

УСТОЙЧИВОСТЬ ОПТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ВОЗМУЩЕННЫМ УРАВНЕНИЕМ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ

© 2022 г. С. Ф. Лаврова^{1,*}, Н. А. Кудряшов^{1,**}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, 115409, Россия

*e-mail: infuriatedot@gmail.com

**e-mail: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию 22.09.22 г.

После доработки 27.09.2022 г.

Принята к публикации 27.09.2022 г.

Рассмотрено возмущенное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, полученное при помощи перехода к переменным бегущей волны в обобщенном уравнении Гинзбурга–Ландау. Проведен анализ устойчивости стационарных точек уравнения и найдены промежутки значений параметров, при которых система обладает сепаратрисами седловых точек. Найдены явные выражения гомоклинических и гетероклинических орбит системы для двух частных случаев значений параметров. Исследование устойчивости этих орбит проведено посредством построения функции Мельникова вдоль них. Путем анализа нулей функции Мельникова найдены области значений управляющих параметров системы, при которых реализуется необходимое условие возникновения хаоса Мельникова.

Ключевые слова: функция Мельникова, аттрактор, хаос, нелинейная оптика, уравнение Гинзбурга–Ландау

DOI: 10.56304/S2304487X22030075

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные уравнения в частных производных являются ценным инструментом для описания различных явлений во многих областях наук, таких как биология, химия, гидрогазодинамика и нелинейная оптика [1–6]. Оптические солитоны являются основными носителями информации в телекоммуникационных системах благодаря их способности преодолевать большие расстояния без изменения формы. Известно, что динамика солитонов в нелинейной оптике наиболее часто моделируется при помощи нелинейного уравнения Шрёдингера. Однако множество других моделей может служить альтернативой НУШ. Это множество включает в себя комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау, являющееся широко известной задачей нелинейной физики. Оно описывает ряд процессов, среди которых фазовые переходы второго рода, сверхпроводимость, бимолекулярная динамика, конденсация Бозе–Эйнштейна, оптические волноводы и волокна, сверхтекучесть и другие явления. Обобщенное комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау имеет следующий вид [7–9]

$$\begin{aligned} i q_t + a q_{xx} + f(|q|^2)q &= \\ &= \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $q(x, t)$ – комплекснозначная функция, описывающая интенсивность оптического импульса, x является расстоянием, t соответствует времени, $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ – вещественные параметры математической модели, среди которых a отвечает за дисперсию, b – за нелинейность, α, β, γ – за эффекты возмущения, f – функция, описывающая нелинейность модели.

При наличии дополнительных членов возмущения, рассмотренных в [10, 11], комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау приводится к следующему виду

$$\begin{aligned} i q_t + a q_{xx} + f(|q|^2)q &= \\ &= \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta \{(|q|^2)_x\}^2] + \gamma q + \\ &+ i\epsilon(\delta q_x + \lambda(|q|^{2m}q)_x + \theta(|q|^{2m})_x q + \mu|q|^{2m}q_x), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где δ – коэффициент интермодальной дисперсии, λ отвечает за самокручение оптического импульса, предотвращающего формирование шоковых волн, θ и μ – коэффициенты нелинейной

дисперсии, m – параметр максимальной интенсивности, $0 < \epsilon \ll 1$ – параметр возмущения.

В уравнении (1.2) учтем также, что при распространении оптические импульсы могут подвергаться неавтономным возмущениям внешней среды, учитывая в (1.2) присутствие простого периодического возмущения

$$\begin{aligned} iq_t + aq_{xx} + f(|q|^2)q = \\ = \frac{1}{|q|^2 q^*} [\alpha |q|^2 (|q|^2)_{xx} - \beta (|q|^2)_x^2] + \gamma q + \\ + i\epsilon(\delta q_x + \lambda(|q|^{2m}q)_x + \theta(|q|^{2m})_x q + \mu|q|^{2m}q_x) + \\ + \epsilon \tilde{F} \cos \Omega(x - C_0 t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\tilde{F}$ – амплитуда возмущения, Ω – его частота. И амплитуду, и частоту возмущения будем считать положительными.

Основная задача данной работы состоит в исследовании устойчивости при помощи метода Мельникова уединенных волн, описываемых уравнением (1.3), по отношению к малым возмущениям математической модели.

2. ОБЫКНОВЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ УРАВНЕНИЮ (1.3)

Будем искать решения уравнения (1.3) с учетом переменных бегущей волны в следующем виде

$$q(x, t) = y(z)e^{i\psi(z)}, \quad z = x - C_0 t, \quad (2.1)$$

где $y(z)$ описывает амплитуду волны, распространяющейся со скоростью C_0 вдоль оси x .

Подставляя (2.1) в (1.3) и приравнявая к нулю вещественную и мнимую части, имеем

$$\begin{aligned} (a - 2\alpha)y_{zz} + C_0 y \psi_z - a y \psi_z^2 + f(y^2)y + \\ + 2(2\beta - \alpha)\frac{y_z^2}{y} - \gamma y = \epsilon(\tilde{F} \cos \omega z - \delta y \psi_z - \\ - \lambda y^{2m+1} \psi_z - \mu y^{2m} \psi_z), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} C_0 y_z + 2a y_z \psi_z + a y \psi_{zz} + \epsilon \delta y_z + \\ + \epsilon \lambda (2m + 1) y^{2m} y_z + 2\epsilon m \theta y^{2m} y_z + \epsilon \mu y^{2m} y_z = 0. \end{aligned}$$

Домножив второе уравнение системы на $y(z)$ и проинтегрировав его по z , получим

$$\begin{aligned} a y^2 \psi_z + \frac{\epsilon \delta - C_0}{2} y^2 + \\ + \epsilon \left(\frac{\lambda(2m+1)}{(2m+2)} + \frac{2m\theta}{2m+2} + \frac{\mu}{2m+2} \right) y^{2m+2} = C_1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из (2.3) ψ_z выражается следующим образом

$$\begin{aligned} \psi_z = \frac{C_1}{a y^2} + \frac{C_0 - \epsilon \delta}{2a} - \\ - \epsilon \left(\frac{\lambda(2m+1)}{(2m+2)} + \frac{2m\theta}{2m+2} + \frac{\mu}{2m+2} \right) y^{2m}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в первое уравнение системы (2.2), имеем

$$\begin{aligned} (a - 2\alpha)y_{zz} + (4\beta - 2\alpha)\frac{y_z^2}{y} + \left(\frac{C_0^2}{4a} - \gamma \right) y - \\ - \frac{C_1^2}{a y^3} + f(y^2)y = \epsilon \left(\tilde{F} \cos \omega z - \frac{C_0 \delta}{2a} y - \frac{2C_1 \delta}{a y} - \right. \\ \left. - \frac{C_1 \left(((2m+1)\lambda + 2m\theta + \mu)a + \lambda(m+1) \right)}{a(m+1)} y^{2m-1} - \right. \\ \left. - \frac{\lambda C_0}{2a} y^{2m+1} - \frac{\mu C_0}{2a} y^{2m} - \frac{\mu C_1}{a} y^{2m-2} \right) + o(\epsilon), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} o(\epsilon) = - \left(\frac{(((2\theta + 2\lambda)m + \mu + \lambda)a + 2\lambda(m+1))((2\theta + 2\lambda)m + \mu + \lambda)}{4(m+1)^2} y^{4m+1} + \right. \\ \left. + \frac{\mu((2\theta + 2\lambda)m + \mu + \lambda)}{2(m+1)} y^{4m} + \frac{(2a((2m+1)\lambda + 2m\theta + \mu) + \lambda(m+1))\delta}{2a(m+1)} y^{2m+1} + \frac{\mu}{2a} y^{2m} + \frac{3\delta^2}{4a} y \right) \epsilon^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Отбросив в (2.5) члены второго порядка малости, перепишем его в следующем виде

