

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.91

### АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКИ-БИСВАСА

© 2022 А.А. Кутуков\*, Н.А. Кудряшов\*\*

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

\*e-mail: alexkutuk@gmail.com,

\*\*e-mail: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию 06.12.2022

После доработки: 09.12.2022

Принята к публикации: 13.12.2022

Рассматривается математическая модель для описания распространения импульсов в нелинейной оптической среде, описываемая обобщенным уравнением Трики-Бисваса. Задача Коши этого нелинейного уравнения в частных производных не решается методом обратного преобразования рассеяния, поэтому решение ищется в переменных бегущей волны. Изучается система из двух нелинейных дифференциальных уравнений, полученная в результате приравнивания нулю действительной и мнимой частей исходного уравнения. После ряда преобразований, связанных с нахождением первых интегралов рассматриваемых уравнений, система уравнений преобразуется к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, решение которого не может быть выражено в общем виде при помощи эллиптических функций. Применяется метод преобразования зависимой и независимой переменных, с помощью которого решение рассматриваемого дифференциального уравнения записывается с использованием эллиптических функций Якоби в неявном виде. Исследуется вопрос существования вырожденных решений в зависимости от значений параметров исходного дифференциального уравнения. Приводится частный случай, когда решение имеет вид уединенной волны и представляется в неявной форме. Полученные решения в виде периодических и уединенных волн иллюстрируются при различных значениях параметров математической модели.

**Ключевые слова:** обобщенное уравнение Трики-Бисваса, точные решения, оптические солитоны.

**DOI:** 10.26583/vestnik.2022.239

#### ВВЕДЕНИЕ

Для передачи информации в современном мире используется оптическое волокно. Важной проблемой, привлекающей исследователей, является моделирование распространения импульсов в нелинейных волноводах с целью повышения качества передаваемого сигнала. Большинство таких математических моделей основаны на обобщениях нелинейного уравнения Шредингера с учетом свойств оптической среды [1–4]. Можно выделить известные модели, описываемые уравнением Трики-Бисваса [5–10], уравнением Радхакришнана-Кунду-Лакшманана [11–13], уравнением Бисваса-Аршеда [14–16], уравнением Фокаса-Ленеллса [17, 18]. В данной работе рассматривается обобщение уравнения Трики-Бисваса, с помощью которого моделируется распространение фемтосекундных оптических импульсов в нелинейной оптической среде. Это уравнение имеет вид

$$iq_t - \delta q_{xx} + i \frac{\partial}{\partial x} (a|q|^{2m}q + b|q|^{4m}q) = 0. \quad (1)$$

При  $a = 0$  уравнение (1) имеет вид классического уравнения Трики-Бисваса. При  $a = 0$  и  $m = 1$  уравнение (1) имеет вид известного уравнения Каупа-Ньюэла [19].

#### ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКИ-БИСВАСА В ПЕРЕМЕННЫХ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Точное решение уравнения (1) ищется в виде

$$q(x, t) = y(z)e^{i(\psi(z) + \omega t)}, \quad z = x - C_0 t. \quad (2)$$

После подстановки (2) в уравнение (1) получается обыкновенное дифференциальное уравнение в виде

$$\begin{aligned} & i(4m+1)by^{4m}y_z - by^{4m+1}\psi_z - \\ & - ay^{2m+1}\psi_z + i(2m+1)ay^{2m}y_z - \\ & - i\delta y\psi_{zz} + \delta y\psi_z^2 + C_0 y\psi_z - \\ & - y\omega - 2i\delta y_z\psi_z - iC_0 y_z - \delta y_{zz} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (3) может быть представлено в виде системы уравнений путем приравнивания нулю действительной и мнимой части уравнения (3):

$$by^{2n+1}\psi_z + ay^{n+1}\psi_z + \delta y_{zz} - (\psi_z^2\delta + \psi_z C_0 - \omega)y = 0, \quad (4)$$

$$(2n+1)by^{2n}y_z + (n+1)ay^n y_z - \delta y\psi_{zz} - 2\delta y_z\psi_z - C_0 y_z = 0, \quad (5)$$

где  $n = 2m$ . Уравнение (5) может быть проинтегрировано по  $z$  после умножения на  $y(z)$  и представлено в виде

$$-\delta y^2\psi_z + \frac{a(n+1)}{n+2}y^{n+2} + \frac{b(2n+1)}{2(n+1)}y^{2n+2} - \frac{C_0}{2}y^2 + C_1 = 0. \quad (6)$$

