

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.51

ПРИМЕР НЕПРЕРЫВНОЙ НИГДЕ НЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ С МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ, НЕ ПРЕВОСХОДЯЩИМ ДАННОГО

© 2022 г. Д. С. Теляковский^{1,*}

¹Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия

*e-mail: dtelyakov@mail.ru

Поступила в редакцию 31.07.2022 г.

После доработки 18.09.2022 г.

Принята к публикации 27.09.2022 г.

Для произвольного выпуклого вверх нелипшицева модуля непрерывности $\omega(t)$ построена непрерывная нигде не дифференцируемая функция $\varphi_\omega(x)$, модуль непрерывности которой не превосходит $\omega(t)$ и которая в каждой точке имеет нулевое производное число. Построение следует конструкции непрерывной нигде не дифференцируемой функции, данной Б. Больцано. Если положить $f_\omega(z) = f_\omega(x + iy) := \varphi_\omega(x)$, то $f_\omega(z)$ дает пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции (даже если рассматривать $f_\omega(z)$ как функцию двух действительных переменных), модуль непрерывности которой не превосходит $\omega(t)$ и которая в каждой точке имеет нулевое производное число вдоль двух неколлинеарных направлений. Автором было получено достаточное условие голоморфности, в котором вместо предположения о существовании у $f(z)$ в точках ζ области производной по z вдоль множества E_ζ определенного вида выполнение в точках ζ условия Липшица вдоль E_ζ . Пример функции $f_\omega(z)$ показывает, что в этой теореме условие Липшица ослабить нельзя.

Ключевые слова: модуль непрерывности, нигде не дифференцируемая функция, производное число

DOI: 10.56304/S2304487X22030117

Пусть $\omega(t)$, $t \in [0;1]$, модуль непрерывности (в пространстве непрерывных функций), т.е.:

$$0 = \omega(0) < h(t) \quad \text{при} \quad t > 0;$$

$$\omega(t_1) \leq \omega(t_2), \quad \text{и} \quad \omega(t_1 + t_2) \leq \omega(t_1) + \omega(t_2)$$

$$\text{при любых} \quad 0 < t_1 < t_2, \quad t_1 + t_2 \leq 1.$$

Модуль непрерывности будем называть *нелипшицевым*, если выполнено условие

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\omega(t)}{t} = +\infty.$$

Как показал С.Б. Стечкин¹, для любого модуля непрерывности $\omega(t)$ существует выпуклый вверх модуль непрерывности $\hat{\omega}(t)$ удовлетворяющий неравенствам $\omega(t) \leq \hat{\omega}(t) \leq 2\omega(t)$. Поэтому, не ограничивая общности, модуль непрерывности $\omega(t)$ можно считать выпуклым вверх.

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то $f(x)$ дифференцируема почти всюду и даже восстанавливается как интеграл от своей

производной. При этом условие Липшица здесь ослабить нельзя. То есть если только модуль непрерывности функции $f(x)$ нелипшицев, то $f(x)$ может не быть дифференцируема ни в одной точке. Примеры нигде не дифференцируемых функций с гёльдеровым модулем непрерывности произвольного порядка $\alpha \in (0;1)$, были даны В.С. Лаудом (1951, [2]) и И. Марксом и Г. Пиранияном (1953, [3]). А.И. Рубинштейн (1964, [4]) построил пример нигде не дифференцируемой функции с модулем непрерывности, не превосходящим произвольного нелипшицевого $\omega(t)$. В настоящей работе построен следующий пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции.

Теорема. Для произвольного выпуклого вверх нелипшицевого модуля непрерывности $\omega(t)$, $t \in [0;1]$, существует непрерывная нигде не дифференцируемая функция $\varphi_\omega(x)$, $x \in [0;1]$, для которого выполнены условия:

1) в любой близости от каждой точки $x \in [0;1]$ найдется точка $x' \neq x$, $x' \in [0;1]$, в которой $\varphi_\omega(x') = \varphi_\omega(x)$;

¹ Лемма С.Б. Стечкина с согласия ее автора была впервые опубликована в работе А.В. Ефимова [1], лемма 4. С. 78.

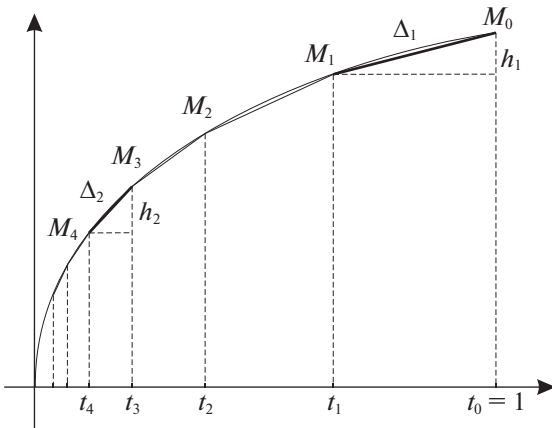


Рис. 1. Вписанная в график модуля непрерывности ломаная $\mathcal{L}$, выбор звеньев Δ_k .