$$\begin{aligned} y_{zz} + \left(\frac{4\beta - 2\alpha}{a - 2\alpha} \right) \frac{y_z^2}{y} + \left(\frac{C_0^2 - 4a\gamma}{4a(a - 2\alpha)} \right) y - \left(\frac{C_1^2}{a(a - 2\alpha)} \right) \frac{1}{y^3} + \frac{1}{a - 2\alpha} f(y^2)y = \\ = \epsilon \left(\frac{\tilde{F} \cos \omega z}{a - 2\alpha} - \frac{C_0 \delta}{2a(a - 2\alpha)} y - \frac{2C_1 \delta}{a(a - 2\alpha)y} - \frac{C_1 \left(((2m+1)\lambda + 2m\theta + \mu)a + \lambda(m+1) \right)}{a(a - 2\alpha)(m+1)} \times \right. \\ \left. \times y^{2m-1} - \frac{\lambda C_0}{2a(a - 2\alpha)} y^{2m+1} - \frac{\mu C_0}{2a(a - 2\alpha)} y^{2m} - \frac{\mu C_1}{a(a - 2\alpha)} y^{2m-2} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ради краткости записи, введем в (2.7) следующие обозначения

$$\begin{aligned} A &= \frac{4\beta - 2\alpha}{a - 2\alpha}, & B &= -\frac{C_0^2 - 4a\gamma}{4a(a - 2\alpha)}, \\ C &= -\frac{C_1^2}{a(a - 2\alpha)}, & D &= \frac{1}{a - 2\alpha}, \\ F &= \frac{\tilde{F}}{a - 2\alpha}, & G &= -\frac{C_0\delta}{2a(a - 2\alpha)}, \\ H &= -\frac{2C_1\delta}{a(a - 2\alpha)}, & E &= -\frac{\mu C_1}{a(a - 2\alpha)}, \\ J &= -\frac{C_1((2m+1)\lambda + 2m\theta + \mu)a + \lambda(m+1)}{a(a - 2\alpha)(m+1)}, \\ K &= -\frac{\mu C_0}{2a(a - 2\alpha)}, & L &= -\frac{\lambda C_0}{2a(a - 2\alpha)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

С учетом введенных обозначений, (2.7) примет следующий вид

$$\begin{aligned} y_{zz} + A \frac{y_z^2}{y} + By + \frac{C}{y^3} + Df(y^2)y = \\ = \epsilon \left(F \cos \omega z + Gy + \frac{H}{y} + Ey^{2m-2} + \right. \\ \left. + Jy^{2m-1} + Ky^{2m} + Ly^{2m+1} \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Начнем с рассмотрения нескольких частных случаев уравнения (2.9) при помощи метода Мельникова.

3. СЛУЧАЙ 1. $C = H = E = J = 0$ ($C_1 = 0$), $f(y) = y$ И $A = 0$ ($\beta = 2\alpha$). ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МЕЛЬНИКОВА К УРАВНЕНИЮ (2.9)

Рассмотрим случай $C_1 = 0$. Уравнение (2.9) примет вид

$$\begin{aligned} y_{zz} + By + Dy^3 = \\ = \epsilon(F \cos \omega z + Gy + Ky^{2m} + Ly^{2m+1}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

В каноническом виде (3.1) выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} y_z = v, \quad v_z = -By - Dy^3 + \\ + \epsilon(F \cos \omega z + Gy + Ky^{2m} + Ly^{2m+1}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Нетрудно заметить, что система уравнений (3.2) является возмущенной Гамильтониановой системой. Аналитически проанализировать возможность возникновения хаоса в системах такого типа можно при помощи метода Мельникова [12–14]. Примеры применения метода Мельникова приведены в работах [15–18]. Он включает в себя построение функции Мельникова, описывающей расстояние между устойчивым и неустойчивым

многообразиями седловой стационарной точки, трансверсальное пересечение которых представляет собой отправную точку на пути к хаотической динамике. Несмотря на то, что теория Мельникова носит чисто приближительный характер, это один из немногих методов, позволяющих аналитически предсказать возникновение хаоса. Однако, данный метод позволяет прогнозировать значения параметров, связанных только с называемым гетероклиническим или гомоклиническим хаосом. Так, чтобы построить функцию Мельникова системы (3.2), нужно сначала найти явные выражения для ее гомоклинических или гетероклинических орбит.

Система уравнений (3.2) при $\epsilon = 0$ является Гамильтониановой с Гамильтонианом

$$H(y, v) = \frac{v^2}{2} + \frac{By^2}{2} + \frac{y^4}{4}. \quad (3.3)$$

В невозмущенной форме система уравнений (3.2) при $B < 0$, $D > 0$ обладает гомоклинической орбитой в форме

$$\begin{aligned} (y_{1hom}^\pm, v_{1hom}^\pm) = \\ = \pm \left(\sqrt{\frac{2|B|}{|D|}} \operatorname{sech} \sqrt{|B|} z, -\sqrt{\frac{2}{D}} |B| \operatorname{sech} \sqrt{|B|} z \tanh \sqrt{|B|} z \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Гомоклиническая орбита (3.4) соединяет седловую точку покоя $O = (0, 0)$ саму с собой (рис. 1).

В случае $B > 0$, $D < 0$ в невозмущенном виде (3.2) имеет гетероклиническую сепаратрису, соединяющую две седловые точки $\left(\sqrt{-\frac{B}{D}}, 0\right)$ и $\left(-\sqrt{-\frac{B}{D}}, 0\right)$ между собой (рис. 1)

$$\begin{aligned} (y_{1het}^\pm, v_{1het}^\pm) = \\ = \pm \left(\sqrt{\frac{|B|}{|D|}} \tanh \left(\sqrt{\frac{B}{2}} z \right), \frac{B}{\sqrt{2|D|}} \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{B}{2}} z \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Используя явные выражения для сепаратрис (3.4) и (3.5), можно построить функцию Мельникова рассматриваемой системы (3.2) вдоль полученных орбит для двух рассматриваемых случаев. Искомая функция Мельникова вдоль гомоклинической орбиты (3.4) выражается интегралом

$$\begin{aligned} M_{1hom}(z_0) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} (F v_{1hom}(z) \cos \Omega(z + z_0) + G y_{1hom}(z) v_{1hom}(z) + \\ + K y_{1hom}^{2m}(z) v_{1hom}(z) + L y_{1hom}^{2m+1}(z) v_{1hom}(z)) dz, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где для визуального упрощения результата опущены верхние индексы $\pm$ при функции Мельникова и сепаратрисах. При следующей записи мы к

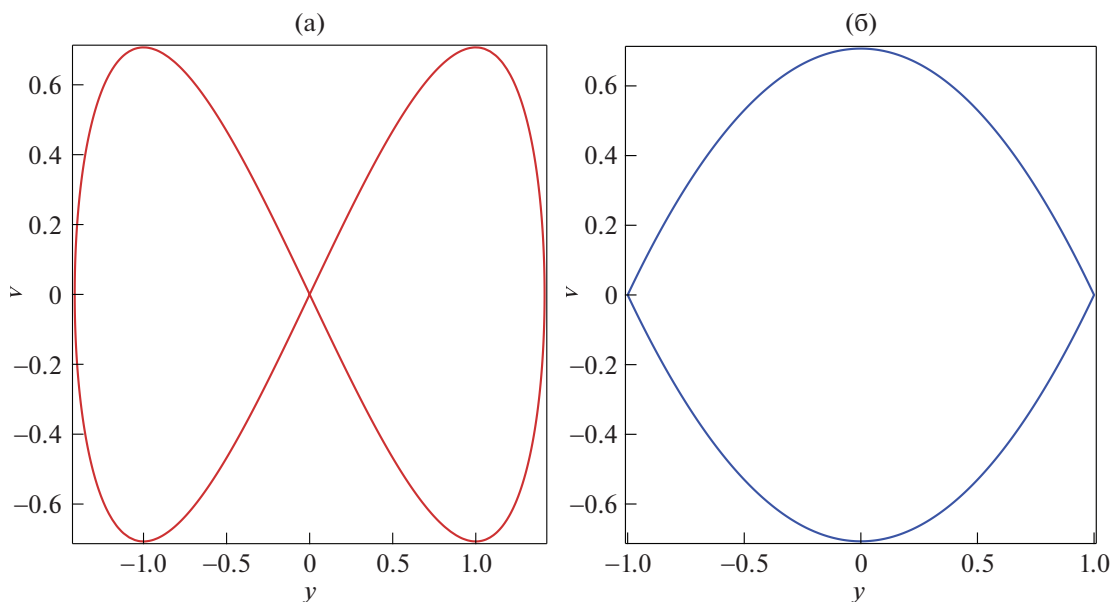


Рис. 1. Гомоклиническая и гетероклиническая орбиты системы (3.2) при $\epsilon = 0$: а) $B = -1$, $D = 1$; б) $B = 1$, $D = -1$.