Из уравнения (6) находится  $\psi_z$  и подставляется в уравнение (4):

$$\begin{aligned} & -\delta y_{zz} + \frac{-4\delta\omega - C_0^2}{4\delta}y + \\ & + \frac{C_1^2}{\delta y^3} - \frac{(2n+1)b^2}{4(n+1)^2\delta}y^{4n+1} - \\ & - \frac{-C_0n^2b + 2(a^2 - 2C_0b)(n+1)}{2(n+2)^2\delta}y^{2n+1} + \\ & + \frac{C_0a}{2\delta}y^{n+1} + \frac{aC_1n}{(n+2)\delta}y^{n-1} - \\ & - \frac{(3n+2)ab}{2(n+1)(n+2)\delta}y^{3n+1} + \\ & + \frac{C_1nb}{(n+1)\delta}y^{2n-1} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Первый интеграл уравнения (7) получается после его умножения на  $y_z$  и интегрирования по  $z$ :

$$\begin{aligned} & -\frac{\delta}{2}y_z^2 - \frac{C_1^2}{2\delta y^2} - \frac{4\delta\omega + C_0^2}{8\delta}y^2 + \\ & + \frac{C_1a}{(n+2)\delta}y^n + \frac{C_0a}{2(n+2)\delta}y^{n+2} + \\ & + \frac{C_1b}{2(n+1)\delta}y^{2n} - \\ & - \frac{-C_0n^2b + 2(a^2 - 2C_0b)(n+1)}{4(n+1)(n+2)^2\delta}y^{2n+2} - \\ & - \frac{ab}{2(n+1)(n+2)\delta}y^{3n+2} - \\ & - \frac{b^2}{8(n+1)^2\delta}y^{4n+2} + C_2 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Вводятся следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{C_1^2}{\delta^2}, \quad B = -\frac{4\delta\omega + C_0^2}{4\delta^2}, \\ C &= \frac{2C_2}{\delta}, \quad E_n = \frac{2C_1a}{(n+2)\delta^2}, \\ F_n &= \frac{C_0a}{(n+2)\delta^2}, \\ G_n &= -\frac{-C_0bn^2 + 2(a^2 - 2bC_0)(n+1)}{2(n+1)(n+2)^2\delta^2}, \\ H_n &= -\frac{ab}{(n+1)(n+2)\delta^2}, \\ K_n &= -\frac{b^2}{4(n+1)^2\delta^2}, \quad L_n = \frac{bC_1}{(n+1)\delta^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда уравнение (8) представляется в виде

$$\begin{aligned} y_z^2 &= \frac{A}{y^2} + By^2 + C + E_n y^n + \\ & + F_n y^{n+2} + G_n y^{2n+2} + \\ & + H_n y^{3n+2} + K_n y^{4n+2} + L_n y^{2n}. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение (10) записывается в форме

$$y^2 y_z^2 = P(y), \quad (11)$$

где  $P(y)$  имеет полиномиальную форму:

$$\begin{aligned} P(y) &= A + By^4 + Cy^2 + \\ & + E_n y^{n+2} + F_n y^{n+4} + G_n y^{2n+4} + \\ & + H_n y^{3n+4} + K_n y^{4n+4} + L_n y^{2n+2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Общее решение уравнения (10) может быть записано в виде

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{P(y)}} = z - z_0. \quad (13)$$

Такой интеграл не удастся выразить при помощи элементарных функций. Для построения решений могут быть использованы специальные методы для того, чтобы выразить решение в виде, удобном для построения с помощью систем символьных вычислений.