2) модуль непрерывности функции $\varphi_\omega(x)$ не превосходит $\omega(t)$.

Заметим, что из свойства 1) следует, что в каждой точке отрезка $[0;1]$ функция $\varphi_\omega(x)$ имеет нулевое производное число. Существование нулевого производного числа использовано для построения примера, показывающего невозможность ослабления условия Липшица в достаточном условии голоморфности из работы автора [5]. Для построенной в работе А.И. Рубиштейна [4] функции $f_\omega(x)$ было установлено выполнение условия, более слабого, чем существование нулевого производного числа, причем не всюду, а почти всюду.

Введем некоторые обозначения и определения. Если S отрезок, то через $R(S)$ будем обозначать прямоугольник с диагональю S и сторонами, параллельными осям координат. Длину проекции отрезка или прямоугольника на ось Ox будем называть *шириной* этого отрезка или прямоугольника, а на ось Oy — *высотой* этого отрезка или прямоугольника.

Доказательство теоремы проведем за несколько шагов.

1. Построение функции $\varphi_\omega(x)$ и доказательство ее непрерывности. Функция $\varphi_\omega(x)$ будет получена как предел равномерно сходящейся последовательности кусочно-линейных непрерывных функций $\{\varphi_n(x)\}^2$.

Возьмем произвольную, строго убывающую к нулю последовательность положительных чисел $\{t_j\}$, $j \in \mathbb{N}_0$, $t_0 = 1$. Эта последовательность определяет вписанную в график функции $\omega(t)$ ломаную

² Построение аналогично построению функции Б. Больцано — первого примера непрерывной нигде не дифференцируемой функции (около 1830 г.), про функцию Больцано и ее историю см. работу [6] В.Ф. Бржечки.

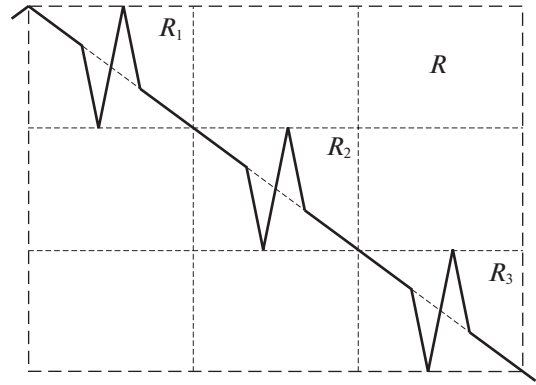


Рис. 2. Преобразование звена ломаной L_n при переходе к L_{n+1} .

линию $\mathcal{L}$ с вершинами в точках $M_j = M_j(t_j, \omega(t_j))$. Так как модуль непрерывности $\omega(t)$ нелипшицев и выпукл вверх, то у звеньев $[M_j, M_{j+1}]$ их угловые

коэффициенты $k_j := \frac{\omega(t_j) - \omega(t_{j+1})}{t_j - t_{j+1}} \nearrow +\infty$.

Выберем последовательность отрезков $\Delta_n := [M_{j_n}, M_{j_{n+1}}]$ для угловых коэффициентов которых выполнено неравенство $k_{j_{n+1}} \geq 10k_{j_n}$, в качестве Δ_1 возьмем отрезок $[M_0, M_1]$. Чтобы не писать двойные индексы, угловой коэффициент отрезка Δ_n будем обозначать k_n . Длину отрезка Δ_n будем обозначать $|\Delta_n|$, а его высоту — h_n (рис. 1).

Построение функций $\varphi_n(x)$, будет определено через построение их графиков L_n , которые являются ломаными с конечным числом звеньев, причем угловые коэффициенты звеньев ломаной L_n принимают значения $\pm k_p$ при $p = 1, \dots, n$.

Ломаные L_n определим по индукции. В качестве L_1 возьмем отрезок прямой $y = k_1x$, $x \in [0;1]$. Предположим, что ломаная L_n построена и по L_n построим ломаную L_{n+1} . Для этого некоторые части каждого звена ломаной L_n заменим трехзвенными ломаными — зигзагами угловые, коэффициенты звеньев которых равны $\pm k_{n+1}$ (рис. 2). В пределах одного звена L_n зигзаги будут одинаковыми, для разных звеньев L_n замена будет проводиться независимо от других звеньев, поэтому и число зигзагов и их размеры для каждого звена L_n будут, вообще говоря, разными.