ним вернемся. Итак, с учетом явного выражения гомоклинической орбиты (3.4), (3.6) примет вид

$$\begin{aligned}
 M_{hom}^{\pm}(z_0) &= \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mp \sqrt{\frac{2}{D}} |B| F \operatorname{sech} \sqrt{|B|} z \tanh \sqrt{|B|} z \cos \Omega(z + z_0) + \right. \\
 &\quad + \frac{2G|B|^{3/2}}{D} \operatorname{sech}^2 \sqrt{|B|} z \tanh \sqrt{|B|} z \mp \\
 &\quad \mp \frac{2^m \sqrt{2} |B|^{m+1} K}{D^m \sqrt{D}} \operatorname{sech}^{2m+1} \sqrt{|B|} z \tanh \sqrt{|B|} z + \\
 &\quad \left. + \frac{2^{m+1} |B|^{m+1} \sqrt{|B|} L}{D^{m+1}} \operatorname{sech}^{2m+2} \sqrt{|B|} z \tanh \sqrt{|B|} z \right) dz = \\
 &= \pm \sqrt{\frac{2}{D}} |B| F I_1^{(1)} \sin \Omega z_0 + \frac{2G|B|^{3/2}}{D} I_2^{(1)}(2) \mp \\
 &\quad \mp \frac{2^m \sqrt{2} |B|^{m+1} K}{D^m \sqrt{D}} I_2^{(1)}(2m+1) + \\
 &\quad + \frac{2^{m+1} |B|^{m+1} \sqrt{|B|} L}{D^{m+1}} I_2^{(1)}(2m+2) = \\
 &= \pm \frac{\sqrt{2} \pi \Omega F \operatorname{sech} \frac{\pi \Omega}{2\sqrt{|B|}}}{\sqrt{D}} \sin \Omega z_0,
 \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned}
 I_1^{(1)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} \sqrt{|B|} z \tanh \sqrt{|B|} z \times \\
 &\quad \times \cos \Omega(z + z_0) dz, I_2^{(1)}(m) = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^m \sqrt{|B|} z \tanh \sqrt{|B|} z dz.
 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Аналитическое нахождение интегралов Мельникова, выражаемых формулой (3.8), представлено в приложении А. Таким образом, функция Мельникова (3.7) всегда обладает множеством простых нулей и выполняется необходимое условие неустойчивости оптического солитона (гомоклинической орбиты) по отношению к малым возмущениям.

Аналогичным образом построим функцию Мельникова системы (3.2) вдоль гетероклинической орбиты (3.5)

$$\begin{aligned}
 M_{het}(z_0) &= \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (F v_{het}(z) \cos \Omega(z + z_0) + G y_{het}(z) v_{het}(z) + \\
 &\quad + K y_{het}^{2m}(z) v_{het}(z) + L y_{het}^{2m+1}(z) v_{het}(z)) dz,
 \end{aligned} \quad (3.9)$$

где снова для упрощения визуального восприятия результата опущены верхние индексы $\pm$ при функции Мельникова и гетероклинической орбите. В следующей записи мы к ним вернемся. Так, с учетом явного выражения гетероклинической орбиты (3.5) функция Мельникова (3.9) запишется следующим образом

$$\begin{aligned}
 M_{het}(z_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{FB}{\sqrt{2|D|}} \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{B}{2}} z \right) \cos \Omega(z + z_0) + \right. \\
 &\quad + \frac{GB^{3/2}}{\sqrt{2|D|}} \tanh \left(\sqrt{\frac{B}{2}} z \right) \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{B}{2}} z \right) \pm \\
 &\quad \left. \pm \frac{KB^{m+1}}{\sqrt{2|D|}^{\frac{m+1}{2}}} \tanh^{2m} \left(\sqrt{\frac{B}{2}} z \right) \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{B}{2}} z \right) + \right.
 \end{aligned}$$

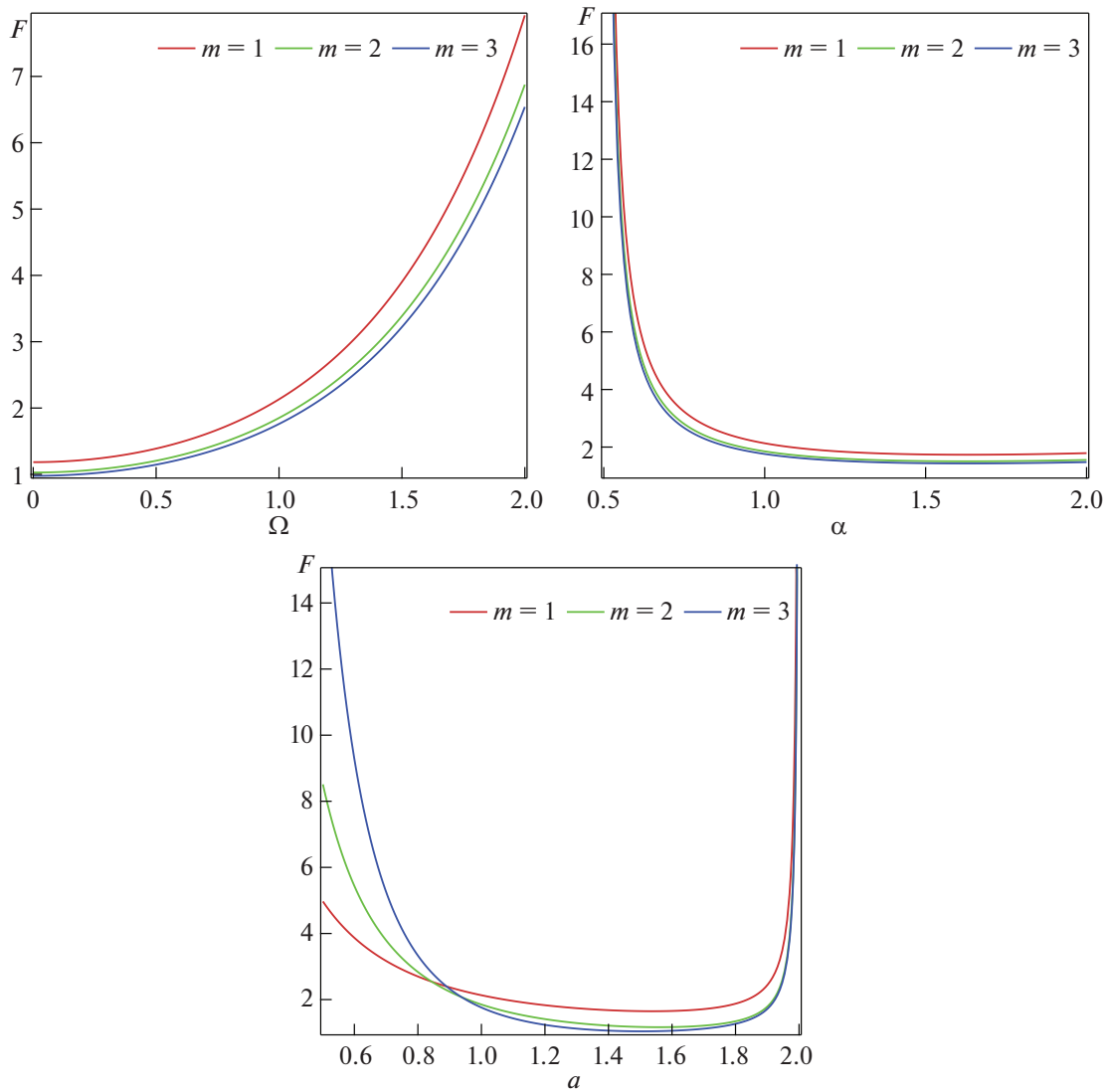


Рис. 2. Зависимость критического значения F возникновения гетероклинической бифуркации от различных параметров управляющей системы при $C_0 = 3$, $\mu = 1$, $\gamma = 1$, $\delta = 1$, $\Omega = 1$ (кроме верхнего левого рисунка), $\alpha = 1$ (кроме верхнего правого рисунка) и $a = 1$ (кроме нижнего рисунка).

$$\begin{aligned}
 & + \frac{LB^{m+\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}|D|^{m+1}} \tanh^{2m+1}\left(\sqrt{\frac{B}{2}}z\right) \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{B}{2}}z\right) dz = \\
 & = \frac{FB}{\sqrt{2}|D|} I_3^1 \cos \Omega z_0 + \frac{GB^{3/2}}{\sqrt{2}|D|} I_4^1(2) \pm \\
 & \pm \frac{KB^{m+1}}{\sqrt{2}|D|^{\frac{m+1}{2}}} I_4^1(2m) + \frac{LB^{m+\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}|D|^{m+1}} I_4^1(2m+1) = \\
 & = \frac{\sqrt{2}\pi\Omega F}{\sqrt{|D|}} \operatorname{csch} \frac{\pi\Omega}{\sqrt{2}B} \cos \Omega z_0 + \\
 & + \frac{2GB}{3|D|} + \frac{2KB^{m+\frac{1}{2}}}{(2m+1)|D|^{\frac{m+1}{2}}},
 \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned}
 I_3^1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{B}{2}}z\right) \cos \Omega z dz, I_4^1(k) = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{B}{2}}z\right) \tanh^k\left(\sqrt{\frac{B}{2}}z\right) dz.
 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Детальное взятие интегралов (3.11) приведено в приложении А.