#### МЕТОД НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКИ-БИСВАСА В ПЕРЕМЕННЫХ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Рассматривается случай, когда  $C_1 = 0$  и  $C_2 = 0$ . Тогда  $A = 0, C = 0, E_n = 0, L_n = 0$ . С учетом указанных значений констант уравнение (10) представляется в виде

$$y_z^2 = By^2 + F_n y^{n+2} + G_n y^{2n+2} + H_n y^{3n+2} + K_n y^{4n+2}. \quad (14)$$

Осуществляется замена зависимой переменной в виде

$$y(z) = V(z)^{-\frac{1}{n}}. \quad (15)$$

Тогда уравнение (14) выражается в виде

$$\frac{V_z^2}{n^2} = \frac{BV^4 + F_nV^3 + G_nV^2 + H_nV + K_n}{V^2}. \quad (16)$$

После замены независимой переменной

$$z = \frac{\tilde{z}}{n\sqrt{B}} \quad (17)$$

уравнение (16) записывается в виде

$$V_z^2 = \frac{V^4 + M_nV^3 + R_nV^2 + S_nV + T_n}{V^2}, \quad (18)$$

где  $M_n = \frac{F_n}{B}, R_n = \frac{G_n}{B}, S_n = \frac{H_n}{B}, T_n = \frac{K_n}{B}$ .

Пусть  $V_1, V_2, V_3, V_4$  – корни уравнения

$$V^4 + M_nV^3 + R_nV^2 + S_nV + T_n = 0. \quad (19)$$

Тогда уравнение (18) представляется в виде

$$\begin{aligned} V^2V_z^2 &= \\ &= (V - V_1)(V - V_2)(V - V_3)(V - V_4). \end{aligned} \quad (20)$$

Согласно методу неявных функций [21] предполагается, что

$$V(\tilde{z}) = U(\xi), \xi = \varphi(\tilde{z}). \quad (21)$$

После подстановки (21) в уравнение (20) получается уравнение

$$\begin{aligned} U^2U_\xi^2\xi_z^2 &= \\ &= (U - V_1)(U - V_2)(U - V_3)(U - V_4). \end{aligned} \quad (22)$$

Пусть

$$\xi_z^2 = \frac{1}{U^2}, \quad (23)$$

тогда уравнение (22) представляется в виде

$$U_\xi^2 = (U - V_1)(U - V_2)(U - V_3)(U - V_4). \quad (24)$$

Решение уравнения (24) выражается в виде

$$\begin{aligned} U(\xi) &= \\ &= \frac{V_3(V_1 - V_4) \operatorname{sn}^2(S(\xi - \xi_0), k)}{(V_1 - V_4) \operatorname{sn}^2(S(\xi - \xi_0), k) + V_3 - V_1} - \\ &- \frac{V_4(V_1 - V_3)}{(V_1 - V_4) \operatorname{sn}^2(S(\xi - \xi_0), k) + V_3 - V_1}, \end{aligned} \quad (25)$$

где

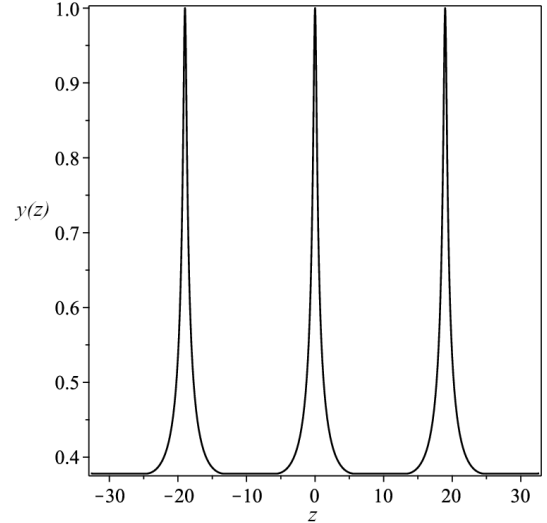
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{(V_2 - V_4)(V_1 - V_3)}, \\ k^2 &= \frac{(V_2 - V_3)(V_1 - V_4)}{(V_1 - V_3)(V_2 - V_4)} \end{aligned} \quad (26)$$

и  $\operatorname{sn}(x, k)$  – эллиптическая функция Якоби.

Принимая во внимание решение (25) и уравнение (23), связь между  $\xi$  и  $\tilde{z}$  выражается в виде

$$\tilde{z} - z_0 = \pm \int U(\xi) d\xi. \quad (27)$$

Из уравнения (27)  $\xi$  в явном виде не выражается, поэтому выражение (25) и уравнение (27) задают решение уравнения (20) в неявной форме.



**Рис. 1.** График зависимости  $y(z)$ , заданной выражениями (25), (27) и (15), при  $n = 2$ ,  $a = -3, b = \frac{84}{5}, \delta = -\frac{441}{400}, \omega = 1, C_0 = 2$ . График зависимости  $y(\tilde{z})$  строится (рис. 1) с использованием выражений (25), (27) и (15).

### ВЫРОЖДЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКИ-БИСВАСА В ПЕРЕМЕННЫХ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Рассматривается случай, когда в уравнении (18) полином (19) имеет кратные корни. В этом случае необходимо учесть, что значения корней зависят от параметров задачи. В каждом случае проверяется, существуют ли такие параметры, при которых корни полинома (19) имеют предполагаемую кратность. Коэффициенты полинома (19) выражаются через параметры задачи следующим образом:

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{-4C_0a}{(n+2)(4\delta\omega + C_0^2)}, \\ S_n &= \frac{4ab}{(n^2 + 3n + 2)(4\delta\omega + C_0^2)}, \\ T_n &= \frac{b^2}{(n+1)^2(4\delta\omega + C_0^2)}, \\ R_n &= \frac{(4a^2 - 8bC_0)n}{(n+2)^2(n+1)(4\delta\omega + C_0^2)} + \\ &+ \frac{-2bn^2C_0 + 4a^2 - 8bC_0}{(n+2)^2(n+1)(4\delta\omega + C_0^2)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Тогда получается система уравнений для корней полинома (19) и параметров задачи в виде

$$\begin{aligned}
 V_1 V_2 V_3 V_4 &= \frac{b^2}{(n+1)^2(4\delta\omega + C_0^2)}, \\
 -V_1 V_2 V_3 - V_1 V_2 V_4 - V_1 V_3 V_4 - V_2 V_3 V_4 &= \\
 &= \frac{4ab}{(n^2 + 3n + 2)(4\delta\omega + C_0^2)}, \\
 V_1 V_2 + V_3 V_1 + V_4 V_1 + V_3 V_2 + V_4 V_2 + V_4 V_3 &= \\
 &= \frac{(4a^2 - 8bC_0)n}{(n+2)^2(n+1)(4\delta\omega + C_0^2)} + \\
 &+ \frac{-2bn^2C_0 + 4a^2 - 8bC_0}{(n+2)^2(n+1)(4\delta\omega + C_0^2)}, \\
 V_1 + V_2 + V_3 + V_4 &= \frac{4C_0a}{(n+2)(4\delta\omega + C_0^2)}.
 \end{aligned} \quad (29)$$

**Случай 1.** Предполагается, что уравнение (20) имеет совпадающие корни  $V_1 = V_2$ . Тогда оно принимает вид

$$\tilde{z} - z_0 = \pm \int \frac{(V_1 - V_4) \tanh^2(S(\xi - \xi_0)) + V_3 - V_1}{V_3(V_1 - V_4) \tanh^2(S(\xi - \xi_0)) - V_4(V_1 - V_3)} d\xi. \quad (33)$$

Интеграл в формуле (33) выражается с помощью элементарных функций, поэтому уравнение (33) принимает форму

$$\begin{aligned}
 \tilde{z} - z_0 &= V_1 \xi + \ln \left( e^{-2S(\xi - \xi_0)} + \frac{-2V_1 + V_3 + V_4 + 4S}{V_3 - V_4} \right) - \\
 &- \ln \left( e^{-2S(\xi - \xi_0)} + \frac{-2V_1 + V_3 + V_4 - 4S}{V_3 - V_4} \right),
 \end{aligned} \quad (34)$$

где  $S$  задается как (32). Таким образом, вырожденное решение обобщенного уравнения Трики-Бисваса в переменных бегущей волны записывается в неявном виде. Принимая во внимание формулы (15), (31) и (34), строят график зависимости  $y(z)$  (рис. 2) при  $n = 2$ ,  $a = -\frac{448}{73}$ ,  $b = \frac{2352}{73}$ ,  $\delta = -\frac{6561}{5329}$ ,  $\omega = 1$ ,  $C_0 = 2$ .

**Случай 2.** Пусть  $V_1 = V_2 = V_3$ , тогда уравнение (20) принимает вид

$$V^2 V_z^2 = (V - V_1)^3 (V - V_4). \quad (35)$$

Оказывается, что в этом случае система (29) имеет решения только при  $V_1 = V_4$ . Этот случай будет рассмотрен отдельно.