Пусть S — произвольное звено ломаной L_n . Определим преобразование S при построении ломаной L_{n+1} . По построению у ломаной L_n нет горизонтальных звеньев, поэтому прямоугольник $R = R(S)$ с диагональю S не вырождается в отрезок. Высота прямоугольника R равна высоте h_S его

диагонали S . Разобьем отрезок S на $m := \left\lceil \frac{h_s}{h_{n+1}/6} \right\rceil + 1$ равных частей $S_i, i = 1, \dots, m$ (напомним, что h_{n+1} — высота звена Δ_{n+1} , на рис. 2 значение m равно 3), и построим прямоугольники $R_i = R(S_i)$. По определению числа m высота каждого прямоугольника R_i меньше $h_{n+1}/6$, причем какое бы звено S ломаной L_n ни рассматривалось.

Пусть R' — один из прямоугольников R_i с диагональю $S' = [A'; D']$. Определим как преобразуется при переходе к L_{n+1} отрезок S' — часть ломаной L_n лежащая в прямоугольнике R' . Через середину S' проведем отрезок $\ell^{(2)}$, соединяющий верхнее и нижнее основания прямоугольника R' , угловой коэффициент $k^{(2)}$ которого по модулю равен угловому коэффициенту k_{n+1} (k_{n+1} — угловой коэффициент звена Δ_{n+1} ломаной линии $\mathcal{L}$), а знак противоположен знаку углового коэффициента отрезка S' . Из точек B' и C' пересечения отрезка $\ell^{(2)}$ соответственно с нижним и верхним основаниями прямоугольника R' проведем отрезки $\ell^{(1)}$ и $\ell^{(3)}$ с угловыми коэффициентами равными $-k^{(2)}$ до пересечения с S' в точках A'' и D'' .

В качестве части ломаной L_{n+1} , лежащей в прямоугольнике R' возьмем ломаную $A' A'' B' C' D'' D'$ (рис. 3). Трехзвенную ломаную $A' B' C' D''$ будем называть зигзагом Z' , индексация зигзага соответствует индексации прямоугольника R' (или его диагонали S').

Аналогично определим части ломаной L_{n+1} , лежащие в остальных прямоугольниках $R_i, i = 1, \dots, m$ (рис. 2), и повторим это построение для всех звеньев ломаной L_n . Будем считать, что части звена $S \subset L_n$, входящие в ломаную L_{n+1} и лежащие в разных прямоугольниках R_i , являются разными звеньями ломаной L_{n+1} , даже если они образуют один отрезок. При этом условии все вершины любой ломаной L_n являются также вершинами ломаных L_m при каждом $m > n$ и высота как любого звена ломаной L_n , так и соответствующего прямоугольника меньше $h_n/6$.

Пусть $R_{n,j}$ — произвольным образом занумерованные прямоугольники со сторонами, параллельными осям координат, диагоналями которых являются звенья ломаной L_n . По построению при каждом номере $m \geq n$ выполнено включение $L_m \subset \bigcup_j R_{n,j}$. Поэтому, поскольку высота каждого

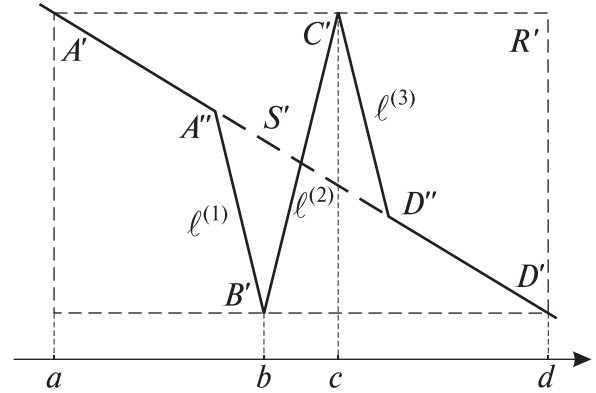


Рис. 3. Построение зигзага Z' в прямоугольнике R' . Модули угловых коэффициентов звеньев $\ell^{(1)}, \ell^{(2)}, \ell^{(3)}$ зигзага Z' по крайней в десять раз больше модуля углового коэффициента диагонали S' прямоугольника R' . Поэтому зигзаг Z' целиком лежит в R' .

прямоугольника $R_{n,j}$ меньше $h_n/6$, то при каждом номере $p, q \geq n$ выполнено неравенство

$$|\varphi_p(x) - \varphi_q(x)| \leq \frac{h_n}{6} \quad \text{при} \quad x \in [0; 1].$$

Так как $h_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то последовательность непрерывных функций $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно сходится к непрерывной функции, которую обозначим $\varphi_\omega(x)$.

При таком определении функции $\varphi_\omega(x)$ из того, что при всех номерах $m, n, m \geq n$, выполнено включение $L_m \subset \bigcup_j R_{n,j}$ следует, что при каждом n график функции $\varphi_\omega(x)$ лежит в объединении $\bigcup_j R_{n,j}$, а из того, что все вершины каждой ломаной L_n являются вершинами ломаных L_m с большими номерами, следует, что график функции $\varphi_\omega(x)$ проходит через все вершины каждой ломаной L_n .

