

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 537.8

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

© 2022 С.П. Баутин^{1*}, В.Е. Замыслов^{2**}

¹Снежинский физико-технический институт НИЯУ МИФИ,
Снежинск, Челябинская область, 456776, Россия

²Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, 620034, Россия

*e-mail: spbautin@mail.ru

**e-mail: zamislov2017@yandex.ru

Поступила в редакцию: 12.11.2022

После доработки: 16.11.2022

Принята к публикации: 22.11.2022

В работе описана методика представлений решений нелинейного уравнения с частными производными – уравнения Бюргерса – в виде бесконечного тригонометрического ряда от пространственной переменной. Коэффициенты ряда являются искомыми функциями от времени. Описана процедура получения бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которой задают искомые коэффициенты ряда. Благодаря конкретным свойствам решений рассмотренных бесконечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений доказаны теоремы о кратных частотах и сходимости бесконечного тригонометрического ряда в некоторой окрестности точки $t = 0$ и при всех значениях независимой переменной x . С помощью конечных сумм построены конкретные приближенные решения уравнения Бюргерса. В том числе установлен факт возникновения у решения в конечный момент времени при заданных гладких начальных условиях больших значений производных по пространственной переменной. Что тем не менее не приводит к возникновению необоснованных осцилляций или к разрушению решения.

Ключевые слова: нелинейные уравнения с частными производными, тригонометрические ряды, уравнение Бюргерса, приближенные решения.

DOI: 10.26583/vestnik.2022.238

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время для решения очень многих важных для практики задач возникает необходимость исследования различных начально-краевых задач для нелинейных уравнений с частными производными.

На сегодняшний день основным способом построения решений подобных задач являются разностные методы, при которых численно определяется конечное число значений искоемых функций в отдельных изолированных точках.

Но, несмотря на прогресс в разработке этих численных методов и на все увеличивающуюся производительность вычислительной техники, очень часто под вопросом остаются надежность и адекватность получаемых разностными методами численных результатов.

Среди аналитических методов получения решений нелинейных уравнений с частными производными одним из основных методов является использование конечных или бесконечных представлений с применением различных систем базисных функций в случаях разных функциональных пространств.

На протяжении более чем двухсотлетней истории исследований уравнений с частными производными один из востребованных функциональных базисов – предложенный Ж.Б.Ж. Фурье базис из тригонометрических функций.

Но, к сожалению, применение как тригонометрических рядов Фурье, так и более поздних обобщений этого подхода, имеют место только при решении линейных задач. В этом случае бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений для искоемых коэффициентов перед гармониками расщепляется и для каждого коэффициента получается одно свое уравнение. Оно обычно решается в явном виде, что позволяет построить все бесконечное разложение и доказать его сходимость.

Чуть более десяти лет назад методика применения бесконечных тригонометрических рядов была эффективно применена для математического моделирования течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа при построении решений нелинейной системы уравнений с частными производными смешанного типа [1].

И сразу выяснились как основные трудные моменты, так и основные положительные моменты при представлении решений нелинейных уравнений с частными производными с помощью бесконечных тригонометрических рядов.

Во-первых, требуются достаточно громоздкие аналитические преобразования для получения бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой задают коэффициенты тригонометрических рядов. Но, тем не менее, оказалось, что проведение этих аналитических преобразований хорошо алгоритмизировано и возможна автоматизация математических выкладок с помощью современных компьютеров.

Во-вторых, доказать сходимость данных тригонометрических рядов тогда не удалось.

Одним из главных положительных моментов предложенной методики построения решения в виде тригонометрического ряда стало отсутствие необходимости последовательного нахождения коэффициентов рядов с помощью рекуррентных соотношений. К тому же при рекуррентном подходе к построению коэффициентов рядов практически не возможно догадаться о наличии свойств кратных частот, если заранее не знать об их существовании. При использовании методики, описанной в [1] и используемой в данной работе, С.П. Баутиным предложены постановка задачи и доказательство сходимости тригонометрических рядов, а В.Е. Замысловым численно построены коэффициенты конечных отрезков тригонометрических рядов при решении конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений для приближенного описания решений уравнения Бюргера.

УРАВНЕНИЕ БЮРГЕРСА И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЕГО РЕШЕНИЙ

Рассматривается уравнение Бюргера

$$u_t + uu_x = \mu_0 u_{xx}, \quad (1)$$

где искомая функция u зависит от двух независимых переменных t, x , а $\mu_0 > 0$ – заданная положительная константа.

Многими учеными полагается, что с точки зрения механики и физики решения уравнения (1) в определенном смысле (как некие приближения) моделируют распространение одномерных акустических волн конечной амплитуды в условиях проявления диссипации. При этом

считается, что $u(t, x)$ задает колебательную скорость гидродинамических частиц, μ_0 характеризует вязкость и теплопроводность среды [2, 3]. Но фактически, уравнение (1) есть следствие закона сохранения импульса, записанного в дифференциальном виде для движений сжимаемой вязкой сплошной среды [4]:

$$\mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\mu_0}{\rho} \left[\frac{1}{4} \nabla(\operatorname{div} \mathbf{V}) + \frac{3}{4} \Delta \mathbf{V} \right].$$

Если в это уравнение положить: нулевое значение градиента давления $\nabla p = 0$, постоянную плотность $\rho = 1$ и рассмотреть частный случай

$$v = \omega = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial z} = 0,$$

то для u – третьей компоненты скорости – получится уравнение (1).

С точки зрения теории нелинейных уравнений с частными производными уравнение Бюргера является достаточно простым и содержательным примером. Смысл этого в том, что решения уравнения (1) моделируют нелинейный перенос возмущений (сравни с нелинейным уравнением переноса $u_t + uu_x = 0$) в среде с диссипативными свойствами – вязкость и теплопроводность. Таким образом, решения этого уравнения передают свойства одновременно решений как гиперболических уравнений: бегущие вправо и влево волны в случае линеаризованного уравнения Бюргера и возникновение бесконечных градиентов (градиентная катастрофа). Но также решения уравнения (1) передают свойства решений и параболических уравнений: экспоненциальное по времени затухание начальных возмущений у приближенных решений уравнения Бюргера (сравни с линейным уравнением теплопроводности $u_t = \mu_0 u_{xx}$).

Двумя простыми эквивалентными заменами:

$$u = \mu_0 \tilde{u}, \quad t' = \mu_0 t,$$

уравнение (1) после деления на μ_0^2 приводится к виду

$$\tilde{u}_{t'} + \tilde{u} \tilde{u}_x = \tilde{u}_{xx}.$$

Если решение построено в новых переменных t', \tilde{u} , то при малых значениях константы μ_0 время процесса при старом времени t увеличится в $1/\mu_0$ раз. А значение старой искомой функции будет в μ_0 больше значения новой искомой функции \tilde{u} .

Далее для простоты написания штрих у буквы t и знак тильды над u опускаются

$$u_t + uu_x = u_{xx},$$

и уравнение в новых переменных переписывается в нормальной форме:

$$u_t = -uu_x + u_{xx}. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) представляется в виде бесконечного тригонометрического ряда [1]:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin(kx), \quad (3)$$

где $u_k(t)$ – неизвестные пока коэффициенты, $k = 1, 2, \dots$

В качестве решения уравнения Бюргера можно брать и конечную сумму гармоник от пространственной переменной с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени [1]:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^K u_k(t) \sin(kx), \quad (4)$$

где $u_k(t)$ – неизвестные пока коэффициенты, $k = 1, 2, \dots, K$, и для простоты разложения полагается, что $K \geq 2$.

