно выбрать функцию F так, чтобы упростить одно из указанных уравнений.

Прямая процедура построения точных решений нелинейных уравнений вида (5), заключается в том, что функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, $f(u)$ считаются заданными, а искомыми являются функции $u = u(x)$ и $p = p(x)$. В этом случае, задав некоторым образом функции $k(\varphi)$ и $s(\varphi)$, сначала надо найти частные решения $p(x)$ и $\varphi = \varphi(x, t)$ уравнений (8) и (9) (напомним, что последнее уравнение может быть линеаризовано, см. выше). После этого решение уравнения (5) с учетом зависимости (8) определяется по формуле (6), где функция $U(z)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения (10).

Решения линейных уравнений (9) при $k(\varphi) \equiv 0$ и (15) можно строить методом разделения переменных. В частности, уравнение (15) при $d(x) \equiv 0$ имеет точные решения вида:

$$\psi = \alpha t^2 + \beta t + \zeta(x), \quad (17)$$

$$[a(x)\zeta'_x]'_x + b(x)\zeta'_x - 2\alpha c(x) = 0;$$

$$\psi = [\alpha \exp(-\lambda t) + \beta \exp(\lambda t)] \zeta(x), \quad (18)$$

$$[a(x)\zeta'_x]'_x + b(x)\zeta'_x - \lambda^2 c(x)\zeta = 0;$$

$$\psi = [\alpha \cos(\lambda t) + \beta \sin(\lambda t)] \zeta(x), \quad (19)$$

$$[a(x)\zeta'_x]'_x + b(x)\zeta'_x + \lambda^2 c(x)\zeta = 0,$$

где α , β , λ — произвольные постоянные. Уравнение в (17) легко интегрируется с помощью подстановки $w(x) = \zeta_x$, а решения линейных уравнений (18) и (19) для различных функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ приведены в [55, 56]. Другие точные решения уравнения (15) для некоторых функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ можно найти в [57].

Далее, не претендуя на исчерпывающий анализ переопределенной системы (8) и (9), продемонстрируем как с ее помощью путем подходящего выбора функциональных коэффициентов $k(\varphi)$ и $s(\varphi)$ можно строить точные решения уравнений вида (5).

2.3. Случай $k(\varphi) = k$ и $s(\varphi) = 1$. Решения типа обобщенной бегущей волны

Нелинейные телеграфные уравнения (5) допускают точные решения типа обобщенной бегущей волны (6), где

$$\varphi(x, t) = t + \int g(x) dx. \quad (20)$$

Здесь функция $g(x)$ может задаваться или определяться в ходе последующего анализа (в зависимости от поставленной цели, см. далее). Подставив (20) в уравнения (8) и (9) и полагая в них $s(\varphi) = 1$ и $k(\varphi) = k$, получим

$$p(x) = a(x)g^2(x) - c(x), \quad (21)$$

$$d(x) = [a(x)g(x)]'_x + b(x)g(x) + k[a(x)g^2(x) - c(x)]. \quad (22)$$

Соотношение (22) связывает четыре первых функциональных коэффициента уравнения (5) и входящую в (20) функцию $g = g(x)$ (это соотношение является дифференциальным относительно функций a и g и алгебраическим относительно функций b , c и d), а соотношение (21) является алгебраическим и служит для определения функционального коэффициента $p(x)$.

Если четыре функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ считать заданными, то соотношение (22) при $k \neq 0$ представляет собой уравнение Риккати относительно функции $g = g(x)$, которое можно записать в виде

$$a(x)g'_x + ka(x)g^2 + [b(x) + a'_x(x)]g - kc(x) - d(x) = 0. \quad (23)$$

Обширный список точных решений этого уравнения для функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ различного вида можно найти в [55, 56]. Рассмотрим два случая.

Вырожденный случай. При $k = 0$ уравнение Риккати (23) вырождается в линейное уравнение, общее решение которого имеет вид

$$g(x) = \frac{E(x)}{a(x)} \left[\int \frac{d(x)}{E(x)} dx + m \right], \quad (24)$$

$$E(x) = \exp \left[- \int \frac{b(x)}{a(x)} dx \right],$$

где m — произвольная постоянная.

Пример 1. Пусть один из коэффициентов уравнения произвольным образом зависит от пространственной переменной $a = a(x)$, а три других являются константами $b(x) = d(x) = 0$, $c(x) = 1$. По формулам (24) находим $g(x) = m/a(x)$. Подставив эту функцию в (20) и (21), получим $\varphi(x) = t + m \int \frac{dx}{a(x)}$, $p(x) = \frac{m^2}{a(x)} - 1$. Поэтому нелинейное уравнение типа Клейна–Гордона

$$u_{tt} = [a(x)u_x]_x + \left[\frac{m^2}{a(x)} - 1 \right] f(u), \quad (25)$$

зависящее от двух произвольных функций $a(x)$ и $f(u)$, допускает точное решение с функциональным разделением переменных

$$u = U(z), \quad z = t + m \int \frac{dx}{a(x)}, \quad (26)$$

где функция $U(z)$ описывается разрешимым автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$U''_{zz} + f(U) = 0 \quad (27)$$

(получено подстановкой значений $k = 0$ и $s = 1$ в (10)), общее решение которого можно представить в неявном виде (11).