Таким образом, функция Мельникова (3.10), построенная вдоль гетероклинической орбиты (3.5), обладает простыми нулями уже не при произвольных значениях управляющих параметров. Условие наличия простых нулей у (3.10) запишется следующим образом

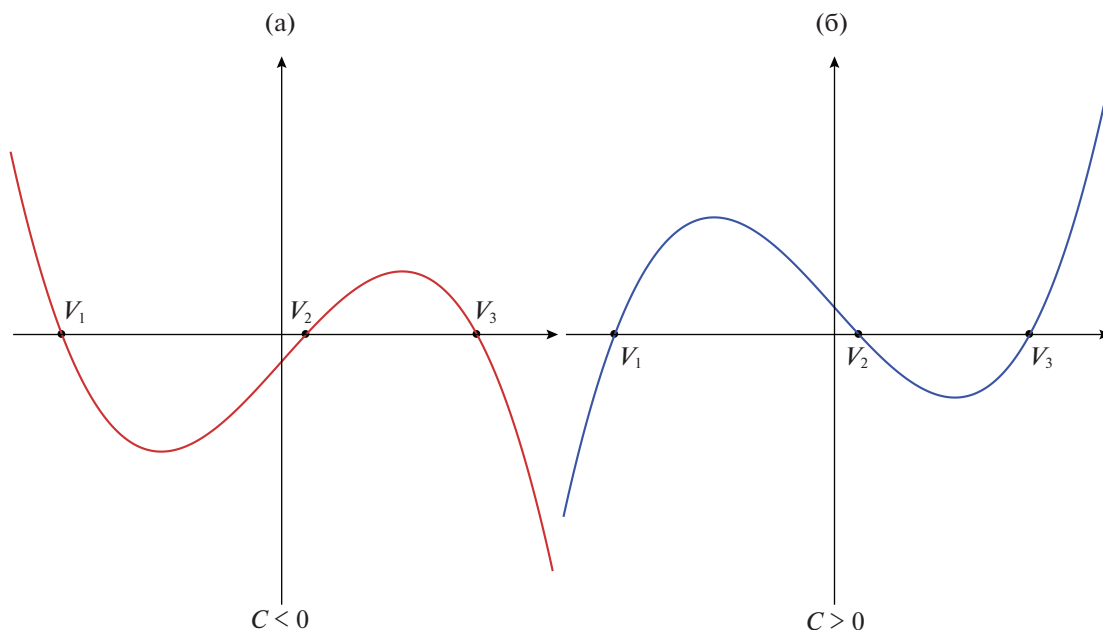


Рис. 3. Графики кубических парабол $h(V)$, задаваемых вторым уравнением системы (4.6).

$$\frac{\sqrt{2}\pi\Omega F}{\sqrt{|D|}} \left| \operatorname{csch} \frac{\pi\Omega}{\sqrt{2B}} \right| > \left| \frac{2GB}{3|D|} + \frac{2KB^{\frac{m+1}{2}}}{(2m+1)|D|^{\frac{m+1}{2}}} \right|. \quad (3.12)$$

Зависимость критического значения амплитуды внешней силы F от управляющих параметров уравнения с учетом ранее введенных обозначений (2.8) представлена на рис. 2. На представленных рисунках для значений параметров над кривыми выполняется необходимое условие возникновения гетероклинической бифуркации (3.10).

4. СЛУЧАЙ 2. $A = -3$ И $f(y) = y$. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МЕЛЬНИКОВА К УРАВНЕНИЮ (2.9)

Рассмотрим второй случай (2.9)

$$\begin{aligned} y_{zz} - 3\frac{y_z^2}{y} + By + \frac{C}{y^3} + Dy^3 = \\ = \epsilon \left(F \cos \omega z + Gy + \frac{H}{y} + Ey^{2m-2} + \right. \\ \left. + Jy^{2m-1} + Ky^{2m} + Ly^{2m+1} \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Мотивация этого рассмотрения заключается в том, что, как и в предыдущем разделе, здесь можно получить явное выражение сепаратрисы, используемое в методе Мельникова [7]. Рассмотрим невозмущенный вариант уравнения (4.1)

$$y_{zz} - 3\frac{y_z^2}{y} + By + \frac{C}{y^3} + Dy^3 = 0. \quad (4.2)$$

Введя в уравнение (4.2) следующую замену

$$y(z) = V(z)^{-1/2}, \quad (4.3)$$

получим

$$V_{zz} - 2CV^3 - 2BV - 2D = 0. \quad (4.4)$$

Уравнение (4.4) в канонической форме имеет вид системы уравнений

$$V_z = W, \quad W_z = 2CV^3 + 2BV + 2D. \quad (4.5)$$

Система уравнений (4.5) может иметь одну или три стационарные точки в зависимости от значений управляющих параметров системы, так как значения их координат удовлетворяют следующим уравнениям

$$W = 0, \quad h(V) \equiv CV^3 + BV + D = 0. \quad (4.6)$$

Явные выражения координат стационарных точек по оси V являются громоздкими, поэтому приводить здесь их не будем. Заметим, однако, что для применения метода Мельникова необходимо, чтобы невозмущенная система обладала сепаратрисой, что возможно только в случае трех стационарных точек. Таким образом, потребуем, чтобы дискриминант кубического полинома в правой части второго уравнения системы (4.5) был положителен

$$-16C(27CD^2 + 4B^3) > 0, \quad (4.7)$$

что эквивалентно выполнению одного из двух следующих наборов неравенств

$$B > 0, \quad -\frac{4B^3}{27D^2} < C < 0, \quad (4.8)$$

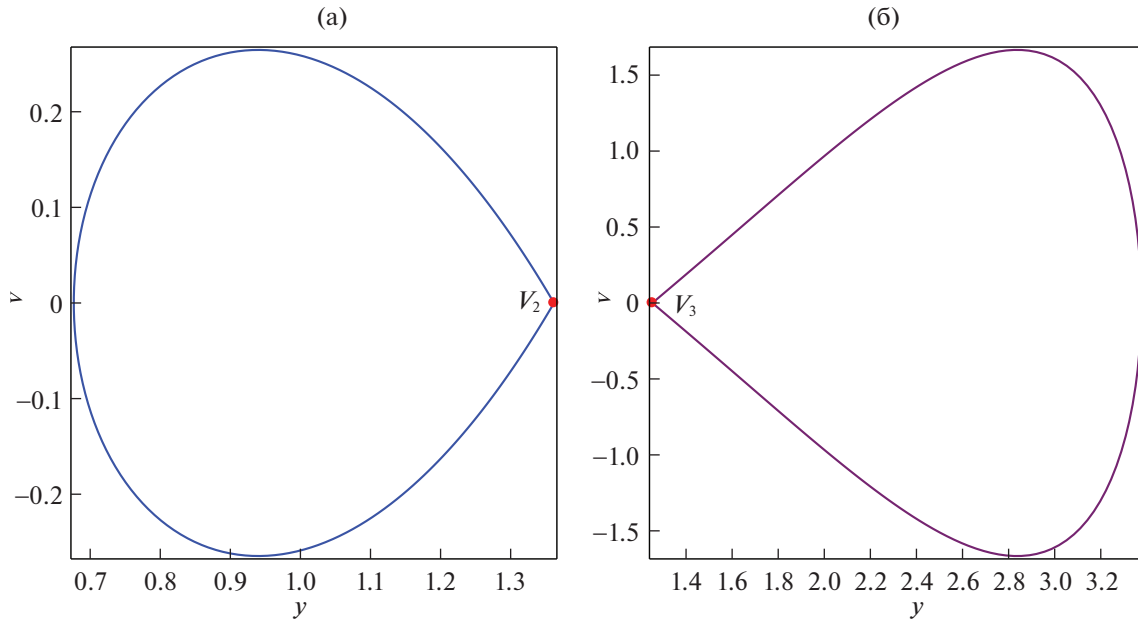


Рис. 4. Гомоклинические орбиты системы (4.2) при $\epsilon = 0$: а) $B = -1$, $D = -1/2$, $C = -1/4$; б) $B = -1$, $D = 1/4$, $C = 3/2$.