Подстановка ряда (3) в уравнение (2) приводит к следующему равенству

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(t) \sin(kx) = & - \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin(kx) \right] \times \\ & \times \left[\sum_{m=1}^{\infty} mu_m(t) \cos(mx) \right] - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 u_k(t) \sin(kx), \end{aligned}$$

которое переписывается с использованием двойной суммы

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(t) \sin(kx) = \\ = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} mu_k(t) u_m(t) \sin(kx) \cos(mx) - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 u_k(t) \sin(kx). \end{aligned}$$

Далее полученное уравнение проецируется на систему базисных гармоник $\sin(lx)$, $l = 1, 2, \dots$. Для этого данное уравнение умножается каждый раз на свою функцию $\sin(lx)$ и полученные при $l = 1, 2, 3, \dots$ равенства интегрируются по x на отрезке $0 \leq x \leq \pi$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(t) \left[\int_0^{\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx \right] =$$

$$\begin{aligned} = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} mu_k(t) u_m(t) \left[\int_0^{\pi} \sin(kx) \cos(mx) \sin(lx) dx \right] - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 u_k(t) \left[\int_0^{\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx \right], \quad l = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Для подробной записи полученных при $l = 1, 2, 3, \dots$ уравнений используются значения некоторых конкретных определённых интегралов [1]:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos(lx) dx = 0; \quad \int_0^{\pi} \sin^2(lx) dx = \\ = \int_0^{\pi} \cos^2(lx) dx = \frac{\pi}{2}, \quad l = 1, 2, 3, \dots; \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx = \int_0^{\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx = 0,$$

если $l \neq k$; $k, l = 1, 2, 3, \dots$;

$$\int_0^{\pi} \sin(kx) \sin(lx) \cos(mx) dx = \frac{\pi}{4} b_{klm};$$

$$b_{klm} = \begin{cases} -1, & \text{если } l = m - k; \\ 1, & \text{если } l = k - m; \\ 1, & \text{если } l = m + k; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

С учетом выписанных значений определенных интегралов и после умножения каждого из полученных уравнений на $2/\pi$ получается следующая бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений для бесконечного числа искомых функций $u_l(t)$:

$$u'_l(t) = - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{klm} mu_k(t) u_m(t) - l^2 u_l(t); \quad (5)$$

$$l = 1, 2, 3, \dots$$

В случае построения решения в виде конечной суммы (4) для конечного числа искомых коэффициентов $u_l(t)$ по описанной выше процедуре получается своя, уже конечная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Если в системе (5) положить нулями все слагаемые с номерами, большими K , то остаются только первые K уравнений:

$$u'_l(t) = - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K mu_k(t) u_m(t) b_{klm} - l^2 u_l(t); \quad (6)$$

$$l = 1, 2, 3, \dots, K.$$

ТЕОРЕМЫ О КРАТНЫХ ЧАСТОТАХ

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5), (6) справедливы приведенные далее теоремы 1 и 2, являющиеся теоремами о кратных частотах [1, 5].

Теорема 1. Пусть задано целое положительное число l_0 . Если для бесконечной системы (5) или конечной системы (6) при $t = 0$ заданы нулевые начальные условия для коэффициентов $u_l(t)$ при $l \neq l_0$. Тогда для индексов l , не кратных l_0 , функции $u_l(t) \equiv 0$ являются решениями бесконечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (5) или конечной системы (6).

Теорема 1 – первая теорема о кратных частотах – говорит о том, что если для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (5) или (6) начальные данные соответствуют присутствию в начальном условии для уравнения (2) гармоники только с одной частотой l_0 , то в решении этих систем могут присутствовать коэффициенты, стоящие в (3) перед гармониками только с частотами, кратными l_0 .

Теорема 2. Пусть задан набор целых положительных чисел

$$L = \{l, l_1, \dots, l_n\}$$

и число $d = \text{НОД}(l_0, l_1, \dots, l_n)$ – наибольший общий делитель чисел l_0, l_1, \dots, l_n . Пусть для бесконечной системы (5) или конечной системы (6) при $t = 0$ заданы нулевые начальные условия для коэффициентов $u_l(t)$:

$$u_l(0) = u_l^0 \neq 0, \text{ если } l \in L;$$

$$u_l(0) = 0, \text{ если } l \notin L.$$

Тогда среди решений систем (5) и (6) могут быть отличны от тождественного нуля только те $u_l(t)$, у которых индекс l кратен заданному числу d .

Теорема 2 – вторая теорема о кратных частотах – говорит о том, что если для систем (5) или (6) ненулевые начальные данные только у коэффициентов, стоящих в (3) перед гармониками с частотами l_0, l_1, \dots, l_n , то в решении этих систем могут быть коэффициенты, стоящие в (3) перед гармониками только с частотами, кратными

$$d = \text{НОД}(l_0, l_1, \dots, l_n).$$

Заметим, что теорема 1 есть частный случай теоремы 2.

Для краткости изложения приводится доказательство только теоремы 2.

Рассмотрим множество $L_d = \{d, 2d, 3d, \dots\}$. Из начальных условий, оговоренных в теореме, следует, что если $u_l^0 = 0$, когда $l \notin L_d$ ($L \in L_d$). Далее установим, что если $l \notin L_d$, то все решения систем (5), (6) тождественно равны нулю: $u_l(t) \equiv 0$.

Для доказательства предполагаем, что $l \notin L_d$ и для функции $u_l(t)$, $l = 1, 2, \dots$ строим ломаные Эйлера по формуле:

$$u_l(t_{i+1}) = u_l(t_i) + h \cdot f(t_i, u_l(t_i)),$$

где точки t_i лежат на отрезке интегрирования с постоянным шагом $h = t_{i+1} - t_i$, $t_0 = 0$. Из формул (5), (6) следует равенство:

$$u_l(t_1) = u_l(t_0) + h \times$$

$$\times \left[-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M m u_k(t_0) u_m(t_0) b_{klm} - l^2 u_l(t_0) \right],$$

где верхний индекс суммирования M в случае системы (5) равен бесконечности, в случае системы (6) равен K . При подстановке в полученное равенство начальных значений получаем такое равенство:

$$u_l(t_1) = 0 + h \times$$

$$\times \left[-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M m u_k(0) u_m(0) b_{klm} - l^2 \cdot 0 \right].$$

В двойной сумме ненулевыми остаются только слагаемые с произведениями $u_k(0) \cdot u_m(0)$, где $k, m \in L_d$, так как в противном случае эти произведения равны нулю в силу начальных условий. У коэффициента b_{klm} индекс $l \in L_d$, так как k, m кратны d и, следовательно l делится на d . Поэтому $b_{klm} = 0$ и тогда $u_l(t_1) = 0$.

По индукции предполагаем, что если $l \notin L_d$, то

$$u_l(t_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

При подстановке в формулу Эйлера уже найденных значений на предыдущих шагах получаем равенство:

$$u_l(t_{n+1}) = u_l(t_n) + h \times$$

$$\times \left[-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M m u_k(t_n) u_m(t_n) b_{klm} - l^2 u_l(t_n) \right].$$

При повторе предыдущих рассуждений получаем, что $u_l(t_{n+1}) = 0$. Следовательно, при $l \notin L_d$ ломаные Эйлера тождественно равны нулю. При стремлении h к нулю ломаные сходятся к точному решению и тогда $u_l(t) \equiv 0$ при $l \notin L_d$. Значит, отличными от нуля решениями систем (5), (6) могут быть только те $u_l(t)$, у которых $l \in L_d$. Теорема доказана.