**Случай 3.** Пусть  $V_1 = V_2 = V_3 = V_4$ , тогда уравнение (18) принимает вид

$$V^2 V_z^2 = (V - V_1)^4. \quad (36)$$

В этом случае решение системы (29) находится в виде

$$V^2 V_z^2 = (V - V_1)^2 (V - V_3) (V - V_4) \quad (30)$$

Система (29) в случае  $V_1 = V_2$  имеет решения для ненулевых значений параметров задачи, поэтому этот случай подходит для поиска решений уравнения (30). При  $V_1 = V_2$  эллиптическая функция Якоби в выражении (25) вырождается в гиперболический тангенс, и получается решение в виде

$$\begin{aligned}
 U(\xi) &= \\
 &= \frac{V_3(V_1 - V_4) \tanh^2(S(\xi - \xi_0))}{(V_1 - V_4) \tanh^2(S(\xi - \xi_0)) + V_3 - V_1} - \\
 &- \frac{V_4(V_1 - V_3)}{(V_1 - V_4) \tanh^2(S(\xi - \xi_0)) + V_3 - V_1},
 \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$S = \frac{\sqrt{(V_1 - V_4)(V_1 - V_3)}}{2}. \quad (32)$$

В то же время уравнение (27) в случае  $V_1 = V_2$  принимает форму

$$V_1 = -\frac{b(n+2)}{a(n+1)}, C_0 = -\frac{a^2(n+1)}{b(n+2)^2}, \quad \omega = 0. \quad (37)$$

Метод неявных функций применяется к уравнению (36). После замены переменных (21) в уравнении (36) получается уравнение вида

$$U^2 U_\xi^2 \xi_z^2 = (U - V_1)^4. \quad (38)$$

Положим

$$\xi_z^2 = \frac{1}{U^2}, \quad (39)$$

тогда уравнение (38) принимает вид

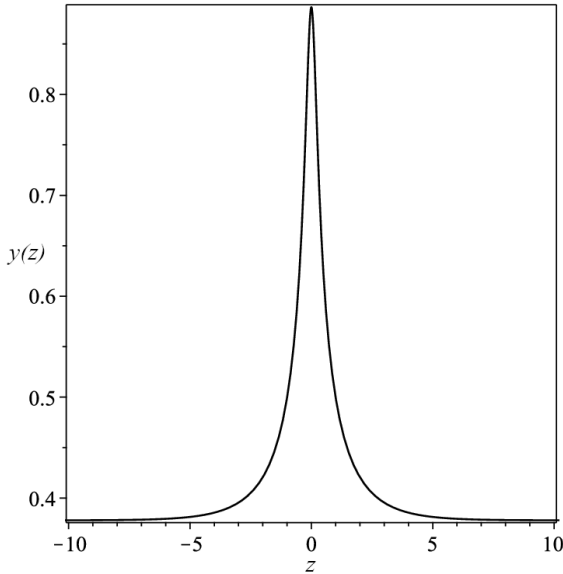
$$U_\xi^2 = (U - V_1)^4. \quad (40)$$

Одно из решений уравнения (40) представляется в виде

$$U(\xi) = \frac{-1 + V_1(\xi - \xi_0)}{\xi - \xi_0}. \quad (41)$$

Из уравнения (39) с учетом (40) получается зависимость

$$\tilde{z} - z_0 = V_1 \xi - \ln(\xi - \xi_0). \quad (42)$$



**Рис. 2.** График зависимости  $y(z)$  в случае  $V_1 = V_2$ , заданной выражениями (31), (33) и (15), при  $n = 2$ ,  $a = -\frac{448}{73}$ ,  $b = \frac{2352}{73}$ ,  $\delta = -\frac{6561}{5329}$ ,  $\omega = 1$ ,  $C_0 = 2$

В этом случае удастся построить решение уравнения (36) в явном виде. Из соотношений (41) и (42) получается решение:

$$V(\tilde{z}) = \frac{V_1(W(-V_1 e^{V_1 \xi_0 - \tilde{z} + z_0}) + 1)}{W(-V_1 e^{V_1 \xi_0 - \tilde{z} + z_0})}, \quad (43)$$