2. Проверим теперь, что функция $\varphi_\omega(x)$ нигде не дифференцируема и в произвольной проколотой окрестности каждой точки $x \in [0; 1]$ найдется точка $x' \in [0; 1]$, в которой $\varphi_\omega(x') = \varphi_\omega(x)$.

Для этого достаточно показать, что для каждой точки $x \in [0; 1]$ при любом $\delta > 0$ на отрезке $[0; 1]$ найдутся точки x' и x'' , лежащие от x на расстоянии меньше δ , в которых

$$\varphi_\omega(x') = \varphi_\omega(x), \quad \left| \frac{\varphi_\omega(x'') - \varphi_\omega(x)}{x'' - x} \right| \geq k_1 > 0. \quad (1)$$

Из первого соотношения (1) следует, что в каждой точке отрезка $[0; 1]$ функция $\varphi_\omega(x)$ имеет нулевое производное число.

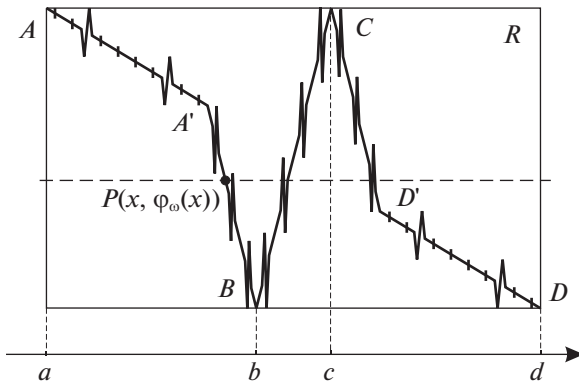


Рис. 4. Изображение лежащих в прямоугольнике R частей ломаных L_{n+1} , L_{n+2} , L_{n+3} (ломаная L_{n+3} изображена там, где она не сливается с L_{n+2}); частью ломаной L_n , лежащей в R , является отрезок $[A; D]$. Показано нахождение точки $x' \in [c; d]$ в которой $\varphi_\omega(x) = \varphi_\omega(x')$.

Напомним, что график функции $\varphi_\omega(x)$ при каждом номере n лежит в объединении прямоугольников $\bigcup_j R_{n,j}$ и проходит через все вершины ломаной L_n .

У каждого прямоугольника $R_{n,j}$ его высота меньше $h_n/6$, а угловой коэффициент его диагонали по модулю не меньше k_1 . Так как $h_n \rightarrow 0$, то максимальная ширина прямоугольников $R_{n,j}$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Пусть у ломаной L_n максимальная ширина прямоугольников $R_{n,j}$ меньше δ . Обозначим R прямоугольник из набора $\{R_{n,j}\}$, которому принадлежит точка $(x, \varphi_\omega(x))$, а $[a; d]$ — отрезок оси Ox , на который проектируется R . Покажем, что на отрезке $[a; d]$ найдутся точки x' и x'' , в которых выполнены соотношения (1) (рис. 4 и 5).

По построению ломаная L_{n+1} проходит через две диаметрально противоположные вершины прямоугольника R и содержит три куса $AA'B$, BC и $CD'D$, соединяющие верхние и нижние основания прямоугольника R (рис. 4). Значит, график непрерывной функции $\varphi_\omega(x)$ на каждом из отрезков $[a; b]$, $[b; c]$ и $[c; d]$ соединяет верхнее и нижнее основания прямоугольника R . Поэтому, если точка $(x, \varphi_\omega(x))$ лежит на верхнем или нижнем основании R , то функция φ_ω принимает значение $\varphi_\omega(x)$ не менее чем в двух точках отрезка $[a; d]$, а если точка $(x, \varphi_\omega(x))$ не лежит на верхнем или нижнем основании R , то функция φ_ω принимает значение $\varphi_\omega(x)$ не менее чем в трех точках $[a; d]$ (на самом деле таких точек больше). В любом случае,

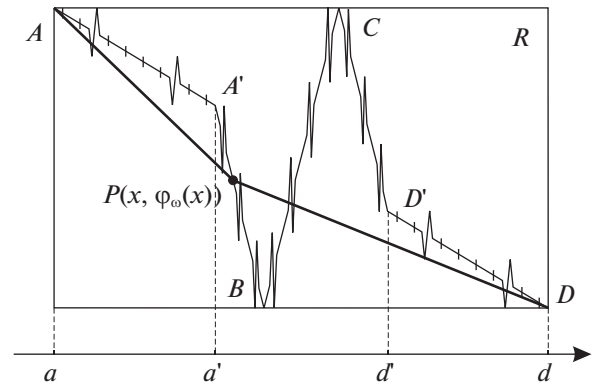


Рис. 5. Нахождение точки $x'' \in [c; d]$ в которой модуль разностного отношения большой.