Впервые теоремы о кратных частотах были доказаны В.Е. Замысловым [5]. Им были рассмотрены представления одномерных решений полной системы уравнений Навье–Стокса в виде бесконечных тригонометрических рядов. Подробно эти теоремы представлены в монографии [1]. В работе [6] в случае других представлений одномерных решений полной системы уравнений Навье–Стокса доказаны теоремы о кратных частотах, что ранее были доказаны в работах [1, 5], с одним обобщением [6]: во второй теореме d определено для счетного набора частот

$$\{l_0, l_1, \dots, l_n, \dots\}.$$

Из доказанных теорем о кратных частотах следует, что в исследуемых решениях будут присутствовать гармоники только с частотами $d, 2d, 3d, 4d, 5d, \dots$. Поэтому исследуемые в работе решения не обладают свойством «удвоения частот», которое иногда без основания предполагают в течениях вязкой сплошной среды [7].

Как природное явление давно известен факт, что при возбуждении гармоник с одними частотами с течением времени фиксируются и новые гармоники, значения частот которых полностью согласуются с теоремами о кратных частотах. В музыке этим природным явлением пользуются давно [8]. Например, в произведении Р. Шумана «Карнавал», а также в произведениях М. Равеля, К. Дебюсси и других композиторов есть так называемые «немые аккорды», когда заранее освобождённые и покоящиеся струны начинают звучать после того, как зазвучали другие струны, естественно, с другой частотой собственных колебаний. Поэтому объяснить это явление резонансом нельзя. Благодаря доказанным теоремам о кратных частотах [1, 5, 6] установлено, что это природное явление есть следствие общих законов движения воздуха как сплошной среды – законов сохранения массы, импульса и энергии, проявляющихся как соответствующие свойства решений нелинейных уравнений с частными производными.

Если продифференцировать квадратичное выражение от гармоник с конкретными частотами и воспользоваться формулами тригонометрии, то в полученном выражении появятся гармоники с новыми частотами, которые будут иметь значения в полном соответствии с теоремами о кратных частотах. Многими исследователями это соображение полагается доказательством свойств кратных частот. Но данное рассуждение проведено при установлении свойств дифференциальных операторов, а не при уста-

новлении свойств решений нелинейных уравнений с частными производными. Авторам данной работы неизвестны работы (за исключением работ [1, 5, 6]), в которых хотя бы для формальных решений конкретных нелинейных уравнений с частными производными был бы доказан факт, соответствующий приведенным в работе теоремам о кратных частотах. Заметим, что при доказательстве теорем о кратных частотах [1, 5] принципиально использовались следующие факты: нормальная форма уравнений с частными производными относительно производных по времени; присутствие в уравнениях только квадратичных нелинейностей. И эти теоремы о кратных частотах доказаны благодаря соответствующим свойствам конкретных определённых интегралов от произведения трех гармоник, а не в результате дифференцирования квадратичных полиномов от гармоник.

СХОДИМОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА

Для уравнения (2) ставится следующее начальное условие

$$u(t, x)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0 \sin(kx), \quad (7)$$

где числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^0 \quad (8)$$

сходится абсолютно, и тогда данное начальное условие является аналитической функцией при всех значениях x .

Решение поставленной задачи (2), (7) представляется в виде ряда (3). Для доказательства сходимости этого ряда в системе (5) делается переход от двойных сумм к одинарным.

Тогда с учетом ненулевых значений коэффициентов b_{klm} бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений (5) переходит в следующую бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с одинарными суммами в правых частях:

$$\begin{cases} u_1'(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t) u_{j+1}(t) - u_1(t); \\ u_l'(t) = \frac{1}{2} l \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t) u_{j+l}(t) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l-1} i u_{l-i}(t) u_i(t) - l^2 u_l(t); \quad l = 2, 3, 4, \dots \end{cases} \quad (9)$$

С учетом вида начальных условий (7) задаем начальные условия для системы (9):

$$u_l(0) = u_l^0, \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

При использовании стандартной методики метода мажорант [4] для доказательства сходимости бесконечных рядов, решающих уравнения с частными производными, «камнем преткновения» являются слагаемые из системы (9), содержащие в качестве множителя квадрат индекса l перед коэффициентом с номером l :

$$u_l'(t) = \dots - l^2 u_l(t), \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

Фактически наличие именно такого слагаемого позволило С.В. Ковалевской [9] построить свой знаменитый контрпример для задачи Коши в случае линейного уравнения теплопроводности: конкретные начальные данные при $t = 0$ являются аналитической функцией, но формальный ряд по степеням t , единственным образом определяющий решение, расходится при любом t , отличном от нуля. Аналогичный контрпример построен для задачи Коши для нелинейного уравнения теплопроводности [10] благодаря возникновению соответствующего слагаемого при построении мажорантной задачи.

Далее с учетом вида задачи (2), (7) рассматривается другая задача Коши:

$$\begin{cases} v_t = -v v_x - v; \\ v|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0 \sin kx. \end{cases} \quad (11)$$

Задача (11) отличается от задачи (2), (7) в двух моментах: обозначением искомой функции и тем, что вместо слагаемого $\ll u_{xx} \gg$ в дифференциальном уравнении из задачи (2), (7) в уравнении из задачи (11) стоит слагаемое $\ll -v \gg$, а не $\ll v_{xx} \gg$.

Поскольку уравнение в задаче (11) является уравнением типа Ковалевской [4], то по теореме Ковалевской [4, 9] задача (11) имеет в некоторой окрестности точки $(t = 0, x = 0)$ единственное аналитическое решение, которое можно представить в виде

$$v(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (12)$$

и ряд (12) абсолютно сходится в некоторой окрестности точки $(t = 0, x = 0)$.

Если решение задачи (11) строить в виде ряда (12), где

$$v_n(x) = \left. \frac{\partial^n v(t, x)}{\partial t^n} \right|_{t=0},$$

то для коэффициентов этого ряда получается следующая цепочка рекуррентных соотношений:

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^0 \sin kx,$$

$$v_1(x) = -v_0(x)v_0'(x) - v_0(x),$$

$$v_{n+1}(x) = -\sum_{m=0}^n C_n^m v_m(x)v_{n-m}'(x) - v_n(x), \quad n \geq 1.$$

Эти уравнения получаются после дифференцирования уравнения из задачи (11) соответствующее число раз по t и положению $t = 0$ после каждого дифференцирования.

С учетом вида функции $v_0(x)$, тригонометрической формулы

$$\sin(kx)\cos(mx) = \frac{1}{2} \{ \sin[(k+m)x] + \sin[(k-m)x] \}$$

и нечетности синуса (позволяющей сделать положительным коэффициент, стоящий перед x под синусом) получается, что все коэффициенты ряда (12) представимы в виде

$$v_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{1k} \sin kx,$$

$$v_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{n+1,k} \sin kx, \quad n \geq 1$$

и являются абсолютно сходящимися рядами при любых значениях x .