Подставляя в (25), например $a(x) = e^{\lambda x}$, получим нелинейное уравнение

$$u_t = (e^{\lambda x} u_x)_x + (m^2 e^{-\lambda x} - 1) f(u), \quad (28)$$

допускающее точное решение для произвольной функции $f(u)$.

Пример 2. Рассмотрим случай $a = a(x)$, $b(x) = 0$, $c(x) = d(x) = 1$. По формулам (24) при $m = 0$ имеем $g(x) = x/a(x)$. Подставив эту функцию в (20) и (21), получим $\varphi(x) = t + \int \frac{x dx}{a(x)}$, $p(x) = \frac{x^2}{a(x)} - 1$. Поэтому нелинейное телеграфное уравнение

$$u_{tt} + u_t = [a(x)u_x]_x + \left[\frac{x^2}{a(x)} - 1 \right] f(u), \quad (29)$$

зависящее от двух произвольных функций $a(x)$ и $f(u)$, допускает точное решение с функциональным разделением переменных

$$u = U(z), \quad z = t + \int \frac{x dx}{a(x)}, \quad (30)$$

где функция $U(z)$ определяется из разрешимого дифференциального уравнения (27).

Пример 3. Положим теперь $a = a(x)$, $b = -a_x(x)$, $c(x) = 1$, $d(x) = 0$. По формулам (24) находим $g(x) = m$. Подставив эту функцию в (20) и (21), получим $\varphi(x) = t + mx$, $p(x) = m^2 a(x) - 1$. Поэтому нелинейное уравнение типа Клейна–Гордона

$$u_{tt} = a(x)u_{xx} + [m^2 a(x) - 1] f(u), \quad (31)$$

зависящее от двух произвольных функций $a(x)$ и $f(u)$, допускает точное решение

$$u = U(z), \quad z = t + mx, \quad (32)$$

где функция $U(z)$ описывается разрешимым автономным обыкновенным дифференциальным уравнением (27).

Замечание 5. Решение (32) является *неинвариантным решением* уравнения (31) типа бегущей волны (это решение не может быть получено с помощью группового анализа рассматриваемого уравнения). В уравнении (31) вместо $a(x)$ может стоять произвольная функция двух переменных $a(x, t)$.

Невырожденный случай. При $k = \text{const}$ ($k \neq 0$) замена

$$g = \frac{1}{k} \frac{y'_x}{y} \quad (33)$$

приводит уравнение (23) к линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$a(x)y''_{xx} + [b(x) + a'_x(x)]y'_x - k[kc(x) + d(x)]y = 0. \quad (34)$$

Обширный список точных решений этого уравнения для функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ различного вида можно найти в [55, 56].

Пример 4. В случае постоянных коэффициентов $a = c = 1$, $b = d = 0$ общее решение уравнения (34) имеет вид

$$y = C_1 \cosh(kx) + C_2 \sinh(kx), \quad (35)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Полагая в (35) $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $k = 1$, с помощью формулы (33) находим

$$g(x) = \tanh x.$$

Подставив эту функцию в (20) и (21), имеем

$$\varphi(x) = t + \ln \cosh x, \quad p(x) = -1/\cosh^2 x.$$

Отсюда следует, что нелинейное уравнение типа Клейна–Гордона

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{1}{\cosh^2 x} f(u) \quad (36)$$

для произвольной функции $f(u)$ допускает точное решение с функциональным разделением переменных

$$u = U(z), \quad z = t + \ln \cosh x, \quad (37)$$

где функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$U''_{zz} - U'_z + f(U) = 0. \quad (38)$$

Таблица 2. Различные способы задания функциональных коэффициентов уравнения (5) при $p(x) = a(x)g^2(x) - c(x)$. Здесь k и C_1 – произвольные постоянные, $g^{-1} = 1/g$

№	Функции, которые задаются	Функция, которая определяется
1	$a = a(x), b = b(x), d = d(x), g = g(x)$	$c(x) = k^{-1}[ag'_x + kag^2 + (b + a'_x)g - d]$
2	$a = a(x), c = c(x), d = d(x), g = g(x)$	$b(x) = g^{-1}(kc + d - ag'_x) - a'_x - kag$
3	$a = a(x), b = b(x), c = c(x), g = g(x)$	$d(x) = ag'_x + kag^2 + (b + a'_x)g - kc$
4	$b = b(x), c = c(x), d = d(x), g = g(x)$	$a(x) = g^{-1}E \left[\int (kc + d - bg)E^{-1}dx + C_1 \right],$ $E = \exp(-k \int gdx)$

Порядок уравнения (38) может быть понижен на единицу подстановкой $U'_z = \Phi(U)$, которая приводит к уравнению Абеля второго рода в канонической форме. Точные решения уравнения (38) для некоторых зависимостей $f(U)$ имеются в [55, 56].