$$B < 0, \quad 0 < C < -\frac{4B^3}{27D^2}. \quad (4.9)$$

Предполагая в дальнейшем, что выполняются условия (4.8) или (4.9), обозначим вещественные корни уравнения (4.6) как V_1 , V_2 , V_3 , без ограничения общности полагая, что $V_1 < V_2 < V_3$. Устойчивость точки покоя $(V_i, 0)$, $i = 1..3$ определяется собственными значениями следующей матрицы Якоби

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6CV_i^2 + 2B & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

которые равны

$$\lambda_{1,2}|_{V_i} = \pm \sqrt{6CV_i^2 + 2B}. \quad (4.11)$$

Итак, получаем, что, в случае выполнения неравенств (4.8) две стационарные точки системы $(V_1, 0)$ и $(V_3, 0)$ являются центрами, а $(V_2, 0)$ — седлом; в случае (4.9) — наоборот. Схематически доказать это утверждение можно с помощью рис. 3. Из рисунков видно, что при $C > 0$ (рис. 3а) функция $h(V)$ в точках V_1 и V_3 пересекает ось V с положительной производной:

$$\left. \frac{dh}{dV} \right|_{V=V_{1,3}} = 3CV_{1,3}^2 + B > 0, \quad (4.12)$$

откуда следует, что $\lambda_{1,2}|_{V_{1,3}}$ являются вещественными числами разных знаков, а значит $V_{1,3}$ — седловые точки. С помощью аналогичного анализа

можно прийти к выводу, что V_2 — центр при $C > 0$, также рассмотреть случай $C < 0$.

Система (4.5) является гамильтониановой с Гамильтонианом

$$H(V, W) = \frac{W^2}{2} - \frac{CV^4}{2} - BV^2 - 2DV. \quad (4.13)$$

Принимая во внимание проведенный выше анализ устойчивости стационарных точек, в случае (4.8) имеем только одну допустимую сепаратрису системы (4.5).

(i) Гомоклиническая орбита, соединяющая седло V_2 само с собой.

В случае (4.9) количество потенциально возможных вариантов увеличивается до трех случаев:

(i) гомоклиническая орбита, соединяющая седло V_1 само с собой;

(ii) гомоклиническая орбита, соединяющая седло V_3 само с собой;

(iii) гетероклиническая орбита, соединяющая седла V_1 и V_3 между собой.

Теперь, чтобы успешно применить метод Мельникова для исследования нелинейной динамики системы уравнений (4.1), нам нужно выяснить, в каких областях значений параметров гомоклинические или гетероклинические орбиты существуют и найти их явные выражения. Случай гетероклинической орбиты можно исключить сразу, потому что равенство $H(V_1, 0) = H(V_3, 0)$ при $D \neq 0$ выполняется лишь при $V_1 = V_3$, а значит

о случае трех стационарных точек говорить не имеет смысла.

Предпримем попытку найти явные выражения гомоклинических орбит системы (4.5). Если гомоклиническая орбита проходит через точку $(V_i, 0)$, $i = 1..3$, то она является следующей линией уровня Гамильтониана

$$\frac{W^2}{2} - \frac{CV^4}{2} - BV^2 - 2DV = -\frac{CV_i^4}{2} - BV_i^2 - 2DV_i. \quad (4.14)$$

Учитывая, что $W = V_z$, предположим возможность следующего разложения на множители

$$\begin{aligned} \frac{C(V^4 - V_i^4)}{2} + B(V^2 - V_i^2) + 2D(V - V_i) = \\ = \frac{C}{2}(V - v_{1i})(V - v_{2i})(V - v_{3i})(V - V_i), \quad C \neq 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Разделив левую часть уравнения (4.15) на $V - V_i$, получим

$$V^3 + V_i V^2 + \frac{CV_i^2 + 2B}{C}V + \frac{CV_i^3 + 2BV_i + 4D}{C} = 0. \quad (4.16)$$

Можно заметить, что если V_i является стационарной точкой рассматриваемой системы (4.5), то $V = V_i$ обязательно является корнем уравнения (4.16), так как при подстановке в него $V = V_i$ получаем

$$\frac{4(CV_i^3 + BV_i + D)}{C} \equiv 0, \quad (4.17)$$

что с точностью до множителя является уравнением стационарной точки.

С учетом приведенных выше замечаний (4.15) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{C(V^4 - V_i^4)}{2} + B(V^2 - V_i^2) + 2D(V - V_i) = \\ = \frac{C}{2}(V - v_{1i})(V - v_{2i})(V - V_i)^2, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где v_{1i} и v_{2i} удовлетворяют следующему квадратному уравнению

$$V^2 + 2V_i V + \frac{3CV_i^2 + 2B}{C} = 0. \quad (4.19)$$

Введем в (4.18) замену [19–21]

$$V = \frac{Z^2 v_2 (v_{1i} - V_i) - v_{1i} (v_{2i} - V_i)}{Z^2 (v_{1i} - V_i) - (v_{2i} - V_i)}. \quad (4.20)$$

С учетом (4.20) уравнение (4.18) принимает вид

$$\left(\frac{dZ}{dz}\right)^2 = \frac{C(v_{1i} - V_i)(v_{2i} - V_i)}{4}(1 - Z^2)(1 - k^2 Z^2), \quad (4.21)$$

где

$$k^2 = \frac{(v_{1i} - V_i)(v_{2i} - V_i)}{(v_{2i} - V_i)(v_{1i} - V_i)} \equiv 1. \quad (4.22)$$

Решением уравнения (4.21) является функция

$$Z(z) = \tanh\{s(z - z_0)\}, \quad (4.23)$$

где

$$s^2 = \frac{C(v_{1i} - V_i)(v_{2i} - V_i)}{4}, \quad (4.24)$$

а z_0 – произвольная постоянная.

Тогда решение уравнения (4.14) может быть выражено как

$$V(z) = \frac{v_{1i}(V_i - v_{2i}) + v_{2i}(v_{1i} - V_i) \tanh^2 sz}{V_i - v_{2i} + (v_{1i} - V_i) \tanh^2 sz}. \quad (4.25)$$

Для удобства здесь произвольная постоянная z_0 выбрана равной нулю. Явный вид полученного решения говорит нам о том, что для его вещественности нужно, чтобы v_{1i} , v_{2i} и s были вещественными. Вещественность v_{1i} и v_{2i} обеспечивается неотрицательностью дискриминанта уравнения (4.19):

$$-\frac{8(CV_i^2 + B)}{C} \geq 0. \quad (4.26)$$

Вещественность s обеспечивается выполнением неравенства

$$C(v_{1i} - V_i)(v_{2i} - V_i) > 0. \quad (4.27)$$

Обратим внимание на неравенство (4.27). В соответствии с теоремой Виета и из уравнения (4.19) следует, что

$$v_{1i} + v_{2i} = -2V_i, \quad v_{1i}v_{2i} = \frac{3CV_i^2 + 2B}{C}. \quad (4.28)$$

Подставив (4.28) в (4.27), для седловых точек покоя имеем

$$C(v_{1i}v_{2i} + V_i^2 - V_i(v_{1i} + v_{2i})) = 6CV_i^2 + 2B > 0, \quad (4.29)$$

из чего следует, что $s \in \mathbb{R}$.

Заметим, что при выполнении вышеприведенных условий функция (4.25) удовлетворяет условию

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} V(z) = V_i, \quad i = 1..3, \quad (4.30)$$

то есть является гомоклинической орбитой.