Поскольку в абсолютно сходящихся рядах можно переставлять и группировать слагаемые и суммы рядов от этого не меняются, то единственное решение задачи (11) представимо в виде другого ряда:

$$v(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \sin kx, \quad (13)$$

$$\text{где } v_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{n,k} \frac{t^n}{n!}.$$

И сам ряд (13), и его коэффициенты являются абсолютно сходящимися рядами в некоторой окрестности точки $t = 0$, т.е. при $|t| \leq t_1$, $t_1 > 0$ и при всех значениях x . Эта окрестность $|t| \leq t_1$ определяет некоторую область Ω в пространстве R^∞ , в которой изменяются значения v_k , $k \geq 1$ при $|t| \leq t_1$ и при которых ряд (13) сходится.

Ряд (13) подставляем в уравнение из задачи (11) и полученное соотношение также проецируем на функциональный базис

$$\{ \sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots \}.$$

В результате получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} v_1'(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} v_j(t) v_{j+1}(t) - v_1(t); \\ v_l''(t) = \frac{1}{2} l \sum_{j=1}^{\infty} v_j(t) v_{j+l}(t) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l-1} i v_{l-i}(t) v_i(t) - v_l(t); \quad l = 2, 3, 4, \dots, \end{cases} \quad (14)$$

которая отличается от системы (9) также в двух моментах. Обозначением искомым функций: вместо буквы « u » взята буква « v », а также вместо сомножителей $1, \dots, l^2, \dots$ перед последними слагаемыми в системе (9) в системе (14) все такие сомножители равны единице.

Для системы (14) ставим соответствующие начальные условия:

$$v_k(t)|_{t=0} = u_k^0; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

Поскольку ряд (13) удовлетворяет уравнению из задачи (11), то он и его коэффициенты удовлетворяют любым следствиям уравнения из задачи (11). Таким образом, коэффициенты $v_k(t)$ удовлетворяют уравнениям системы (14) и при этом все ряды в системе (14), сходятся. Значения v_k принадлежат описанной выше области Ω .

Поскольку система (14) отличается от системы (9) только линейно входящими последними слагаемыми в соответствующих уравнениях, то ряды, стоящие в правых частях системы (9), тоже сходятся, когда значения u_k принадлежат области Ω . В том числе и потому, что $u_k(0) = v_k(0) = u_k^0$

Лемма. Поскольку справедливо неравенство

$$|u_k^0| = |u_k(0)| \leq |v_k(0)| = |u_k^0|; \quad k = 2, 3, \dots, \quad (16)$$

то при $|t| \leq t_l$ для решений задачи Коши (9), (10) и (14) выполняются неравенства

$$|u_k(t)| \leq |v_k(t)|, \quad k \geq 2. \quad (17)$$

Для доказательства леммы рассмотрим по одному соответствующему уравнению из систем (9) и (14), начальные условия для них, и для краткости записи введем упрощенные обозначения:

$$\begin{cases} u_l'(t) = f_l(t, \vec{u}) - l^2 u_l(t), \\ v_l'(t) = f_l(t, \vec{v}) - v_l(t), \\ u_l(0) = v_l(0) = u_l^0; \quad l \geq 2. \end{cases} \quad (18)$$

По теореме Коши у задач (18) в некоторой окрестности точки $(t = 0, u_l = v_l = u_l^0)$ существуют единственные аналитические решения и поэтому искомые функции из задачи (18) можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_l(t) &= u_l^0 + [f(0, \vec{u}^0) - l^2 u_l^0] t + t^2 f_1(t), \\ v_l(t) &= u_l^0 + [f(0, \vec{u}^0) - u_l^0] t + t^2 f_2(t), \end{aligned}$$

где $f_1(t), f_2(t)$ – аналитические в окрестности точки $t = 0$ функции. Поэтому

$$v_l(t) - u_l(t) = (l^2 - 1) u_l^0 t + t^2 [f_2(t) - f_1(t)] \quad (19)$$

При дальнейшем использовании равенства (19) принципиально то, что пока $l \geq 2$.

Пусть $u_l^0 > 0$, тогда в некоторой окрестности точки $t = 0$ функции $v_l(t)$ и $u_l(t)$ сохраняют положительные знаки, и поэтому из равенства (19) следует, что в некоторой окрестности точки $t = 0$ при $t \geq 0$ имеет место следующее неравенство

$$v_l(t) \geq u_l(t),$$

и поэтому нужно соотношение

$$|u_l(t)| \leq |v_l(t)|$$

установлено.

Пусть $u_l^0 < 0$, тогда в некоторой окрестности точки $t = 0$ функции $v_l(t)$ и $u_l(t)$ будут отрицательными и при $t \geq 0$ из равенства (19) следует, что

$$v_l(t) \leq u_l(t) \leq 0,$$

и нужно неравенство

$$|u_l(t)| \leq |v_l(t)|$$

также установлено. Лемма доказана.

Из леммы следует, что ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} |v_k(t)| |\sin kx|$$

мажорирует ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} |u_k(t)| |\sin kx|,$$

и, следовательно, ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} u_k(t) \sin kx$$

абсолютно сходится при $|t| \leq t_1$ и при всех x . А тогда ряд (3), решающий задачу (2), (7), также абсолютно сходится в той же области. Что и требовалось доказать.

Естественно, что построить в явном виде бесконечный ряд невозможно. Поэтому ниже при построении приближенных решений задачи (2), (7) будем брать конечное число слагаемых

(см. формулу (4)) при выборе конкретного значения константы K . Однако термин «конечный отрезок ряда» к данной сумме не применим, поскольку при изменении значения константы K все коэффициенты $u_k(t)$ в конечных суммах изменяться: измениться не только число уравнений в конечных системах обыкновенных дифференциальных уравнений для определения коэффициентов $u_k(t)$, $1 \leq k \leq K$, но и количество слагаемых в правых частях этих систем.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА

Перед описанием построения приближенных решений уравнения Бюргерса сделаем замечание об использовании положительной константы μ_0 , стоящей в правой части уравнения (1) перед производной u_{xx} . Сделанные в первом пункте замены

$$u = \mu_0 \tilde{u}, \quad t' = \mu_0 t$$

позволили убрать из задачи этот параметр, что в каком-то смысле привело к более простым аналитическим выкладкам. Но далее эта константа оставлена в исходном уравнении Бюргерса. Это сделано для того, чтобы лучше понимать: как влияет на процесс диссипации значение отвечающей за этот процесс константы μ_0 при построении приближенных решений. Это приводит к тому, что конечная система обыкновенных дифференциальных уравнений (8) становится такой:

$$\begin{cases} u_1'(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K-1} u_j(t) u_{j+1}(t) - \mu_0 u_1(t); \\ u_l'(t) = \frac{1}{2} l \sum_{j=1}^{K-l} u_j(t) u_{j+l}(t) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l-1} i u_{l-i}(t) u_i(t) - \mu_0 l^2 u_l(t), \quad 2 \leq l \leq K-1; \\ u_K'(t) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K-1} i u_{K-j}(t) u_i(t) - \mu_0 K^2 u_K(t). \end{cases} \quad (20)$$

Естественно, что для системы (20) задаются начальные условия

$$u_l(t)|_{t=0} = u_l^0; \quad u_l^0 = \text{const}; \quad 1 \leq l \leq K.$$

Приближенные решения уравнения Бюргерса далее строятся в виде конечных сумм (4) при заданном K -числе слагаемых в начальном отрезке тригонометрического ряда. Для этого будут решаться конечные системы обыкновенных

дифференциальных уравнений (20) при заданных начальных данных (21).