Другие способы построения точных решений. Рассмотрим теперь другие возможности построения точных решений уравнений вида (5) при $k(\varphi) = k$, $s(\varphi) = 1$ без интегрирования уравнения Риккати (23). Для этого будем задавать функцию $g(x)$ и любые три из четырех функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, а оставшуюся функцию будем находить, исходя из (23). В табл. 2 описаны возможные ситуации и приведены формулы для определения искомой функции. Итоговый вид нелинейного телеграфного уравнения определяется подстановкой функции $p(x) = a(x)g^2(x) - c(x)$ в (5).

Пример 5. Используем описанный в табл. 2 четвертый способ задания функциональных коэффициентов при $b = d = 0$, $c = 1$ для альтернативного представления точных решений рассматриваемого уравнения. Возможны два случая.

1. *Вырожденный случай при $k = 0$.* Из табл. 2, строка № 4, находим $a(x) = C_1 g^{-1}(x)$, $p(x) = C_1 g(x) - 1$, что (с точностью до переобозначений) приводит к уравнению (25) и его решению (26).

2. *Невырожденный случай при $k \neq 0$.* Из табл. 2, строка № 4, при $k \neq 0$, $C_1 = 0$ имеем $a(x) = kg^{-1}E \int E^{-1}dx$. Введем новую функцию $h = h(x)$, положив $h = \int E^{-1}dx$. Дифференцируя это выражение и учитывая формулу $E = \exp(-k \int gdx)$, выразим функцию g через h . После несложных вычислений, в результате получим $g = k^{-1}h''_{xx}/h'_x$,

$a = k^2 h/h''_{xx}$, $p = h(h'_x)^{-2}h''_{xx} - 1$. Отсюда следует, что уравнение

$$u_{tt} = [a(x)u_x]_x + p(x)f(u),$$

$$a(x) = k^2 \frac{h}{h''_{xx}}, \quad p(x) = \frac{hh''_{xx}}{(h'_x)^2} - 1, \quad (39)$$

где $f(u)$ и $h = h(x)$ – произвольные функции, $k \neq 0$ – произвольная постоянная, допускает точное решение с обобщенным разделением переменных

$$u = U(z), \quad z = t + \frac{1}{k} \ln |h'_x|.$$

Здесь функция $U(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения $U''_{zz} - kU'_z + f(U) = 0$.

Полагая, например, в (39) $h = \sinh x$, $k = 1$ получим уравнение (36), которое имеет точное решение вида (37).

2.4. *Случай $d(x) = 0$, $k(\varphi) = k_0/\varphi$, $s(\varphi) = s_0/\varphi$.*
Решение с обобщенным разделением переменных

При $d(x) = 0$, $k(\varphi) = k_0/\varphi$ и $s(\varphi) = s_0/\varphi$ переопределенная система (8)–(9) допускает решения вида

$$\varphi(x, t) = \theta(x) - (t + t_0)^2, \quad (40)$$

где t_0 – произвольная постоянная. Функция $\theta = \theta(x)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$a(x)(\theta'_x)^2 = 4c(x)\theta, \quad (41)$$

а уравнения (8) и (9) преобразуются к виду

$$p(x) = 4s_0 c(x), \quad (42)$$

$$[a(x)\theta'_{xx} + b(x)\theta'_x + (4k_0 + 2)c(x)]\theta = 0. \quad (43)$$

Рассмотрим подробнее специальный случай $b(x) = 0$. Будем считать функцию $c = c(x)$ заданной. Тогда функция $p(x)$ находится по формуле (42), а функции $a = a(x)$ и $\xi = \xi(x)$ определяем из уравнений (41) и (43). Опуская промежуточные выкладки, получим

при $k_1 = 4k_0 + 2 \neq 0$:

$$a(x) = \frac{1}{4C_1 c(x)} I^{\frac{4}{k_1} + 2}, \quad \theta = C_1 I^{-\frac{4}{k_1}}, \quad (44)$$

$$I = C_2 - k_1 \int c(x) dx;$$

при $k_0 = -\frac{1}{2}$:

$$a(x) = \frac{C_1^2}{4C_2 c(x) E(x)}, \quad \theta = C_2 E(x), \quad (45)$$

$$E(x) = \exp \left[\frac{4}{C_1} \int c(x) dx \right],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример 6. При $b(x) = 0$, $c(x) = p(x) = 1$, $s_0 = \frac{1}{4}$, $k_0 = -\frac{1}{2}$ удовлетворяется соотношение (42), а формулы (45) преобразуются к виду

$$a(x) = \frac{C_1^2}{4C_2} \exp \left(-\frac{4}{C_1} x \right), \quad \theta(x) = C_2 \exp \left(\frac{4}{C_1} x \right). \quad (46)$$

Полагая в (46) $C_1 = -4/\lambda$, $C_2 = 4/\lambda^2$, приходим к нелинейному уравнению типа Клейна—Гордона

$$u_{tt} = \left(e^{\lambda x} u_x \right)_x + f(u), \quad (47)$$

которое для произвольной функции $f(u)$ допускает точное решение с функциональным разделением переменных вида

$$u = U(z), \quad z = 4\lambda^{-2} e^{-\lambda x} - t^2, \quad (48)$$

где функция $U(z)$ описывается неавтономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$4zU''_{zz} + 2U'_z + f(U) = 0. \quad (49)$$

Замечание 6. Решение (48) уравнения (47) было получено в [8].