где  $W(x)$  – функция Ламберта, которая удовлетворяет уравнению  $x = W(x)e^{W(x)}$ . В данном случае не удастся построить действительные решения  $y(z)$ , поскольку в выражении (17) параметр  $B$  при условиях (37) принимает только отрицательные значения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассматривалось обобщенное уравнение Трики-Бисваса, описывающее распространение фемтосекундных импульсов в нелинейном оптическом волокне. Для обобщенного уравнения Трики-Бисваса в переменных бегущей волны найдены решения, заданные неявно. Рассмотрены вырожденные случаи. Проиллюстрированы решения в виде периодических и уединенных волн.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00141).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kivshar Y., Agrawal G. Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals, 2003.
2. Kudryashov N.A. Almost general solution of the reduced higher-order nonlinear Schrödinger equation // *Optik*. 2021. V. 230. Art. № 166347.
3. Kudryashov N.A. Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrödinger equations // *Appl. Math. Comput.* 2020. V. 371. Art. № 124972.
4. Kudryashov N.A. Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities // *Optik*. 2020. V. 212. Art. № 164750.
5. Triki H., Biswas A. Sub pico-second chirped envelope solitons and conservation laws in monomode optical fibers for a new derivative nonlinear Schrödinger's model // *Optik*. 2018. V. 173. P. 235–241.
6. Kudryashov N.A. First integrals and solutions of the traveling wave reduction for the Triki-Biswas equation // *Optik*. 2019. V. 185. P. 275–281.
7. Zhou Q., Ekici M., Sonmezoglu A. Exact chirped singular soliton solutions of Triki-Biswas equation // *Optik*. 2019. V. 181. P. 338–342.
8. Arshed S. Sub-pico second chirped optical pulses with Triki-Biswas equation by  $\exp(-\Phi(\xi))$ -expansion method and the first integral method *Optik*. 2019. V. 179. P. 518–525.
9. Zayed E., Alngar M. Application of newly proposed sub-ODE method to locate chirped optical solitons to Triki-Biswas equation *Optik*. 2020. V. 207. Art. № 164360.
10. Kudryashov N.A., Lavrova S.F. Dynamical properties of the periodically perturbed Triki-Biswas equation // *Optik*. 2022. V. 253. Art. № 168553.
11. Biswas A. 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan, Kundu, Lakshmanan equation // *Physics Letters A*. 2009. V. 373 (30). P. 25462548.
12. Biswas A. Optical soliton perturbation with Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation by traveling wave hypothesis // *Optik*. 2018. V. 171. P. 217–220.
13. Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., Alshomrani A. Optical solitons with Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation by extended trial function scheme // *Optik*. 2018. V. 160. P. 415–427.
14. Biswas A., Arshed S. Optical solitons in presence of higher order dispersions and absence of self-phase modulation // *Optik*. 2018. V. 174. P. 452–459.
15. Kudryashov N.A. Periodic and solitary waves of the Biswas-Arshed equation // *Optik*. 2020. V. 200. Art. № 163442.
16. Kutukov A., Kudryashov N., Prikazchikova A. Periodic and solitary wave solutions of the Biswas-Arshed equation for pulses in a birefringent fiber // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. V. 2036. Art. № 012027.
17. Lenells J., Fokas A. An integrable generalization of the nonlinear Schrödinger equation on the half-line and solitons // *Inverse Problems*. 2009. V. 25 (11). Art. № 115006.

18. Kudryashov N.A. First integrals and general solution of the Fokas-Lenells equation // *Optik*. 2019. V. 195.

19. Kaup D., Newell A. An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation // *Journal of Mathematical Physics*. 1977. V. 19 (4). P. 798–801.

20. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series, and Products: Eighth Edition // Elsevier, 2014.

21. Kudryashov N. Implicit solitary waves for one of the generalized nonlinear Schrödinger equations // *Mathematics*. 2021. V. 9 (23). Art. № 3024.

---

**Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2022, vol. 11, no 4, pp. 319–325**

---

## ANALYTICAL SOLUTIONS OF THE GENERALIZED TRIKI-BISWAS EQUATION

**A.A. Kutukov\*, N.A. Kudryashov\*\***

*National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute),  
Moscow, 115409 Russia*