где бы не находилась точка $x \in [a; d]$, функция φ_ω принимает значение $\varphi_\omega(x)$ по крайней мере в одной точке отрезка $[a; d]$, которая не совпадает с точкой x . Эту точку возьмем в качестве x' .

Если точка x является одним из концов отрезка $[a; d]$, то в качестве точки x'' возьмем другой конец этого отрезка. Тогда величина

$$\left| \frac{\varphi_\omega(x'') - \varphi_\omega(x)}{x'' - x} \right| = \left| \frac{\varphi_\omega(d) - \varphi_\omega(a)}{d - a} \right| = k_j \geq k_1.$$

Здесь j — номер шага при котором был добавлен зигзаг (уровня j), частью которого является отрезок S . Если точка x не является концом отрезка $[a; d]$, то в качестве x'' возьмем ту из точек a или d ,

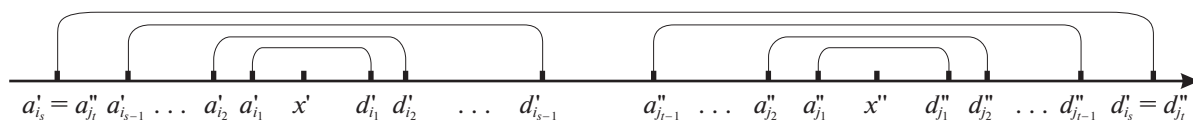
для которой величина $\left| \frac{\varphi_\omega(x'') - \varphi_\omega(x)}{x'' - x} \right|$ больше (рис. 5); если точка $(x, \varphi_\omega(x))$ лежит на диагонали $[A; D]$ прямоугольника R , то в качестве x'' можно взять любую из точек a или d .

При любом описанном выборе точки x' значение величины $\left| \frac{\varphi_\omega(x'') - \varphi_\omega(x)}{x'' - x} \right|$ не меньше модуля углового коэффициента диагонали S , равного $k_j \geq k_1$.

Если точка $P(x, \varphi_\omega(x))$ не лежит на диагонали $[A; D]$ прямоугольника R , то у одного из отрезков $[A; P]$ и $[P; D]$ модуль углового коэффициента больше модуля углового коэффициента отрезка $[A; D]$. В изображенном на рис. 5 случае в качестве x'' будет взята точка a .

3. Теперь покажем, что модуль непрерывности функции $\varphi_\omega(x)$ не превосходит $\omega(t)$.

Возьмем произвольные точки x' и x'' отрезка $[0; 1]$, для определенности пусть $x' < x''$. Чтобы

Рис. 6. Опорные отрезки зигзагов, содержащие точки x' и x'' .

оценить величину $|\varphi_\omega(x'') - \varphi_\omega(x')|$ оценим при произвольном n величину $|\varphi_n(x'') - \varphi_n(x')|$. Оценка приращения функции $\varphi_\omega(x)$ будет получена из оценки приращения $\varphi_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Введем некоторые дополнительные определения и обозначения. Зигзаг, который был построен на части звена ломаной L_{n-1} , $n \geq 2$, при построении ломаной L_n будем называть зигзагом уровня n . Для единообразия обозначений ломаную L_1 будем называть зигзагом уровня 1, хотя L_1 является отрезком, а не зигзагом. Зигзаги уровня n будем обозначать $Z_{n,j}$, порядок в котором они занумерованы (т.е. номера j) значения не имеет. Отрезок оси Ox , над которым расположен зигзаг $Z_{n,j}$ будем называть *опорным отрезком* зигзага $Z_{n,j}$ и обозначать $[a_{n,j}; d_{n,j}]$. На рис. 5 опорным отрезком зигзага $Z = A'BCD'$ является отрезок $[a'; d']$.

Средний отрезок каждого зигзага $Z_{n,j}$ длиннее каждого из остальных двух отрезков зигзага, его высота равна высоте прямоугольника $R_{n,j}$ и поэтому не превосходит $1/6$ высоты h_n соответствующего звена Δ_n ломаной линии $\mathcal{L}$. Поэтому, поскольку угловые коэффициенты отрезков, составляющих зигзаг $Z_{n,j}$, по модулю равны угловому коэффициенту отрезка Δ_n , то длина опорного отрезка зигзага $Z_{n,j}$ меньше половины ширины Δ_n .