Сводные результаты условий существования гомоклинических орбит седловых точек V_i систе-

Таблица 1. Значения управляющих параметров, при которых через стационарную точку V_i системы (4.5) проходит гомоклиническая орбита (4.25)

Параметры	Стац. точка	V_1	V_2	V_3
$B > 0, C \in \left(-\frac{4B^3}{27D^2}, 0\right)$		–	$CV_2^2 + B \geq 0$	–
$B < 0, C \in \left(0, -\frac{4B^3}{27D^2}\right)$		$CV_1^2 + B \leq 0$	–	$CV_3^2 + B \leq 0$

мы (4.5) представлены в таблице 1. Обратной заменой перейдем теперь к переменной y . Гомо-

клиническая орбита седловой точки покоя $V_i^{-1/2}$ системы (4.1) имеет вид

$$(y_{2hom}(z), v_{2hom}(z)) = \left(\left(\frac{V_i - v_{2i} + (v_{1i} - V_i) \tanh^2 sz}{v_{1i}(V_i - v_{2i}) + v_{2i}(v_{1i} - V_i) \tanh^2 sz} \right)^{\frac{1}{2}}, \right. \\ \left. \frac{(v_{1i} - V_i)(v_{2i} - V_i)(v_{2i} - v_{1i})s \tanh sz (1 - \tanh^2 sz)}{(V_i - v_{2i} + (v_{1i} - V_i) \tanh^2 sz)^{\frac{1}{2}} (v_{1i}(V_i - v_{2i}) + v_{2i}(v_{1i} - V_i) \tanh^2 sz)^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (4.31)$$

в случае $V_i \geq 0$. Неотрицательность V_i требуется для того, чтобы координата $V_i^{-1/2}$ стационарной точки по оси y была вещественным числом.

Примеры гомоклинических орбит, задаваемых формулой (4.31), представлены на рис. 4.

Выполнив поиск явных выражений для гомоклинических орбит системы (4.2), построим функцию Мельникова вдоль этих орбит

$$M_{2hom}(z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} (Fv_{2hom}(z) \cos \Omega(z + z_0) + Gy_{2hom}(z)v_{2hom}(z) + \frac{Hv_{2hom}(z)}{y_{2hom}(z)} + \\ + Ey_{2hom}^{2m-2}(z)v_{2hom}(z) + Jy_{2hom}^{2m-1}(z)v_{2hom}(z) + Ky_{2hom}^{2m}(z)v_{2hom}(z) + Ly_{2hom}^{2m+1}(z)v_{2hom}(z))dz = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} Fv_{2hom}(z) \cos \Omega(z + z_0)dz + 2 \int_{y_{tp}}^{y_i} \left(Gy_{2hom} + \frac{H}{y_{2hom}} + Ey_{2hom}^{2m-2} + Jy_{2hom}^{2m-1} + Ky_{2hom}^{2m} + Ly_{2hom}^{2m+1} \right) dy_{2hom}, \quad (4.32)$$

где учтено, что $v_{2hom} = \frac{dy_{2hom}}{dz}$; $y_i = V_i^{-1/2}$ — точка покоя, которую орбита (y_{2hom}, v_{2hom}) соединяет саму с собой, а y_{tp} — точка поворота гомоклинической

орбиты, при различных значениях управляющих параметров являющаяся либо $v_{1i}^{-1/2}$, либо $v_{2i}^{-1/2}$, что вытекает из уравнения (4.18).

С учетом явного вида гомоклинической орбиты (4.31) функция Мельникова (4.32) обретет вид

$$M_{2hom}(z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(Fv_{1i} - V_i)(v_{2i} - V_i)(v_{2i} - v_{1i})s \tanh sz (1 - \tanh^2 sz) \cos \Omega(z + z_0) dz}{(V_i - v_{2i} + (v_{1i} - V_i) \tanh^2 sz)^{\frac{1}{2}} (v_{1i}(V_i - v_{2i}) + v_{2i}(v_{1i} - V_i) \tanh^2 sz)^{\frac{3}{2}}} + \\ + \left(Gy_2^2 + H \ln y_2 + \frac{Ey_2^{2m-1}}{2m-1} + \frac{Jy_2^{2m}}{2m} + \frac{Ky_2^{2m+1}}{2m+1} + \frac{Ly_2^{2m+2}}{2m+2} \right) \Big|_{y_{tp}}^{y_i} = FI_1^{(2)} \cos \Omega z_0 - FI_2^{(2)} \sin \Omega z_0 +$$

$$\begin{aligned}
& + G(y_i^2 - y_{ip}^2) + H \ln \frac{y_i}{y_{ip}} + \frac{E(y_i^{2m-1} - y_{ip}^{2m-1})}{2m-1} + \frac{J(y_i^{2m} - y_{ip}^{2m})}{2m} + \frac{K(y_i^{2m+1} - y_{ip}^{2m+1})}{2m+1} + \\
& + \frac{L(y_i^{2m+2} - y_{ip}^{2m+2})}{2m+2} = -F \sqrt{I_1^{(2)2} + I_2^{(2)2}} \sin(\Omega z_0 + \Theta) + G(y_i^2 - y_{ip}^2) + H \ln \frac{y_i}{y_{ip}} + \\
& + \frac{E(y_i^{2m-1} - y_{ip}^{2m-1})}{2m-1} + \frac{J(y_i^{2m} - y_{ip}^{2m})}{2m} + \frac{K(y_i^{2m+1} - y_{ip}^{2m+1})}{2m+1} + \frac{L(y_i^{2m+2} - y_{ip}^{2m+2})}{2m+2},
\end{aligned} \quad (4.33)$$

где

$$\begin{aligned}
I_1^{(2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(v_{li} - V_i)(v_{2i} - V_i)(v_{2i} - v_{li})s \tanh sz(1 - \tanh^2 sz) \cos \Omega z dz}{(V_i - v_{2i} + (v_{li} - V_i) \tanh^2 sz)^{\frac{1}{2}} (v_{li}(V_i - v_{2i}) + v_{2i}(v_{li} - V_i) \tanh^2 sz)^{\frac{3}{2}}}, \\
I_2^{(2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(v_{li} - V_i)(v_{2i} - V_i)(v_{2i} - v_{li})s \tanh sz(1 - \tanh^2 sz) \sin \Omega z dz}{(V_i - v_{2i} + (v_{li} - V_i) \tanh^2 sz)^{\frac{1}{2}} (v_{li}(V_i - v_{2i}) + v_{2i}(v_{li} - V_i) \tanh^2 sz)^{\frac{3}{2}}}, \quad \Theta = -\arctan \frac{I_1^{(2)}}{I_2^{(2)}}.
\end{aligned} \quad (4.34)$$

Условие, при котором функция (4.33) меняет знак, выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}
& \left| G(y_i^2 - y_{ip}^2) + H \ln \frac{y_i}{y_{ip}} + \frac{E(y_i^{2m-1} - y_{ip}^{2m-1})}{2m-1} + \right. \\
& + \frac{J(y_i^{2m} - y_{ip}^{2m})}{2m} + \frac{K(y_i^{2m+1} - y_{ip}^{2m+1})}{2m+1} + \\
& \left. + \frac{L(y_i^{2m+2} - y_{ip}^{2m+2})}{2m+2} \right| \leq |F \sqrt{I_1^{(2)2} + I_2^{(2)2}}|.
\end{aligned} \quad (4.35)$$

Таким образом, необходимое условие существования гомоклинического хаоса в системе выражается неравенством (4.35), из которого можно определить области значений управляющих параметров, при которых может наблюдаться нерегулярное динамическое поведение.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено возмущенное обобщенное уравнение Гинзбурга–Ландау в переменных бегущей волны. Путем анализа устойчивости стационарных точек уравнения найдены значения параметров, при которых система обладает гетероклиническими и гомоклиническими орбитами. Найдены явные выражения сепаратрис седловых точек системы для двух частных случаев значений управляющих параметров. Исследование анализа устойчивости этих орбит по отношению к малым возмущениям при помощи построения функции Мельникова вдоль них. Посредством анализа нулей построенной функции найдены ограничения на управляющие параметры системы, при которых выполняется необходимое условие возникновения гомоклинического или гетероклинического хаоса.

А. НАХОЖДЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ МЕЛЬНИКОВА

Рассмотрим более подробно нахождение интегралов Мельникова (3.8) и (3.11). Начнем с интеграла

$$\begin{aligned}
I_1^1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} \sqrt{|B|} x \tanh \sqrt{|B|} x \sin \Omega x dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{|B|}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} x \tanh x \sin \frac{\Omega z}{\sqrt{|B|}} dz
\end{aligned} \quad (A. 1)$$

для вычисления которого используем следующую вспомогательную функцию

$$f_1(z) = \operatorname{sech} z \tanh z e^{\frac{i\Omega z}{\sqrt{|B|}}}. \quad (A. 2)$$

Контур интегрирования выберем в форме полукруга радиуса R в верхней полуплоскости. Так как функция $g_1(z) = \operatorname{sech} z \tanh z$ на $C_R = \{z | z = Re^{i\phi}\}$ удовлетворяет следующему соотношению

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{\phi \in [0, \pi]} |g_1(R, \phi)| = 0, \quad (A. 3)$$

то она равномерно сходится к нулю при $R \rightarrow \infty$ и согласно лемме Жордана при $R \rightarrow \infty$

$$\int_{C_R} f_1(z) dz = \int_{C_R} g_1(z) e^{\frac{i\Omega z}{\sqrt{|B|}}} dz \rightarrow 0. \quad (A. 4)$$

По основной теореме о вычетах имеем, что

$$\int_{-R}^R f_1(x) dx + \int_{C_R} f_1(z) dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Res}_{z=z_k} f_1(z), \quad (A. 5)$$

где $z_k = \left\{ \frac{i\pi}{2} + i\pi k | k \in \mathbb{Z}^0 \right\}$ — особые точки функции $f_1(z)$. В каждой из особых точек $f_1(z)$ имеет

поллюс второго порядка, вычет в котором рассчитывается следующим образом

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f_1(z) &= \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d}{dz} (z - z_k)^2 f_1(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d}{dz} (z - z_k)^2 \operatorname{sech} z \tanh z e^{\frac{i\Omega z}{\sqrt{|B|}}} = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d}{dz} \left(\frac{2(z - z_k)^2 e^z (e^{2z} - 1)}{(e^{2z} + 1)^2} e^{\frac{i\Omega z}{\sqrt{|B|}}} \right) = \\ &= \frac{(-1)^k \Omega}{\sqrt{|B|}} e^{\frac{2k+1}{2} \frac{\pi\Omega}{\sqrt{|B|}}}. \end{aligned} \quad (\text{A. 6})$$

Переходя к пределу $R \rightarrow \infty$ в (A.5), получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) dx &= \frac{2\pi i \Omega}{\sqrt{|B|}} e^{\frac{\pi\Omega}{2\sqrt{|B|}}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{\frac{-\pi k \Omega}{\sqrt{|B|}}} = \\ &= \frac{2\pi i \Omega}{\sqrt{|B|}} e^{\frac{\pi\Omega}{2\sqrt{|B|}}} \left(-\sum_{m=0}^{\infty} e^{\frac{-\pi(2m+1)\Omega}{\sqrt{|B|}}} + \sum_{m=0}^{\infty} e^{\frac{-2\pi m \Omega}{\sqrt{|B|}}} \right) = \\ &= \frac{2\pi i \Omega}{\sqrt{|B|}} e^{\frac{-\pi\Omega}{2\sqrt{|B|}}} \left(-\frac{e^{\frac{\pi\Omega}{\sqrt{|B|}}}}{1 - e^{\frac{2\pi\Omega}{\sqrt{|B|}}}} + \frac{1}{1 - e^{\frac{2\pi\Omega}{\sqrt{|B|}}}} \right) = \\ &= \frac{2\pi i \Omega}{\sqrt{|B|}} \frac{e^{\frac{-\pi\Omega}{2\sqrt{|B|}}}}{1 - e^{\frac{-\pi\Omega}{\sqrt{|B|}}}} = \frac{\pi i \Omega}{\sqrt{|B|}} \operatorname{sech} \frac{\pi\Omega}{2\sqrt{|B|}}. \end{aligned} \quad (\text{A. 7})$$

Тогда искомым интеграл

$$I_1^1 = \frac{1}{\sqrt{|B|}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) dx = \frac{\pi\Omega}{|B|} \operatorname{sech} \frac{\pi\Omega}{2\sqrt{|B|}}. \quad (\text{A. 8})$$

Второй искомым интеграл равен нулю, так как интегрируемое выражение является нечетной функцией в симметричных пределах

$$I_2^1(m) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^m \sqrt{|B|} z \tanh \sqrt{|B|} z dz = 0. \quad (\text{A. 9})$$

Значение интеграла

$$\begin{aligned} I_3^1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{B}{2}} x \right) \cos \Omega x dx = \\ &= \sqrt{\frac{2}{B}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 x \cos \left(\sqrt{\frac{2}{B}} \Omega x \right) dx \end{aligned} \quad (\text{A. 10})$$

найдем с помощью вспомогательной функции

$$f_2(z) = \operatorname{sech}^2 z e^{i\sqrt{\frac{2}{B}} \Omega z}. \quad (\text{A. 11})$$

Выбрав такой же контур интегрирования, как для интеграла I_1^1 и, заметив, что $g_2(z) = \operatorname{sech}^2 z$ на C_R

равномерно сходится к нулю при $R \rightarrow \infty$, по лемме Жордана получаем при $R \rightarrow \infty$

$$\int_{C_R} f_2(z) dz = \int_{C_R} g_2(z) e^{i\sqrt{\frac{2}{B}} \Omega z} dz \rightarrow 0. \quad (\text{A. 12})$$

В соответствии с основной теоремой о вычетах имеем

$$\int_{-R}^R f_2(x) dx + \int_{C_R} f_2(z) dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Res} f_2(z), \quad (\text{A. 13})$$

где $z_k = \left\{ \frac{i\pi}{2} + i\pi k \mid k \in \mathbb{Z}^0 \right\}$ — особые точки функции $f_2(z)$. Во всех своих особых точках $f_2(z)$ имеет полюс второго порядка, вычет в котором вычисляется следующим образом

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f_2(z) &= \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d}{dz} (z - z_k)^2 f_2(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d}{dz} (z - z_k)^2 \operatorname{sech}^2 z e^{i\sqrt{\frac{2}{B}} \Omega z} = \\ &= -i\Omega \sqrt{\frac{2}{B}} e^{\frac{(2k+1)\pi\Omega}{\sqrt{2B}}}. \end{aligned} \quad (\text{A. 14})$$

При переходе к пределу $R \rightarrow \infty$ в (A.13), имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) dx &= \frac{2\sqrt{2}\pi\Omega}{\sqrt{B}} \sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{(2k+1)\pi\Omega}{\sqrt{2B}}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi\Omega}{\sqrt{B}} \operatorname{csch} \frac{\pi\Omega}{\sqrt{2B}} \end{aligned} \quad (\text{A. 15})$$

Искомым же интеграл имеет вид

$$I_3^1 = \sqrt{\frac{2}{B}} \Re \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) dx = \frac{2\pi\Omega}{B} \operatorname{csch} \frac{\pi\Omega}{\sqrt{2B}}. \quad (\text{A. 16})$$

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} I_4^1(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{B}{2}} z \right) \tanh^k \left(\sqrt{\frac{B}{2}} z \right) dz = \\ &= \sqrt{\frac{2}{B}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 z \tanh^k z dz. \end{aligned} \quad (\text{A. 17})$$

Проведя в (A.17) алгебраические преобразования, получим

$$\begin{aligned} I_4^1(k) &= \sqrt{\frac{2}{B}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4e^{2z} (e^{2z} - 1)^k dz}{(e^{2z} + 1)^{k+2}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{B}} \int_0^{\infty} \frac{2(y-1)^k dy}{(y+1)^{k+2}} = \sqrt{\frac{2}{B}} \int_1^{\infty} \frac{2(w-2)^k dw}{w^{k+2}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{B}} \int_1^{\infty} 2 \left(1 - \frac{2}{w} \right)^k d \left(1 - \frac{2}{w} \right) = \sqrt{\frac{2}{B}} \frac{(1 - (-1)^{k+1})}{k+1}. \end{aligned} \quad (\text{A. 18})$$