*\*e-mail: alexkutuk@gmail.com*

*\*\*e-mail: nakudr@gmail.com*

Received December 6, 2022; revised December 9, 2022; accepted December 13, 2022

The mathematical model is considered for describing the propagation of pulses in a nonlinear optical medium, which is described by the generalized Triki-Biswas equation. The Cauchy problem for the nonlinear partial differential equation under study is not solved by the method of inverse scattering transformation, therefore, a transition is made to the traveling wave variable. The resulting ordinary differential equation is considered as a system of two equations for the real and imaginary parts of the original equation. After a series of transformations related to finding the first integrals of the equations under consideration, the system of equations is transformed to a nonlinear ordinary differential equation of the first order, the solution of which cannot be expressed in a general form using elementary functions. The method of transformation of the dependent and independent variables is applied, with the help of which the solution of the considered differential equation is written using the Jacobi elliptic functions in an implicit form. We study the question of the existence of degenerate solutions depending on the values of the parameters of the original differential equation. A degenerate case is presented when the solution has the form of a solitary wave and is written in an implicit form. The solutions found in the form of periodic and solitary waves are illustrated for various values of the parameters of the model under study.

**Keywords:** generalized Triki-Biswas equation, exact solutions, optical solitons.

### REFERENCES

1. Kivshar Y., Agrawal G. Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals, 2003.

2. Kudryashov N. A. Almost general solution of the reduced higher-order nonlinear Schrödinger equation, *Optik*, 2021. V. 230. Art. № 166347.

3. Kudryashov N. A. Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrödinger equations, *Appl. Math. Comput.* 2020. V. 371. Art. № 124972.

4. Kudryashov N.A. Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities, *Optik*, 2020. V. 212. Art. № 164750.

5. Triki H., Biswas A. Sub pico-second chirped envelope solitons and conservation laws in monomode optical fibers for a new derivative nonlinear Schrödinger's model, *Optik*, 2018. V. 173. P. 235–241.

6. Kudryashov N.A. First integrals and solutions of the traveling wave reduction for the Triki-Biswas equation, *Optik*, 2019. V. 185. P. 275–281.

7. Zhou Q., Ekici M., Sonmezoglu A. Exact chirped singular soliton solutions of Triki-Biswas equation, *Optik*, 2019. V. 181. P. 338–342.

8. Arshed S., Sub-pico second chirped optical pulses with Triki-Biswas equation by  $\exp(-\Phi(\xi))$ -expansion method and the first integral method, *Optik*, 2019. V. 179. P. 518–525.

9. Zayed E., Alngar M. Application of newly proposed sub-ODE method to locate chirped optical solitons to Triki-Biswas equation, *Optik*, 2020. V. 207. Art. № 164360.

10. Kudryashov N.A., Lavrova S.F. Dynamical properties of the periodically perturbed Triki-Biswas equation, *Optik*, 2022. V. 253. Art. № 168553.

11. Biswas A. 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan, Kundu, Lakshmanan equation, *Physics Letters A*, 2009. V. 373 (30). P. 2546–2548.

12. Biswas A. Optical soliton perturbation with Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation by traveling wave hypothesis, *Optik*, 2018. V. 171. P. 217–220.

13. *Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., Alshomrani A.* Optical solitons with Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan equation by extended trial function scheme, *Optik*, 2018. V. 160. P. 415–427.
14. *Biswas A., Arshed S.* Optical solitons in presence of higher order dispersions and absence of self-phase modulation, *Optik*, 2018. V. 174. P. 452–459.
15. *Kudryashov N.A.* Periodic and solitary waves of the Biswas-Arshed equation, *Optik*, 2020. V. 200. Art. № 163442.
16. *Kutukov A., Kudryashov N., Prikazchikova A.* Periodic and solitary wave solutions of the Biswas-Arshed equation for pulses in a birefringent fiber, *Journal of Physics: Conference Series*, 2021. V. 2036. Art. № 012027.
17. *Lenells J., Fokas A.* An integrable generalization of the nonlinear Schrödinger equation on the half-line and solitons, *Inverse Problems*, 2009. V. 25 (11). Art. № 115006.
18. *Kudryashov N.A.* First integrals and general solution of the Fokas-Lenells equation, *Optik*, 2019. V. 195.
19. *Kaup D., Newell A.* An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation, *Journal of Mathematical Physics*, 1977. V. 19 (4). P. 798–801.
20. *Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.* Table of Integrals, Series, and Products: Eighth Edition, Elsevier, 2014.
21. *Kudryashov N.* Implicit solitary waves for one of the generalized nonlinear Schrödinger equations, *Mathematics*, 2021. V. 9 (23). Art. № 3024.