При изменении значений начальных данных с помощью констант, входящих в начальные условия (21), выяснилось, что решение строится до достаточно больших значений времени.

В качестве примера подобной ситуации на рис. 1 приведены графики коэффициентов $u_k(t)$, $1 \leq k \leq 5$, в случае, когда $u|_{t=0} = \sin x$ и

$$K = 500; \quad \mu_0 = 0.001;$$

$$u_1|_{t=0} = 1.0; \quad u_l|_{t=0} = 0; \quad 2 \leq l \leq K. \quad (22)$$

Номер кривой на рис. 1 соответствует номеру коэффициента $u_k(t)$.

Отметим, что коэффициента $u_l(t)$ достаточно быстро достигают своего локального экстремума, а затем монотонно стремятся к нулю. Это их отличает от поведения подобных коэффициентов, задающих приближенные решения полной системы уравнений Навье–Стокса [1], которые также убывают до нуля с течением времени, но при этом осциллируют с конкретными частотами.

Условия (22) говорят о том, что в качестве начального условия в задаче (1), (7) взята следующая функция:

$$u(t, x)|_{t=0} = \sin x.$$

График этой синусоиды приведён на рис. 2, а число слагаемых в частичной сумме (4) взято в количестве пятьсот.

Изменение с течением времени рассматриваемого приближения решения задачи (25) передают графики на рис. 3, 4.

Линии 1–3 на рис. 3 соответствуют моментам времени $t = 1.0; 2.0; 3.0$. На рис. 4 этим же силам соответствуют моменты времени $t = 10.0; 15.0; 20.0$.

Анализируя приеденные графики, отмечаем, что с течением времени значения функции в локальных экстремумах стремятся к нулю. При этом положительный максимум как бы «движется» вправо, отрицательный минимум – влево. Поэтому значение производной $u_x(t, x)$ при приближении к точкам $x = \pm \pi$ становятся все больше, например

$$u_x(10, \pi - 0.01) \approx 31.0.$$

Но при этом в решении не возникают резкие осцилляции и не наблюдается разрушение решения, что часто бывает при использовании разностных методов для решения нелинейных уравнений с частными производными.

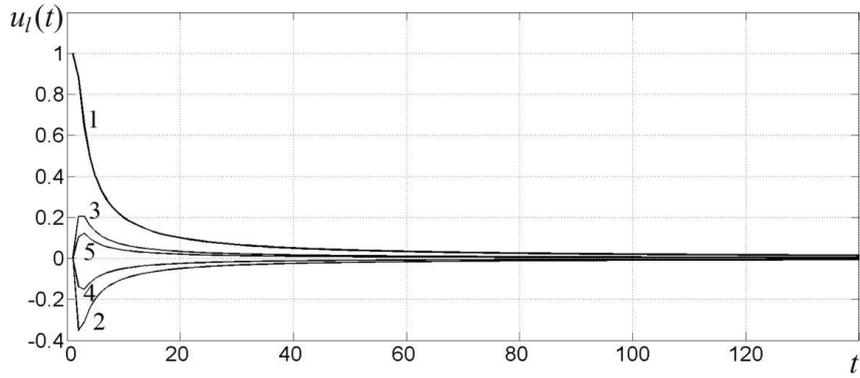


Рис. 1. Первые коэффициенты тригонометрического ряда

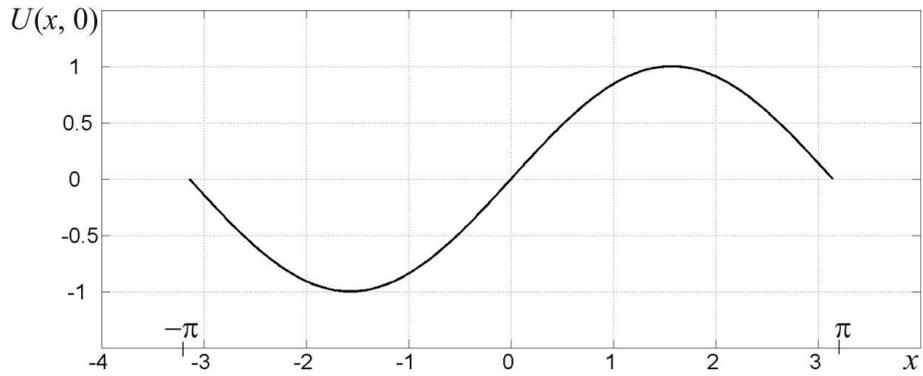


Рис. 2. График функции, задающей начальное условие

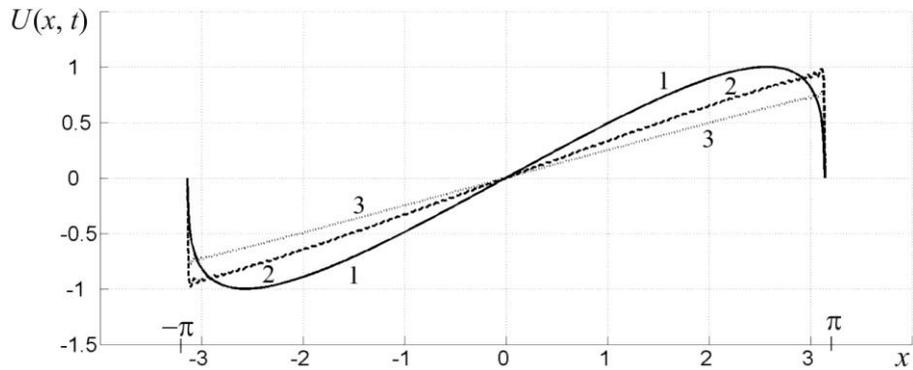


Рис. 3. Графики решения в моменты времени 1.0; 2.0; 3.0

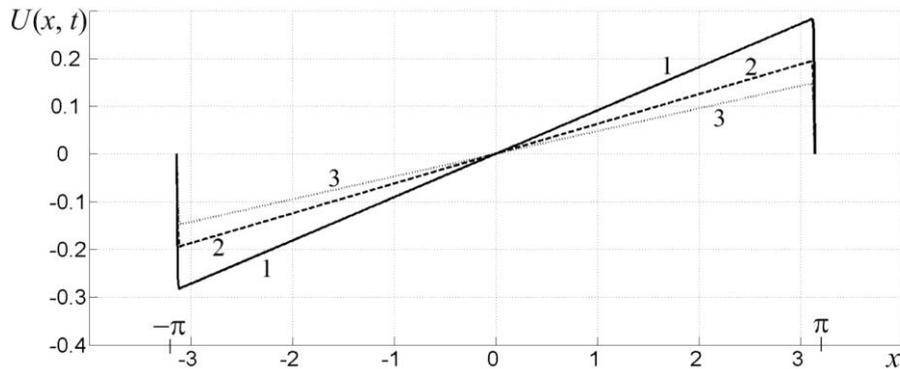


Рис. 4. Графики решения в моменты времени 10.0; 15.0; 20.0

На рис. 5 приведен спектр решения при условиях (22) в момент времени $t = 0$, а на

рис. 6 – спектр решения при $t = 1.0$. На этих рисунках по оси абсцисс откладывается значение

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

частоты k , а по оси ординат - значения соответствующих коэффициентов в указанный момент

времени.