По построению ломаных L_n опорные отрезки разных зигзагов одного уровня не пересекаются, а опорные отрезки зигзагов разных уровней либо не пересекаются, либо опорный отрезок зигзага с большим номером уровня целиком лежит внутри опорного отрезка зигзага с меньшим номером уровня. Каждая точка $x \in [0; 1]$ принадлежит некоторому набору опорных отрезков

$$x \in [a_{p_1, j_1}; d_{p_1, j_1}] \subset [a_{p_2, j_2}; d_{p_2, j_2}] \subset \dots \subset [a_1; d_1] = [0; 1], \quad n \geq p_1 > p_2 > \dots > 1.$$

В этом наборе не обязательно есть опорные отрезки каждого уровня от 1 до n , но обязательно есть опорный отрезок 1 уровня, это отрезок $[0; 1]$.

Для точек x' и x'' соответствующие опорные отрезки обозначим $[a'_i; d'_i]$ и $[a''_j; d''_j]$, здесь $i = 1, \dots, p$ и $j = 1, \dots, q$ – некоторые номера от 1 до n , номера уровней i и j могут не совпадать, количество отрезков в наборах $\{[a'_i; d'_i]\}$ и $\{[a''_j; d''_j]\}$ может быть разным. Имеем

$$x' \in [a'_1; d'_1] \subset [a'_2; d'_2] \dots \subset [a'_p; d'_p] = [0; 1],$$

$$x'' \in [a''_1; d''_1] \subset [a''_2; d''_2] \dots \subset [a''_q; d''_q] = [0; 1],$$

Начиная с некоторого номера, наборы $\{[a'_i; d'_i]\}$ и $\{[a''_j; d''_j]\}$ содержат одни и те же отрезки. Пусть $[a'_s; d'_s]$ и $[a''_t; d''_t]$ – первые совпадающие отрезки этих наборов, быть может, $[a'_s; d'_s] = [a''_t; d''_t] = [0; 1]$

$$[a'_1; d'_1] \subset \dots \subset [a'_s; d'_s] = [a''_t; d''_t] \supset \dots \supset [a''_1; d''_1]. \quad (2)$$

Для концов опорных отрезков $[a'_i; d'_i]$ и $[a''_j; d''_j]$ выполнены неравенства (рис. 6, масштаб на рисунке не соблюден)

$$x' \leq d'_{i_1} < d'_{i_2} < \dots < d'_{i_{s-1}} < a''_{j_{t-1}} < \dots < a''_{j_2} < a''_{j_1} \leq x''.$$

Теперь оценим приращение $|\varphi_n(x'') - \varphi_n(x')|$. Имеем

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x'') - \varphi_n(x')| &\leq |\varphi_n(x'') - \varphi_n(a''_{j_1})| + \\ &+ |\varphi_n(a''_{j_1}) - \varphi_n(a''_{j_2})| + \dots + |\varphi_n(a''_{j_{t-1}}) - \varphi_n(d'_{i_{s-1}})| + \\ &+ \dots + |\varphi_n(d'_{i_2}) - \varphi_n(d'_{i_1})| + |\varphi_n(d'_{i_1}) - \varphi_n(x')|. \end{aligned} \quad (3)$$

Промежуток $[a''_{j_1}; x'']$ лежит на опорном отрезке зигзага уровня j_1 . Над этим отрезком угловые коэффициенты звеньев ломаной L_n равны $\pm k_{j_1}$. Поэтому

$$|\varphi_n(x'') - \varphi_n(a''_{j_1})| \leq k_{j_1}(x'' - a''_{j_1}). \quad (4)$$

Аналогично, промежуток $[a''_{j_2}; a''_{j_1}]$ лежит на опорном отрезке зигзага уровня j_2 и поэтому

$$|\varphi_n(a''_{j_1}) - \varphi_n(a''_{j_2})| \leq k_{j_2}(a''_{j_1} - a''_{j_2}).$$

Рассуждая так дальше получаем неравенства

$$\begin{aligned} |\varphi_n(a''_{j_2}) - \varphi_n(a''_{j_3})| &\leq k_{j_3}(a''_{j_2} - a''_{j_3}), \\ &\dots\dots\dots \\ |\varphi_n(a''_{j_{t-2}}) - \varphi_n(a''_{j_{t-1}})| &\leq k_{j_{t-1}}(a''_{j_{t-2}} - a''_{j_{t-1}}), \\ |\varphi_n(a''_{j_{t-1}}) - \varphi_n(d'_{j_{s-1}})| &\leq k_{j_t}(a''_{j_{t-1}} - d'_{j_{s-1}}) = k_{j_s}(a''_{j_{t-1}} - d'_{j_{s-1}}), \\ |\varphi_n(d'_{j_{s-1}}) - \varphi_n(d'_{j_{s-2}})| &\leq k_{j_{s-1}}(d'_{j_{s-1}} - d'_{j_{s-2}}), \\ &\dots\dots\dots \\ |\varphi_n(d'_{j_2}) - \varphi_n(d'_{j_1})| &\leq k_{j_2}(d'_{j_2} - d'_{j_1}), \\ |\varphi_n(d'_{j_1}) - \varphi_n(x')| &\leq k_{j_1}(d'_{j_1} - x'). \end{aligned}$$

В наборе опорных отрезков, входящих во включения (2), опорный отрезок каждого уровня встречается не более двух раз, поэтому суммарная длина отрезков одного уровня из (2) не превосходит ширины соответствующего звена Δ_n ломаной линии $\mathcal{L}$.