Пример 7. Положим теперь $a(x) = c(x) = p(x) = 1$, $s_0 = \frac{1}{4}$. Уравнение (42) в этом случае тождественно удовлетворяется, а решения уравнений (41) и (43) имеют вид

$$b(x) = -\frac{2k_0}{x + C_1}, \quad \theta(x) = (x + C_1)^2,$$

где C_1 — произвольная постоянная. Значениям $C_1 = 0$, $k_0 = -\frac{1}{2}(n-1)$ соответствует n -мерное не-

линейное уравнение Клейна—Гордона в радиально-симметричном случае [8]:

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{n-1}{x} u_x + f(u),$$

которое допускает точное решение вида $u = U(z)$, где $z = x^2 - (t + t_0)^2$ (x — радиальная координата).

2.5. Случай $d(x) = 0$. Решения определяющей системы в виде произведения $\varphi = \xi(x)t$

Ищем совместные решения определяющей системы (8)–(9) в виде

$$\varphi = \xi(x)t. \quad (50)$$

Несложный анализ показывает, что решение (50) удовлетворяет обоим уравнениям (8) и (9), если и только если выполняются следующие условия:

$$p = s_0 c \xi^2, \quad k(\varphi) = \frac{k_0 \varphi}{A^2 \varphi^2 - 1}, \quad (51)$$

$$s(\varphi) = \frac{s_0}{A^2 \varphi^2 - 1},$$

где A , k_0 , s_0 — некоторые (варьируемые) константы, а функции $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$, $\xi = \xi(x)$, связаны двумя дифференциально-алгебраическими соотношениями

$$a(\xi'_x)^2 = A^2 c \xi^4, \quad (a\xi'_x)'_x + b\xi'_x + k_0 c \xi^3 = 0. \quad (52)$$

В (52) две любые функции из четырех можно считать заданными (произвольным образом), а две оставшиеся — искомыми.

Рассмотрим подробнее частный случай $b(x) = 0$, $c(x) = 1$. Исключая a из (52), приходим к дифференциальному уравнению для функции ξ :

$$\xi \xi''_{xx} = (k_0 A^{-2} + 4)(\xi'_x)^2. \quad (53)$$

Уравнение (53) является автономным и обобщенно-однородным. Его общее решение имеет вид

$$\xi = \begin{cases} C_1(x + C_2)^{-\frac{A^2}{k_0 + 3A^2}} & \text{при } k_0 \neq -3A^2, \\ C_1 e^{\lambda x} & \text{при } k_0 = -3A^2, \end{cases} \quad (54)$$

где C_1 , C_2 , λ — произвольные постоянные. Функция a выражается через ξ по формуле $a = A^2 \xi^4 (\xi'_x)^{-2}$, которая следует из первого уравнения (52).

Пример 8. Положим в (51) и (54) $A = C_1 = s_0 = 1$, $k_0 = -3$, $\lambda = 1/2$, $b(x) = 0$, $c(x) = 1$. Находим $\xi(x) = e^{x/2}$, $a(x) = p(x) = e^x$. В результате

получим нелинейное уравнение типа Клейна–Гордона

$$u_{tt} = (e^x u_x)_x + e^x f(u),$$

которое для произвольной функции $f(u)$ допускает точное инвариантное решение вида $u = U(z)$, где $z = e^{x/2}t$.

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

3.1. Нелинейные уравнения с запаздыванием, допускающие точные решения типа обобщенной бегущей волны

Полученные в разд. 2 результаты можно обобщить также на случай более сложных нелинейных телеграфных уравнений с запаздыванием следующего вида:

$$c(x)u_{tt} + d(x)u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)u_x + p(x)f(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (55)$$

где τ – время запаздывания, $f(u, w)$ – произвольная функция двух аргументов.

Покажем, как решения нелинейного телеграфного уравнения без запаздывания (5), которые определяются формулами (6) и (20), могут быть использованы для построения точных решений нелинейного уравнения с запаздыванием (55). Пусть уравнение (5) допускает решение типа обобщенной бегущей волны вида

$$u = U(z), \quad z = t + \theta(x), \quad (56)$$

где функция $U(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (10). Тогда уравнение с запаздыванием (55) допускает точное решение вида (56), где функция $U(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению с запаздыванием

$$U''_{zz} - k(z)U'_z + s(z)f(U, W) = 0, \quad W = U(z - \tau). \quad (57)$$

Уравнения (25), (28), (29), (31), (36), (39) допускают решения вида (56). Поэтому допускают также точные решения вида (56) более сложные нелинейные телеграфные уравнения, которые получаются из указанных уравнений заменой функции $f(u)$ на функцию $f(u, w)$.