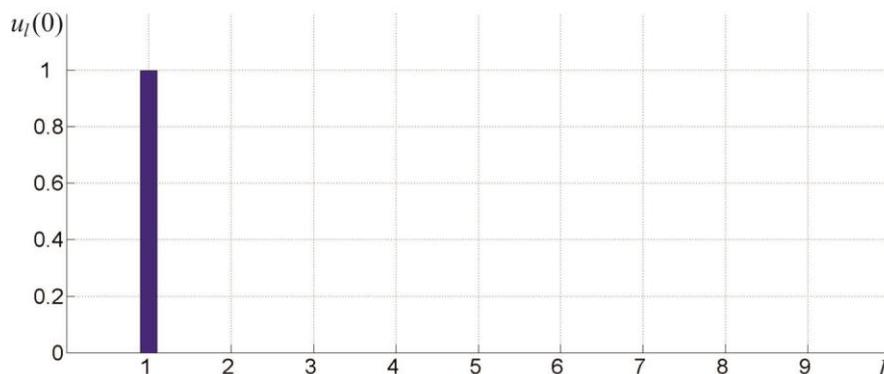


Рис. 5. Спектр начального условия

Рис. 5, 6 иллюстрируют действие первой теоремы о кратных частотах. В данном примере в начальный момент времени присутствует только одна гармоника с частотой 1 (см. рис. 5), и поэтому в решении с течением времени появ-

ляются только обертоны (см. рис. 6): гармоники со всеми большими частотами, поскольку в данном примере единственная начальная гармоника имеет частоту, равную единице, и поэтому $d = 1$.

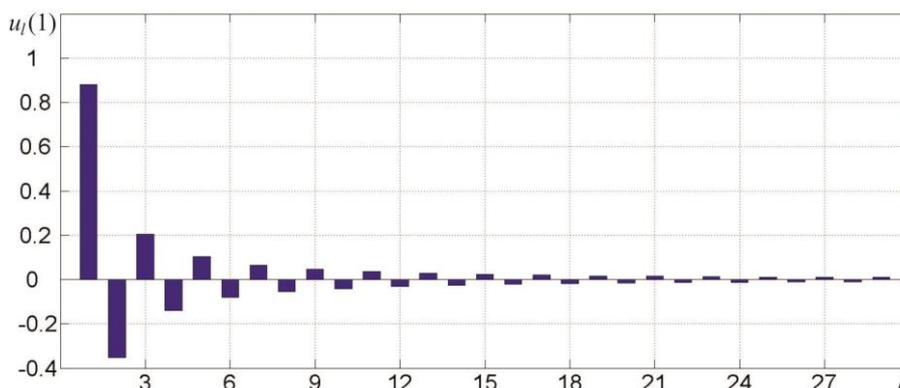
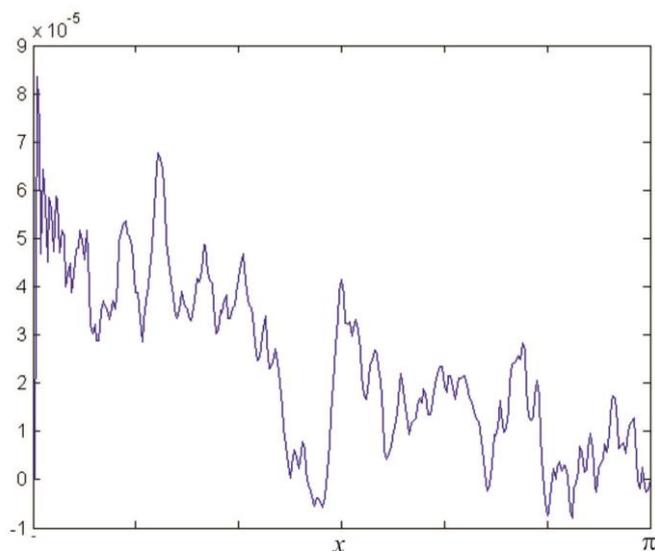


Рис. 6. Спектр решения в момент времени $t=1.0$



На рис. 7 при $t = 1$ приведена разность конечных сумм с различным числом слагаемых: $K = 400$ и $K = 500$, что показывает «машинную сходимость» конечных сумм в этом примере. Заметим, что численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (20) проводилось с заданной точностью: $\varepsilon = 10^{-4}$, т.е. разность этих конечных сумм практически равна погрешности вычислений.

Рис. 7. Разность решений с $K = 400$ и с $K = 500$

Поведение другого решения с течением времени иллюстрируют рис. 8–11 для следующего варианта:

$$K = 500; \mu_0 = 0.001; u_4|_{t=0} = 0.1;$$

$$u_6|_{t=0} = 0.1; u_l|_{t=0} = 0 \text{ для остальных } l.$$

На рис. 8 приведен вид функции $u(t, x)|_{t=0} = 0.1 \sin(4x) + 0.1 \sin(6x)$, задающей начальное условие в этом примере.

На рис. 9 приведены графики функции $u(t, x)$ в разные моменты времени: $t = 10, t = 20, t = 30$ и соответствующие кривые помечены цифрами 1, 2, 3 соответственно.

На рис. 10, 11 приведены спектры этого решения в моменты времени $t = 0, t = 20$, т.е. на рис. 10 приведены значения $u_k(t)|_{t=0}$, на рис. 11 значения $u_k(t)|_{t=20}$.

Рис. 11 иллюстрирует действие второй теоремы о кратных частотах.