Оценим слагаемые из суммы, стоящей в правой части (3), используя неравенство (4) и следующие за ним аналогичные неравенства. При этом упорядочим слагаемые в правой части (3) в порядке убывания номера зигзага и объединим слагаемые, относящиеся к зигзагам одного уровня. Пусть $m_1 < \dots < m_l$ номера уровней зигзагов для которых в сумме (3) есть соответствующие слагаемые, а $\delta_{m_1}, \dots, \delta_{m_l}$ — суммарная длина опорных отрезков зигзагов уровней $m_1, \dots, m_l$. Тогда из соотношений (3), (4) и неравенств, следующих за (4), вытекает, что

$$|\varphi_n(x'') - \varphi_n(x')| \leq k_{m_1}\delta_{m_1} + \dots + k_{m_l}\delta_{m_l}, \quad (5)$$

причем $x'' - x' = \delta_{m_1} + \dots + \delta_{m_l}$ и каждое δ_{m_j} не превосходит ширины звена Δ_{m_j} ломаной линии $\mathcal{L}$, вписанной в график функции $\omega(t)$.

Пусть звено Δ_{m_j} ломаной линии $\mathcal{L}$ лежит над отрезком $[t'_{m_j}, t''_{m_j}]$ оси Ox . По определению угловых коэффициентов k_n и так как δ_{m_j} не превосходит ширины звена Δ_{m_j} , равной $t''_{m_j} - t'_{m_j}$, то, учитывая выпуклость функции $\omega(t)$ вверх, получаем, что при каждом $j = 1, \dots, l$

$$\begin{aligned} k_{m_j}\delta_j &= \frac{\omega(t''_{m_j}) - \omega(t'_{m_j})}{t''_{m_j} - t'_{m_j}}\delta_j \leq \\ &\leq \frac{\omega(t'_{m_j} + \delta_j) - \omega(t'_{m_j})}{\delta_j}\delta_j = \omega(t'_{m_j} + \delta_j) - \omega(t'_{m_j}). \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя соотношения (6) в (5) получаем, что

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x'') - \varphi_n(x')| &\leq (\omega(t'_{m_1} + \delta_1) - \omega(t'_{m_1})) + \\ &+ (\omega(t'_{m_2} + \delta_2) - \omega(t'_{m_2})) + \dots + (\omega(t'_{m_l} + \delta_l) - \omega(t'_{m_l})). \end{aligned} \quad (7)$$

В силу выпуклости функции $\omega(t)$ вверх и ее монотонного возрастания выполнено неравенство

$$\omega(t'_{m_1} + \delta_1) - \omega(t'_{m_1}) \leq \omega(\delta_1).$$

Так как $t'_{m_2} \geq t''_{m_1} \geq t'_{m_1} + \delta_1 > \delta_1$, то, аналогично,

$$\omega(t'_{m_2} + \delta_2) - \omega(t'_{m_2}) \leq \omega(\delta_1 + \delta_2) - h(\delta_1)$$

Рассуждая так дальше получаем, что при каждом $j = 1, \dots, l$ выполнено неравенство $t'_{m_j} > \delta_1 + \dots + \delta_{j-1}$ и поэтому

$$\begin{aligned} \omega(t'_{m_j} + \delta_j) - \omega(t'_{m_j}) &\leq \omega(\delta_1 + \dots + \delta_{j-1} + \delta_j) - \\ &- \omega(\delta_1 + \dots + \delta_{j-1}). \end{aligned}$$

Подставляя эти неравенства в правую часть (7), получаем оценку приращения функции $\varphi_n(x)$

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x'') - \varphi_n(x')| &\leq \omega(\delta_1) + (\omega(\delta_1 + \delta_2) - \omega(\delta_1)) + \dots + \\ &+ (\omega(\delta_1 + \dots + \delta_{l-1} + \delta_l) - \omega(\delta_1 + \dots + \delta_{l-1})) = \\ &= \omega(\delta_1 + \dots + \delta_l) = \omega(x'' - x'). \end{aligned}$$

Соответствующая оценка приращения функции $\varphi_\omega(x)$ следует отсюда при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, функция $\varphi_\omega(x)$ дает пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции, модуль непрерывности которой не превосходит произвольного нелипшицевого модуля непрерывности $\omega(t)$, причем в любой проколотой окрестности каждой точки $x \in [0; 1]$ найдется точка, $x' \in [0; 1]$, в которой $\varphi_\omega(x') = \varphi_\omega(x)$.