Пример 9. Нелинейное уравнение типа Клейна–Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = [a(x)u_x]_x + \left[\frac{m^2}{a(x)} - 1 \right] f(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (58)$$

которое является обобщением уравнения (25), для произвольных функций $a(x)$ и $f(u, w)$ допус-

кает точное решение типа обобщенной бегущей волны

$$u = U(z), \quad z = t + m \int \frac{dx}{a(x)}, \quad (59)$$

где функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$U''_{zz} + f(U, W) = 0, \quad W = U(z - \tau). \quad (60)$$

Отметим, что при $f(U, W) = Ug(W/U)$ уравнение (60) допускает точное решение вида $UCe^{\lambda z}$, где C – произвольная постоянная, а λ определяется из трансцендентного уравнения $\lambda^2 + g(e^{-\tau\lambda}) = 0$.

Пример 10. Нелинейное телеграфное уравнение с запаздыванием

$$u_{tt} + u_t = [a(x)u_x]_x + \left[\frac{x^2}{a(x)} - 1 \right] f(u, w), \quad w = u(x, t - \tau),$$

которое является обобщением уравнения (29), для произвольных функций $a(x)$ и $f(u, w)$ имеет точное решение типа обобщенной бегущей волны

$$u = U(z), \quad z = t + \int \frac{x dx}{a(x)},$$

где функция $U(z)$ описывается дифференциальным уравнением (60).

3.2. Нелинейные уравнения с запаздыванием, допускающие решения с мультипликативным разделением переменных

Нелинейное телеграфное уравнение с запаздыванием

$$c(x)u_{tt} + d(x)u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)u_x + uF(x, w/u), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (61)$$

зависящее от пяти произвольных функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, $F(x, v)$, допускает точное решение в виде произведения функций разных аргументов $u = e^{\lambda t} \xi(x)$, где λ – произвольная постоянная, а функция $\xi = \xi(x)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[a(x)\xi'_x]_x + b(x)\xi_x + [F(x, e^{-\lambda\tau}) - \lambda^2 c(x) - \lambda d(x)]\xi = 0.$$

Некоторые точные решения этого уравнения можно найти в [55, 56].

В специальном случае $d(x) = 0$ уравнение (61) допускает также точные решения вида $u = \sin(\beta_n t + C)\xi(x)$, где $\beta_n = \pi n/\tau$ ($n = 1, 2, \dots$), C – произвольная постоянная.

4. КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Описаны различные классы нелинейных уравнений типа Клейна–Гордона и телеграфных уравнений с переменными коэффициентами, которые допускают точные решения с функциональным разделением переменных. Особое внимание уделено уравнениям достаточно общего вида, которые зависят от одной или нескольких произвольных функций. Приведены примеры конкретных уравнений и их точных решений. Построены также некоторые точные решения типа обобщенной бегущей волны более сложных нелинейных телеграфных уравнений с запаздыванием.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310385-6) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10025).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ames W.F., Lohner J.R., Adams E. Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$ // Int. J. Non-Linear Mech. 1981. V. 16. № 5–6. P. 439–447.
2. Clarkson P.A., McLeod J.B., Olver P.J., Ramani R. Integrability of Klein–Gordon equations // SIAM J. Math. Anal. 1986. V. 17. P. 798–802.
3. Oron A., Rosenau P. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. 1986. V. 118. P. 172–176.
4. Pucci E., Salvatori M.C. Group properties of a class of semilinear hyperbolic equations // Int. J. Non-Linear Mech. 1986. V. 21. P. 147–155.
5. Grundland A.M., Infeld E. A family of non-linear Klein–Gordon equations and their solutions // J. Math. Phys. 1992. V. 33. P. 2498–2503.
6. Ibragimov N.H. (Editor). CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Symmetries, Exact solutions and Conservation Laws, Vol. 1. Boca Raton: CRC Press, 1994.
7. Zhdanov R.Z. Separation of variables in the non-linear wave equation // J. Phys. A. 1994. V. 27. P. L291–L297.
8. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения. М.: Международная программа образования, 1996.
9. Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A. Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics. Dordrecht: Kluwer, 1998.
10. Sophocleous C., Kingston J.G. Cyclic symmetries of one-dimensional non-linear wave equations // Int. J. Non-Linear Mech. 1999. V. 34. P. 531–543.
11. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Точные решения и преобразования нелинейных уравнений теплопроводности и теории волн // Доклады АН. 2001. Т. 381. № 1. С. 31–36.
12. Эстефес П.Г., Чу Ч. Разделение переменных в нелинейных волновых уравнениях с переменной волновой скоростью // Теор. мат. физика. 2002. Т. 133. № 2. С. 202–210.
13. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2002.
14. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition. Boca Raton: CRC Press, 2004.
15. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
16. Bluman G.W., Cheviakov A.F. Nonlocally related systems, linearization and nonlocal symmetries for the nonlinear wave equation // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 333. P. 93–111.
17. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition. Boca Raton: CRC Press, 2012.
18. Hu J., Qu C. Functionally separable solutions to nonlinear wave equations by group foliation method // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 330. P. 298–311.
19. Huang D.J., Zhou S. Group properties of generalized quasi-linear wave equations // J. Math. Anal. Appl. 2010. V. 366. P. 460–472.
20. Huang D.J., Zhu Y., Yang Q. Reduction operators and exact solutions of variable coefficient nonlinear wave equations with power nonlinearities // Symmetry. 2017. V. 9. № 3.
21. Bluman G.W., Temuerchaolu, Sahadevan R. Local and nonlocal symmetries for nonlinear telegraph equation // J. Math. Phys. 2005. V. 46. Article ID 023505.
22. Huang D.J., Ivanova N.M. Group analysis and exact solutions of a class of variable coefficient nonlinear telegraph equations // J. Math. Phys. 2007. V. 48, Article ID 073507.
23. Huang D.J., Zhou S. Group-theoretical analysis of variable coefficient nonlinear telegraph equations // Acta Appl. Math. 2012. V. 117. № 1. P. 135–183.
24. Pucci E. Group analysis of the equation $u_{tt} + \lambda u_{xx} = g(u, u_x)$ // Riv. Mat. Univ. Parma. 1987. V. 12. № 4. P. 71–87.
25. Ibragimov N.H., Torrisi M., Valenti A. Preliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$ // J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 2988–2995.
26. Ibragimov N.H., Khabirov S.V. Contact transformation group classification of nonlinear wave equations // Nonlin. Dyn. 2000. V. 22. P. 61–71.
27. Anco S.C., Liu S. Exact solutions of semilinear radial wave equations in n dimensions // J. Math. Anal. Appl. 2004. V. 297. P. 317–342.
28. Gandarias M.L., Torrisi M., Valenti A. Symmetry classification and optimal systems of a non-linear wave equation // Int. J. Non-Linear Mech. 2004. V. 39. P. 389–398.