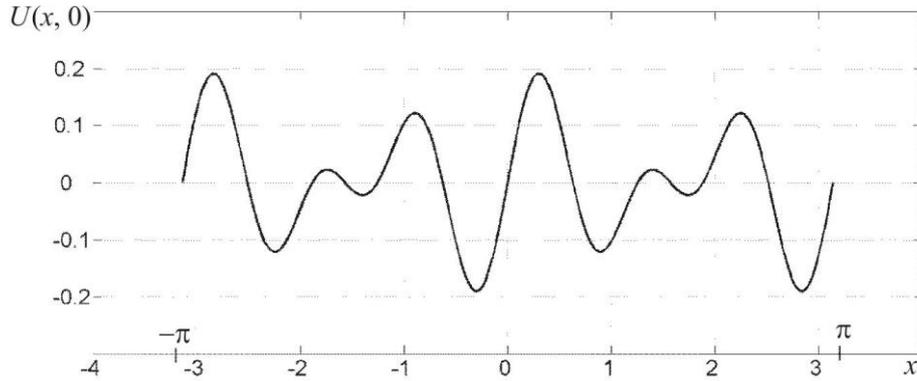


Рис. 8. График начального условия во втором примере

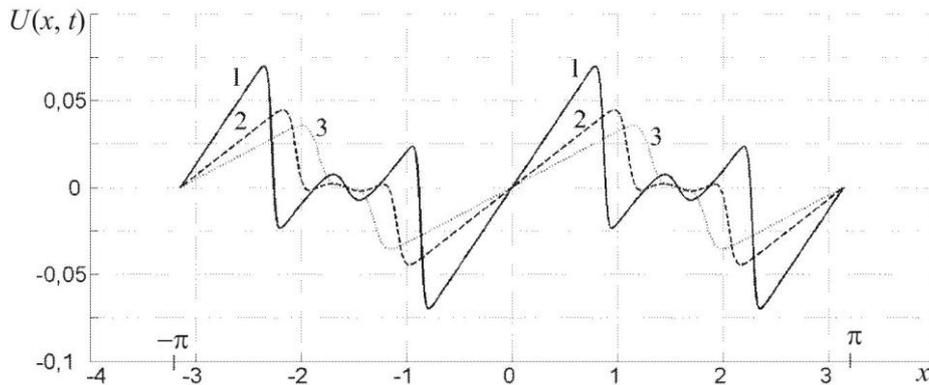


Рис. 9. Графики решения в моменты времени 10.0; 20.0; 30.0

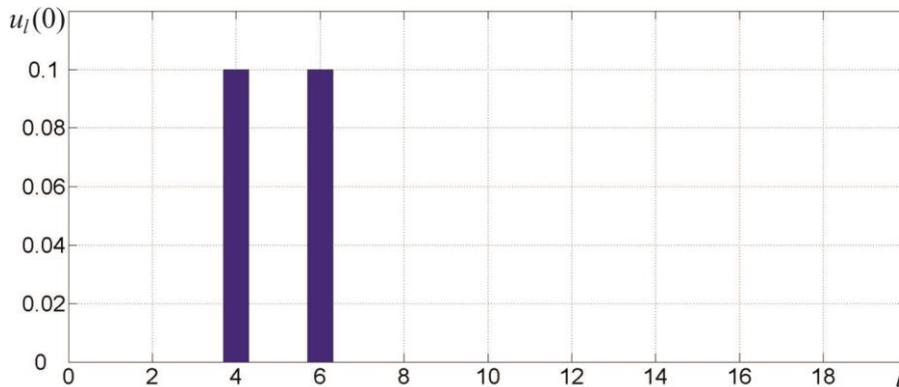


Рис. 10. Спектр решения в момент времени $t = 0$

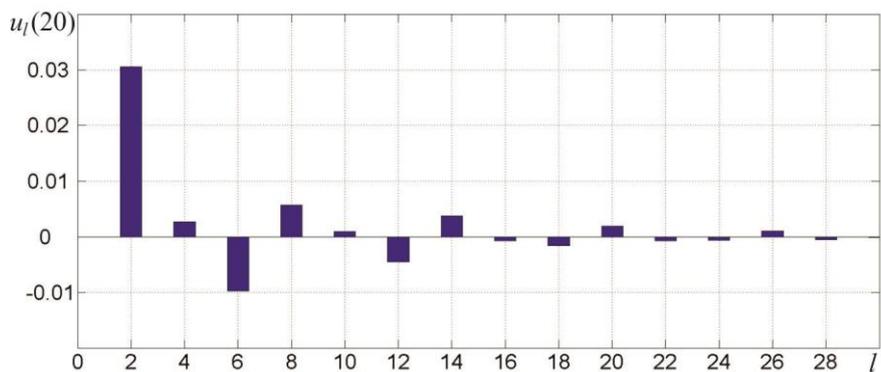


Рис. 11. Спектр решения в момент времени $t = 20.0$

В данном примере

$$d = \text{НОД}(4, 6) = 2,$$

и поэтому в решении с течением времени также появляются обертоны: гармоники с большими частотами, расположенными через двойку, т.е. 8, 10, 12 и т.д. Но кроме этого, появился и унтертон: гармоника с меньшей частотой, равной двум.

СОПОСТАВЛЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ С РЕШЕНИЯМИ, ПОСТРОЕННЫМИ РАЗНОСТНЫМИ МЕТОДАМИ

Естественно, что получить приближенные решения уравнения Бюргерса можно и разностными методами.

Благодаря наличию современных высокопроизводительных вычислительных комплексов основным инструментом построения приближенных решений нелинейных уравнений с частными производными включая полную систему уравнений Навье–Стокса [4], уже давно являются разностные методы.

Результаты численных расчетов приближенных решений уравнения Бюргерса с услови-

ями (22) в виде конечных тригонометрических сумм сопоставлялись с расчетами этой задачи разностными методами. Для этого использовалась явная разностная схема с применением центральных разностей для приближения производных по пространственным переменным и с постоянными разностными шагами по пространству и времени.

Как и ожидалось, пока в соответствующем приближенном решении уравнения Бюргерса не возникали большие значения производной по пространственной переменной, отклонения конечной тригонометрической суммы от разностного решения были небольшими. На рис. 12 приведен график функции $\Delta(t, x)$, являющийся разностью этих функций в момент времени $t = 1.0$. Величина модуля этой функции не превышает значения 0.02 и достигается около правой и левой границ при x , близких к $\pm\pi$.

Но при дальнейшем увеличении времени в окрестностях точки $x = \pm\pi$ у разностного решения $u_r(t, x)$ возникают достаточно большие необоснованные осцилляции.

На рис. 13 приведено поведение разностного решения в момент времени $t = 1.1$.

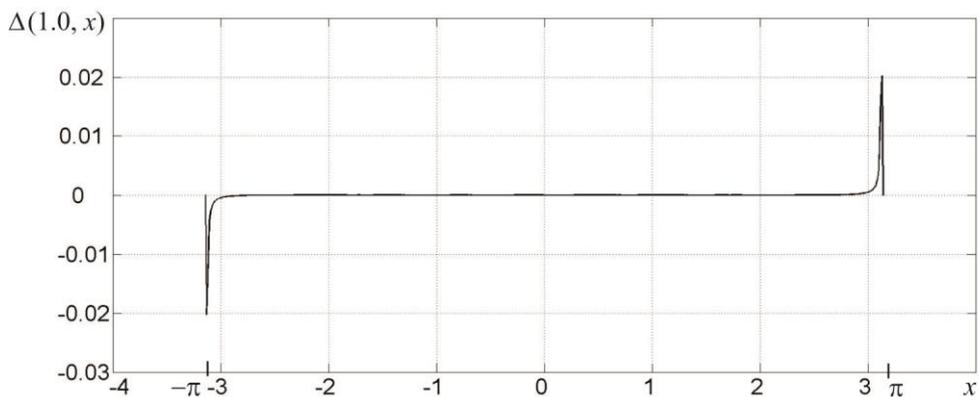


Рис. 12. Разность решений полученных тригонометрической суммой и разностным расчетом в момент времени $t = 1.0$