Теорема доказана.

ВЫВОДЫ

Положим $f_\omega(z) = f_\omega(x + iy) := \varphi_\omega(x)$. Функция $f_\omega(z)$ нигде не дифференцируема, даже как функция двух действительных переменных, и ее модуль непрерывности не превосходит $\omega(t)$, при этом функция $f_\omega(z)$ в каждой точке z имеет нулевое производное число вдоль двух взаимно перпендикулярных направлений. Пример $f_\omega(z)$ показывает, что в достаточных условиях голоморфности из работы автора [5] (2022) предположение о выполнении в точках ζ области условия Липшица относительно множеств E_ζ той или иной структуры, ослабить нельзя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ефимов А.В. Линейные методы приближения непрерывных периодических функций // Матем. сб. 1961. Т. 54. Вып. 1. С. 51–90.
2. Loud W.S. Functions with prescribed Lipschitz condition // Proc. Amer. Math. Soc. 1951. V. 2. № 3. P. 358–360.
3. Marx I., Piranian G. Lipschitz functions of continuous functions // Pacific Jour. of Math. 1953. V. 3. № 2. P. 447–459.
4. Рубинштейн А.И. Об ω -лакунарных рядах и о функциях классов H^ω // Матем. сб. 1964. Т. 65. Вып. 2. С. 239–271.
5. Теляковский Д.С. Об условиях монотонности. Современные проблемы теории функций и их приложения // Материалы 21-й международной Саратовской зимней школы. Саратов, 2022. С. 289–293.
6. Бржечка В.Ф. О функции Больцано (к столетию со дня смерти чешского математика Бернарда Больцано) // УМН. 1949. Т. 4. Вып. 2(30). С. 15–21.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2022, vol. 11, no. 3, pp. 228–234

Example of a Continuous Nowhere-Differentiable Function with the Modulus of Continuity not Exceeding a Given Value

D. S. Telyakovskii^{a, #}

^aNational Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: dtelyakov@mail.ru

Received July 31, 2022; revised September 18, 2022; accepted September 27, 2022

Abstract—For an arbitrary convex non-Lipchitz modulus of continuity $\omega(t)$, we construct a continuous nowhere-differentiable function $\varphi_\omega(x)$, whose modulus of continuity does not exceed $\omega(t)$ and that has zero derivative number at every point, is constructed. This construction follows the work of B. Bolzano for the continuous nowhere-differentiable function. The function $f_\omega(z) = f_\omega(x + iy) := \varphi_\omega(x)$ is a continuous nowhere-differentiable function, even if it is considered as a function of two real variables, whose modulus of continuity does not exceed $\omega(t)$ and that has zero derivative number at every point along two noncollinear directions. A sufficient condition of analyticity is obtained in this work under the assumption that the function satisfies of the Lipschitz condition at every point ζ along some set E_ζ rather than the conventional assumption that the function has a derivative with respect to z at every point ζ along some set E_ζ . Such a function $f_\omega(z)$ shows that the former assumption cannot be weakened in this theorem.

Keywords: modulus of continuity, nowhere-differentiable function, derivative number

DOI: 10.56304/S2304487X22030117

REFERENCES

1. Efimov A.V. Linejnye metody priblizheniya teorii funkcij i ih prilozheniya. [Linear methods of approximating continuous periodic functions]. *Matematicheskij sbornik*, 1961, vol. 54, iss.1, pp. 51–90. (Russian)
2. Loud W.S. Functions with prescribed Lipschitz condition. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1951, vol. 2, no. 3, pp. 358–360.
3. Marx I., Piranian G. Lipschitz functions of continuous functions. *Pacific Jour. Of Math.*, 1953, vol. 3, no. 2, pp. 447–459.
4. Rubinshtein A.I. Ob ω -lakunarnyh ryadah i o funkciyah klassov H^ω . [On ω -lacunary series and functions of the classes H^ω]. *Matematicheskij sbornik*, 1964, vol. 2, pp. 239–271. (Russian)
5. Telyakovskij D.S. Ob usloviyah monogennosti. Sovremennye problemy teorii funkcij i ih rilozheniya. [On monogeneity conditions. Modern problems of theory of functions and their applications]. *Materialy 21-j mezhdunarodnoj Saratovskoj zimnej shkoly*. [Proceedings of 21 international Saratov winter workshop]. Saratov, 2022, pp. 289–293. (Russian)
6. Brzhechka V.F. O funkcii Bol'cano (k stoletiyu so dnya smerti cheshskogo matematika Bernarda Bol'cano). [On the Bolzano function. (On the 100th anniversary of the death of the Czech mathematician Bernhard Bolzano)]. *UMN*, 1949, vol. 4, no. 2(30), pp. 15–21. (Russian)