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект государственного задания № 0723-2020-0036).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Agarwal P., Deniz S., Jain S., Alderremy A.A., Aly S. A new analysis of a partial differential equation arising in biology and population genetics via semi analytical techniques // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2020. V. 542. Article ID 122769.
2. FitzHugh R. Mathematical models of threshold phenomena in the nerve membrane // *The bulletin of mathematical biophysics*. 1955. V. 17. № 4. P. 257–278.
3. Grinfeld M.A. The stress driven instability in elastic crystals: Mathematical models and physical manifestations // *Journal of Nonlinear Science*. 1993. V. 3. № 1. P. 35–83.
4. Lumley J.L. Computational modeling of turbulent flows // *Advances in applied mechanics*. 1979. V. 18. P. 123–176.
5. Bec J., Khanin K. Burgers turbulence // *Physics reports*. 2007. V. 447. № 1–2. P. 1–66.
6. Holmes P.J. Bifurcations to divergence and flutter in flow-induced oscillations: a finite dimensional analysis // *Journal of Sound and Vibration*. 1977. V. 53. № 4. P. 471–503.
7. Kudryashov N.A. First integrals and general solution of the complex Ginzburg–Landau equation // *Applied Mathematics and Computation*. 2020. V. 386. Article ID 125407.
8. Biswas A. Temporal 1-soliton solution of the complex Ginzburg–Landau equation with power law nonlinearity // *Progress in Electromagnetics Research*. 2009. V. 96. P. 1–7.
9. Shwetanshumala S. Temporal solitons of modified complex Ginzberg Landau equation // *Progress in Electromagnetics Research Letters*. 2008. V. 3. P. 17–24.
10. Zayed E.M., Nofal T.A., Alngar M.E., El-Horbaty M.M. Cubic-quartic optical soliton perturbation in polarization-preserving fibers with complex Ginzburg–Landau equation having five nonlinear refractive index structures // *Optik*. 2021. V. 231. Article ID 166381.
11. Gepreel K.A., Zayed E.M.E., Alngar M.E.M. New optical solitons perturbation in the birefringent fibers for the CGL equation with Kerr law nonlinearity using two integral schemes methods. *Optik*. 2021. 227, p. 166099.
12. Мельников В.К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // *Труды Московского математического общества*. 1963. Т. 12. С. 3–52.
13. Holmes C., Holmes P. Second order averaging and bifurcations to subharmonics in Duffing's equation // *Journal of Sound and Vibration*. 1981. V. 78. № 2. P. 161–174.
14. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields / Springer Science & Business Media, 2013.
15. Kudryashov N.A., Lavrova S.F. Complex dynamics of perturbed solitary waves in a nonlinear saturable medium: A Melnikov approach // *Optik*. 2022. V. 265. Article ID 169454.
16. Kudryashov N.A., Lavrova S.F. 2021. Dynamical properties of the generalized model for description of propagation pulses in optical fiber with arbitrary refractive index // *Optik*. 2022. V. 245. Article ID 167679.
17. Лаврова С.Ф., Кудряшов Н.А. Метод Мельникова для обобщенного уравнения Дуффинга // *Вестник НИЯУ МИФИ*, 2021. Т. 10. № 2. С. 135–142.
18. Лаврова С.Ф., Кудряшов Н.А. Применение метода Мельникова к уравнению Трики–Бисваса // *Вестник НИЯУ МИФИ*, 2021. Т. 10. № 4. С. 308–317.
19. Davis H.T. Introduction to nonlinear differential and integral equations. / US Atomic Energy Commission. 1960.
20. Kudryashov N.A. Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber // *Optik*, 2019. V. 194. Article ID 163060.
21. Zaitsev V.F., Polyanin A.D. Handbook of exact solutions for ordinary differential equations. CRC press, 2002.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2022, vol. 11, no. 3, pp. 235–247

Stability of Optical Pulses Described by the Perturbed Ginzburg–Landau Equation

S. F. Lavrova^{a, #} and N. A. Kudryashov^{a, #}

^aNational Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: infuriatedot@gmail.com

[#]e-mail: nakudr@gmail.com

Received September 22, 2022; revised September 27, 2022; accepted September 27, 2022

Abstract—A perturbed second-order ordinary differential equation obtained by passing to traveling wave variables in the generalized Ginzburg–Landau equation is considered. The stability of the stationary points of the equation is analyzed and intervals of parameters are found for which the system has separatrices of saddle points. Explicit expressions for the homoclinic and heteroclinic orbits of the system are found for two special

cases of parameters. The stability of these orbits is analyzed by constructing the Melnikov function along them. The analysis of the zeros of the Melnikov function allows us to determine the ranges of the control parameters of the system where the necessary condition for the occurrence of Melnikov chaos is satisfied.

Keywords: Melnikov method, dynamical systems, chaos

DOI: 10.56304/S2304487X22030075

REFERENCES

1. Agarwal P., Deniz S., Jain S., Alderremy A.A., Aly S. A new analysis of a partial differential equation arising in biology and population genetics via semi analytical techniques. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2020, vol. 542, Article ID 122769.
2. FitzHugh R. Mathematical models of threshold phenomena in the nerve membrane. *The bulletin of mathematical biophysics*, 1955, vol. 17, no. 4, pp. 257–278.
3. Grinfeld M.A. The stress driven instability in elastic crystals: Mathematical models and physical manifestations. *Journal of Nonlinear Science*, 1993, vol. 3, no. 1, pp. 35–83.
4. Lumley J.L. Computational modeling of turbulent flows. *Advances in applied mechanics*, 1979, vol. 18, pp. 123–176.
5. Bec J., Khanin K. Burgers turbulence. *Physics reports*, 2007, vol. 447, no. 1–2, pp. 1–66.
6. Holmes P.J. Bifurcations to divergence and flutter in flow-induced oscillations: a finite dimensional analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 1977, vol. 53, no. 4, pp. 471–503.
7. Kudryashov N.A. First integrals and general solution of the complex Ginzburg-Landau equation. *Applied Mathematics and Computation*, 2020, vol. 386, Article ID 125407.
8. Biswas A. Temporal 1-soliton solution of the complex Ginzburg-Landau equation with power law nonlinearity. *Progress in Electromagnetics Research*, 2009, vol. 96, pp. 1–7.
9. Shwetanshumala S. Temporal solitons of modified complex Ginzberg Landau equation. *Progress In Electromagnetics Research Letters*, 2008, vol. 3, pp. 17–24.
10. Zayed E.M., Nofal T.A., Alngar M.E., El-Horbaty M.M. Cubic-quartic optical soliton perturbation in polarization-preserving fibers with complex Ginzburg-Landau equation having five nonlinear refractive index structures. *Optik*, 2021, vol. 231, Article ID 166381.
11. Gepreel K.A., Zayed E.M.E., Alngar M.E.M. New optical solitons perturbation in the birefringent fibers for the CGL equation with Kerr law nonlinearity using two integral schemes methods. *Optik*, 2021, vol. 227, pp. 166099.
12. Melnikov V.K. Ob ustojchivosti centra pri periodicheskikh po vremeni vozmushcheniyah. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva*, 1963, vol. 12, pp. 3–52. (in Russian)
13. Holmes C., Holmes P. Second order averaging and bifurcations to subharmonics in Duffing's equation. *Journal of Sound and Vibration*, 1981, vol. 78, no. 2, pp. 161–174.
14. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. *Springer Science & Business Media*, 2013.
15. Kudryashov N.A., Lavrova S.F. Complex dynamics of perturbed solitary waves in a nonlinear saturable medium: A Melnikov approach. *Optik*, 2022, vol. 265, Article ID 169454.
16. Kudryashov N.A., Lavrova S.F. 2021. Dynamical properties of the generalized model for description of propagation pulses in optical fiber with arbitrary refractive index. *Optik*, 2022, vol. 245, Article ID 167679.
17. Lavrova S.F., Kudryashov N.A. Metod Mel'nikova dlya obobshchennogo uravneniya Duffinga. [Melnikov's method for the generalized Duffing equation]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2021, vol. 10, no. 2. pp. 135–142. (in Russian)
18. Lavrova S.F., Kudryashov N.A. Primenenie metoda Mel'nikova k uravneniyu Triki-Bisvasa. [Application of the Melnikov Method to the Tricky-Biswas Equation]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2021, vol. 10, no. 4, pp. 308–317. (in Russian)
19. Davis H.T. *Introduction to nonlinear differential and integral equations*. US Atomic Energy Commission, 1960.
20. Kudryashov N.A. Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber. *Optik*, 2019, vol. 194, Article ID 163060.
21. Zaitsev V.F., Polyanin A.D. *Handbook of exact solutions for ordinary differential equations*. CRC press, 2002.