29. Lahno V., Zhdanov R., Magda O. Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations // Acta Appl. Math. 2006. V. 91. P. 253–313.
30. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein–Gordon equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. V. 19. № 8. P. 2676–2689.
31. Long F.-S., Meleshko S.V. On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein–Gordon equation with a delay // Math. Meth. Appl. Sci. 2016. V. 39. № 12. P. 3255–3270.
32. Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником // Ж. выч. мат. и мат. физики. 1982. Т. 22. № 6. С. 1393–1400.
33. Kudryashov N.A. On exact solutions of families of Fisher equations // Theor. Math. Phys. 1993. V. 94. № 2. P. 211–218.
34. Galaktionov V.A. Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions // Nonlinear Anal. Theory, Methods and Appl. 1994. V. 23. P. 1595–621.
35. Doyle Ph.W., Vassiliou P.J. Separation of variables for the 1-dimensional non-linear diffusion equation // Int. J. Non-Linear Mech. 1998. V. 33. № 2. P. 315–326.
36. Hood S. On direct, implicit reductions of a nonlinear diffusion equation with an arbitrary function – generalizations of Clarkson’s and Kruskal’s method // IMA J. Appl. Math. 2000. V. 64. № 3. P. 223–244.
37. Cherniha R.M., Plukhin O. New conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction–diffusion–convection equations // J. Physics A: Math. Theor. 2007. V. 40. № 33. P. 10049–10070.
38. Cherniha R.M., Plukhin O. New conditional symmetries and exact solutions of reaction–diffusion–convection equations with exponential nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. 2013. V. 403. P. 23–37.
39. Cherniha R., Serov M., Plukhin O. Nonlinear Reaction–Diffusion–Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2018.
40. Vaneeva O.O., Johnpillai, A.G., Popovych R.O., Sophocleous C. Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with power nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 330. № 2. P. 1363–1386.
41. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with exponential nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 396. P. 225–242.
42. Popovych R.O., Ivanova N.M. New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations // J. Physics A: Math. General. 2004. V. 37. № 30. P. 7547–7565.
43. Ivanova N.M., Sophocleous C. On the group classification of variable-coefficient nonlinear diffusion-convection equations // J. Comput. Appl. Math. 2006. V. 197. № 2. P. 322–344.
44. Ivanova N.M. Exact solutions of diffusion-convection equations // Dynamics of PDE. 2008. V. 5. № 2. P. 139–171.
45. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Group analysis of variable coefficient diffusion-convection equations. I. Enhanced group classification // Lobachevskii J. Math. 2010. V. 31. № 2. P. 100–122.
46. Jia H., Zhao W.X.X., Li Z. Separation of variables and exact solutions to nonlinear diffusion equations with x -dependent convection and absorption // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 339. № 982–995.
47. Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with variable coefficients // Appl. Math. Comput. 2019. V. 347. pp. 282–292.
48. Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 338. P. 448–466.
49. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction-diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. V. 19. № 3. P. 409–416.
50. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. V. 19. № 3. P. 417–430.
51. Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to non-linear delay reaction-diffusion equations // Int. J. Non-Linear Mech. 2014. V. 59. P. 16–22.
52. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions // Appl. Math. Letters. 2014. V. 37. P. 43–48.
53. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients // Int. J. Non-Linear Mech. 2014. V. 67. P. 267–277.
54. Polyanin A.D. Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients // Appl. Math. Letters. 2019. V. 90. P. 49–53.
55. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, 2nd Edition. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2003.
56. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. Boca Raton: CRC Press, 2018.
57. Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, Second Edition. Boca Raton: CRC Press, 2016.