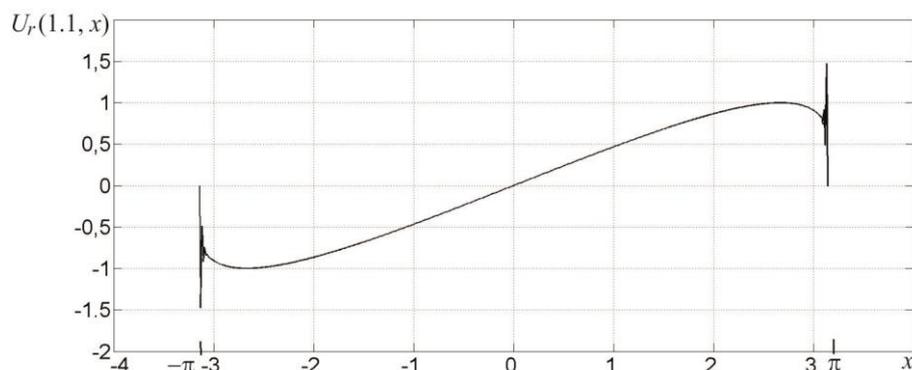


Рис. 13. График разностного решения в момент времени $t = 1.1$

Следовательно, приближенное решение уравнения Бюргерса, построенное с помощью конечных тригонометрических сумм, хорошо совпадает с приближенным решением, построенным разностным методом, пока в силу специфики разностных методов в последнем решении не появляются необоснованные осцилляции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используя ранее разработанную методику представления решений нелинейных уравнений с частными производными в данной работе построено решение уравнения Бюргерса в виде бесконечного тригонометрического ряда от пространственной переменной, коэффициенты которого зависят от времени. Доказаны теоремы о кратных частотах. Впервые доказана сходимость бесконечного тригонометрического ряда, решающего уравнение Бюргерса. Получение приближенных решений рассматриваемого нелинейного уравнения с частными производными основано на численном решении специальной конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений при нахождении коэффициентов начального отрезка бесконечного тригонометрического ряда. Установлен факт возникновения у решения в конечный момент времени при заданных гладких начальных условиях больших значений производных по пространственной переменной. Что тем не менее не приводит к возникновению необоснованных осцилляций или к разрушению решения. Подобный эффект был получен ранее [1] при моделировании распространения одномерного ударного перехода в случае построения тригонометрическими рядами решений полной системы уравнений Навье–Стокса. Сопоставление приведенных приближенных решений с решениями, построенными разностными методами, показало, что можно использовать отрезки три-

гонометрических рядов для получения приближенных решений уравнения Бюргерса.

Авторами данной работы выражается уверенность в эффективности предложенного подхода для построения решений соответствующих нелинейных систем уравнений с частными производными с помощью сходящихся тригонометрических рядов, в том числе в случае многих пространственных переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баутин С.П., Замыслов В.Е., Скачков П.П. Математическое моделирование тригонометрическими рядами одномерных течений вязкого теплопроводного газа. Новосибирск: Наука; Екатеринбург: УрГУПС, 2014. 91 с.
2. Mendousse J.S. Nonlinear dissipative distortion of progressive sound waves at moderate amplitudes // J. Acoust. Soc. Am. 1953. V. 25. P. 51–54.
3. Хохлов Р.В. К теории ударных радиоволн в нелинейных линиях // Радиотехника и электроника. 1961. Т. 6. № 6. С. 917–925.
4. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.
5. Замыслов В.Е. Стоячие волны как решение полной системы уравнений Навье–Стокса в одномерном случае // Вычислительные технологии, 2013. Т. 18. № 2. С. 33–45.
6. Курмаева К.В., Тимов С.С. Специальные ряды с кратными частотами для одномерных течений сжимаемого газа в обобщении теорем В.Е. Замыслова // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения, 2016. № 3. С. 18–28.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
8. Алдошина И., Приттс Р. Музыкальная акустика. СПб.: Композитор, 2006. 260 с.
9. Ковалевская С.П. Научные труды. К теории дифференциальных уравнений с частными производными. М.: Изд-во АН СССР, 1948. 368 с.
10. Баутин С.П. Аналитическая тепловая волна. М.: Физматлит, 2003. 88 с.

REPRESENTATION OF SOLUTIONS TO THE BURGERS EQUATION TRIGONOMETRIC SERIES

S.P. Bautin^{1*}, *V. E. Zamyslov*²

¹*Snezhinsk Institute of Physics and Technology, National Research Nuclear University MEPhI, Snezhinsk, Chelyabinsk region, 456776 Russia*

²*Ural State Transport University, Yekaterinburg, 620034 Russia*

**e-mail: spbautin@mail.ru*

***e-mail: zamislov2017@yandex.ru*

Received November 12, 2022; revised November 16, 2022; accepted November 22, 2022

The paper describes a technique for representing solutions of a nonlinear partial differential equation – the Burgers equation – in the form of an infinite trigonometric series from a spatial variable. The coefficients of the series are the desired functions of time. The procedure for obtaining an infinite system of ordinary differential equations, the solutions of which set the desired coefficients of the series, is described. Due to the specific properties of the solutions of the considered infinite systems of ordinary differential equations, the theorems on multiple frequencies are proved and the convergence of an infinite trigonometric series in some neighborhood of the point $t = 0$ and for all values of the independent variable x is investigated. With the help of finite sums, concrete approximate solutions of the Burgers equation are constructed. In particular, it is established that the solution has large values of derivatives in the spatial variable at a finite time under given smooth initial conditions. Which, nevertheless, does not lead to the occurrence of unreasonable oscillations or to the destruction of the solution.

Keywords: nonlinear partial differential equations, trigonometric series, Burgers equation, approximate solutions.

REFERENCE

1. *Bautin S.P., Zamyslov V.E., Skashkov P.P.* Matematicheskoe modelirovanie trigonometricheskimi rajdami odnomernyh techenii vsyazkogo teploprovodnogo gaza [Mathematical modeling of trigonometric series of one-dimensional flows of a viscous heat-conducting gas]. Novosibirsk: Nauka Publ.; Ekaterinburg: UrGUPS Publ. 2014. 91 p.
2. *Mendousse J.S.* Nonlinear dissipative distortion of progressive sound waves at moderate amplitudes. *J. Acoust. Soc. Am.* 1953. V. 25. P. 51–54.
3. *Hohlov R.V.* K teorii udarnyh radiovoln v nelineinykh liniyakh [On the theory of shock radio waves in nonlinear lines]. *Radiotekhnika i elektronika.* 1961. V. 6. № 6. P. 917–925 (in Russian).
4. *Bautin S.P.* Charakteristicheskaj zadacha Koshy i ee prilozhenij v gazovoi dinamike [The characteristic Cauchy problem and its applications in gas dynamics]. Novosibirsk: Nauka, 2009. 368 p. (in Russian).
5. *Zamyslov V.E.* Stoajchii volny kak resheniaj polnoi sistemy uravnenij Navie-Stoksa v odnomernom sluchae [Standing waves as solutions of the complete system of Navier-Stokes equations in the one-dimensional case]. *Vychislitelnye tehnologii.* 2013. V. 18. № 2. P. 33–45 (in Russian).
6. *Kurmaeva K.V., Titov S.S.* Specyialnye rajdy s kratnymi chastotami dlaj odnomernyh techenij szymaemogo gaza v obobchenii teorem V.E. Zamyslova. [Special series with multiple frequencies for one-dimensional flows of compressible gas in generalization of V.E. Zamyslov's theorems]. *Vestnik Uralskogo gosudarstvennogo universiteta putei soobshenij.* 2016. № 3. P. 18–28 (in Russian).
7. *Landau L.D., Lifšycs E.M.* Teoreticheskaja fizika. vol.VI. Gidrodinamika [Theoretical physics. Vol. VI. Hydrodynamics]. M.: Nauka Publ, 1988. 736 p.
8. *Aldoshyna I., Pritts R, Ppumm P.* Muzykalnaaj akustika [Musical acoustics]. SPb.: Kompozitor publ., 2006. 260 p.
9. *Kovalevskaj S.V.* Nauchnye Trudy. K teorii differencijal'nyh uravnenij s chastnymi proizvodnyvi [Scientific works. On the theory of partial differential equations]. M.: Izd-vo AN SSSR Publ., 1948. 368 p.
10. *Bautin S.P.* Analiticheskaja teplovaja volna [Analytical heat wave]. M.: Fizmatlit Publ., 2003. 88 p.