Exact Solutions of Nonlinear Telegraph Equations with Variable Coefficients

A. D. Polyanin^{a, b, c, #}^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia*^b *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*^c *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005 Russia*

#e-mail: polyanin@ipmnet.ru

Received November 27, 2018; revised November 27, 2018; accepted December 4, 2018

Abstract—Various classes of nonlinear telegraph equations with variable coefficients

$$c(x)u_{tt} = [a(x)u_x]_x + b(x)u_x + p(x)f(u),$$

which allow exact solutions with a functional separation of variables of the form $u = U(z)$, $z = \varphi(x, t)$, have been described. It has been shown that the source function $f(u)$ and any four of the five coefficients $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, and $p(x)$ of these equations can be chosen arbitrarily, and the remaining coefficient is expressed in terms of them. The properties have been studied of the overdetermined system of differential equations for the function $\varphi(x, t)$ and some its solutions have been obtained. Examples of particular equations and their exact solutions are given. Some exact generalized traveling-wave solutions of more complex nonlinear telegraph equations with delay of the form

$$c(x)u_{tt} + d(x)u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)u_x + p(x)f(u, w), \quad w = u(x, t - \tau),$$

where $\tau > 0$ is the delay time and $f(u, w)$ is an arbitrary function of two arguments, are also obtained.

Keywords: nonlinear telegraph equations, nonlinear Klein–Gordon type equations, differential equations with delay, exact solutions, functional separable solutions, generalized traveling-wave solutions

DOI: 10.1134/S2304487X1902010X

REFERENCES

- Ames W.F., Lohner J.R., Adams E., Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1981, vol. 16, no. 5–6, pp. 439–447.
- Clarkson P.A., McLeod J.B., Olver P.J., Ramani R., Integrability of Klein–Gordon equations, *SIAM J. Math. Anal.*, 1986, vol. 17, pp. 798–802.
- Oron A., Rosenau P., Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations, *Phys. Lett. A*, 1986, vol. 118, pp. 172–176.
- Pucci E., Salvatori M.C., Group properties of a class of semilinear hyperbolic equations, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1986, vol. 21, pp. 147–155.
- Grundland A.M., Infeld E., A family of non-linear Klein–Gordon equations and their solutions, *J. Math. Phys.*, 1992, vol. 33, pp. 2498–2503.
- Ibragimov N.H. (Editor), *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Symmetries, Exact solutions and Conservation Laws, vol. 1*, Boca Raton: CRC Press, 1994.
- Zhdanov R.Z., Separation of variables in the non-linear wave equation, *J. Phys. A*, 1994, vol. 27, pp. L291–L297.
- Zaitsev V.F., Polyanin A.D., *Handbook of Partial Differential Equations: Exact Solutions*, Moscow, International Program of Education, 1996 (in Russian).
- Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A., *Applications of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics*, Dordrecht: Kluwer, 1998.
- Sophocleous C., Kingston J.G., Cyclic symmetries of one-dimensional non-linear wave equations, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1999, vol. 34, pp. 531–543.
- Zaitsev V.F., Polyanin A.D., Exact solutions and transformations of nonlinear heat and wave equations, *Dokl. Math.*, 2001, vol. 64, no. 3, pp. 416–420.
- Estévez P.G., Qu C.Z., Separation of variables in non-linear wave equations with variable wave speed, *Theor. Math. Phys.*, 2002, vol. 133, pp. 1490–1497.
- Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of nonlinear equations of mathematical physics*, Moscow: Fizmatlit, 2002 (in Russian).
- Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd Edition, Boca Raton: CRC Press, 2004.
- Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I., *Solution methods for nonlinear equations of mathematical physics and mechanics*, Moscow: Fizmatlit, 2005 (in Russian).
- Bluman G.W., Cheviakov A.F., Nonlocally related systems, linearization and nonlocal symmetries for the nonlinear wave equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 333, pp. 93–111.

17. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd Edition, Boca Raton: CRC Press, 2012.
18. Hu J., Qu C., Functionally separable solutions to nonlinear wave equations by group foliation method, *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 330, pp. 298–311.
19. Huang D.J., Zhou S., Group properties of generalized quasi-linear wave equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 2010, vol. 366, pp. 460–472.
20. Huang D.J., Zhu Y., Yang Q., Reduction operators and exact solutions of variable coefficient nonlinear wave equations with power nonlinearities, *Symmetry*, 2017, vol. 9, no. 3.
21. Bluman G.W., Temuerchaolu, Sahadevan R., Local and nonlocal symmetries for nonlinear telegraph equation, *J. Math. Phys.*, 2005, vol. 46, Article ID 023505.
22. Huang D.J., Ivanova N.M., Group analysis and exact solutions of a class of variable coefficient nonlinear telegraph equations, *J. Math. Phys.*, 2007, vol. 48, Article ID 073507.
23. Huang D.J., Zhou S., Group-theoretical analysis of variable coefficient nonlinear telegraph equations, *Acta Appl. Math.*, 2012, vol. 117, no. 1, pp. 135–183.
24. Pucci E., Group analysis of the equation $u_{tt} + \lambda u_{xx} = g(u, u_x)$, *Riv. Mat. Univ. Parma*, 1987, vol. 12, no. 4, pp. 71–87.
25. Ibragimov N.H., Torrisi M., Valenti A., Preliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$, *J. Math. Phys.*, 1991, vol. 32, pp. 2988–2995.
26. Ibragimov N.H., Khabirov S.V., Contact transformation group classification of nonlinear wave equations, *Nonlin. Dyn.*, 2000, vol. 22, pp. 61–71.
27. Anco S.C., Liu S., Exact solutions of semilinear radial wave equations in n dimensions, *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, vol. 297, pp. 317–342.
28. Gandarias M.L., Torrisi M., Valenti A., Symmetry classification and optimal systems of a non-linear wave equation, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2004, vol. 39, pp. 389–398.
29. Lahno V., Zhdanov R., Magda O., Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations, *Acta Appl. Math.*, 2006, vol. 91, pp. 253–313.
30. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein–Gordon equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 8, pp. 2676–2689.
31. Long F.-S., Meleshko S.V., On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein–Gordon equation with a delay, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2016, vol. 39, no. 12, pp. 3255–3270.
32. Dorodnitsyn V.A., On invariant solutions of the nonlinear heat equation with a source, *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 1982, vol. 22, no. 6, pp. 1393–1400 (in Russian).
33. Kudryashov N.A., On exact solutions of families of Fisher equations, *Theor. Math. Phys.*, 1993, vol. 94, no. 2, pp. 211–218.
34. Galaktionov V.A., Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions, *Nonlinear Anal.: Theory, Methods and Appl.*, 1994, vol. 23, pp. 1595–621.
35. Doyle Ph.W., Vassiliou P.J., Separation of variables for the 1-dimensional non-linear diffusion equation, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1998, vol. 33, no. 2, pp. 315–326.
36. Hood S., On direct, implicit reductions of a nonlinear diffusion equation with an arbitrary function – generalizations of Clarkson's and Kruskal's method, *IMA J. Appl. Math.*, 2000, vol. 64, no. 3, pp. 223–244.
37. Cherniha R.M., Pliukhin O., New conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction–diffusion–convection equations, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2007, vol. 40, no. 33, pp. 10049–10070.
38. Cherniha R.M., Pliukhin O., New conditional symmetries and exact solutions of reaction–diffusion–convection equations with exponential nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, vol. 403, pp. 23–37.
39. Cherniha R., Serov M., Pliukhin O., *Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications*, Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2018.
40. Vaneeva O.O., Johnpillai, A.G., Popovych R.O., Sophocleous C., Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with power nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 330, no. 2, pp. 1363–1386.
41. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C., Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with exponential nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, vol. 396, pp. 225–242.
42. Popovych R.O., Ivanova N.M., New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations, *J. Phys. A: Math. General*, 2004, vol. 37, no. 30, pp. 7547–7565.
43. Ivanova N.M., Sophocleous C., On the group classification of variable-coefficient nonlinear diffusion-convection equations, *J. Comput. Appl. Math.*, 2006, vol. 197, no. 2, pp. 322–344.
44. Ivanova N.M., Exact solutions of diffusion-convection equations, *Dynamics of PDE*, 2008, vol. 5, no. 2, pp. 139–171.
45. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C., Group analysis of variable coefficient diffusion-convection equations. I. Enhanced group classification, *Lobachevskii J. Math.*, 2010, vol. 31, no. 2, pp. 100–122.
46. Jia H., Zhao W.X.X., Li Z., Separation of variables and exact solutions to nonlinear diffusion equations with x -dependent convection and absorption, *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 339, pp. 982–995.
47. Polyanin A.D., Functional separable solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with variable coefficients, *Appl. Math. Comput.*, 2019, vol. 347, pp. 282–292.
48. Meleshko S.V., Moyo S., On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay, *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 338, pp. 448–466.
49. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations, *Commun.*

- Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 409–416.
50. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction–diffusion equations and more complex nonlinear equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 417–430.
51. Polyanin A.D., Zhurov A.I., New generalized and functional separable solutions to non-linear delay reaction–diffusion equations, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 59, pp. 16–22.
52. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Nonlinear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions, *Appl. Math. Letters*, 2014, vol. 37, pp. 43–48.
53. Polyanin A.D., Zhurov A.I., The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 67, pp. 267–277.
54. Polyanin A.D., Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients, *Appl. Math. Letters*, 2019, vol. 90, pp. 49–53.
55. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, 2nd Edition, Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2003.
56. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems*, Boca Raton: CRC Press, 2018.
57. Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E., *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*, Second Edition, Boca Raton: CRC Press, 2016.