

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В СРЕДЕ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ БЕЗ УЧЕТА СТОЛКНОВЕНИЙ

© 2019 г. В. В. Аверина^{*,*}, Н. А. Кудряшов^{*,**}

^a Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ",
Москва, 115409, Россия

^{*e-mail:} lera_averina@mail.ru

^{**e-mail:} nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию 11.03.2019 г.

После доработки 14.03.2019 г.

Принята к публикации 26.03.2019 г.

Рассматривается модель Ферми–Паста–Улама с учетом взаимодействия между частицами, которое выражается потенциалом четвертой и пятой степени. Выполнен предельный переход при стремлении расстояния между частицами к нулю, а числа частиц к бесконечности. Показано, что вместо известного уравнения Кортевега–де Вриза при учете квадратичного взаимодействия между частицами получается нелинейное уравнение в частных производных шестого порядка. Выведено эволюционное уравнение пятого порядка. Исследованы аналитические свойства полученных уравнений пятого и шестого порядков. Показано, что общее решение дифференциального уравнения пятого порядка, полученного при переходе к переменным бегущей волны, при разложении в ряд Лорана имеет четыре ветви. На втором шаге теста Пенлеве найдены индексы Фукса, два из которых являются комплексными числами. Установлено, что в общем случае уравнение не проходит тест Пенлеве, что соответствует тому, что задача Коши для полученного уравнения не решается методом обратной задачи рассеяния. С помощью метода простейших уравнений получены некоторые точные решения эволюционного уравнения пятого порядка. Построены графики точных решений в случае потенциалов взаимодействия между частицами четвертой и пятой степени.

Ключевые слова: модель Ферми–Паста–Улама, нелинейные волны, непрерывный предел, тест Пенлеве

DOI: 10.1134/S2304487X19030040

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель Ферми–Паста–Улама представляет собой математическую модель распространения возмущений в цепочке точечных масс, взаимодействующих по нелинейному закону [1]. Она была предложена в 1952 году в Лос-Аламосе. Целью работы Ферми, Паста и Улама было решить нелинейную задачу на ЭВМ [2]. Задача состояла в том, чтобы рассчитать колебания 64-х частиц одинаковой массы, связанных друг с другом пружинками. При отклонении частицы от положения равновесия на Δl , появлялась возвращающая сила $k\Delta l + \alpha(\Delta l)^2$. Здесь k и α – постоянные коэффициенты. Нелинейная добавка предполагалась малой по сравнению с основной силой $k\Delta l$. Ферми, Паста и Улам задали начальное отклонение цепочки частиц от положения равновесия и наблюдали распространение возмущения в цепочке во времени. Их эксперимент стал особенно интересен, когда они получили, что спустя некоторое

время возмущение в цепочке частиц возвращается к начальному состоянию. Это явление получило название парадокса Ферми–Паста–Улама.

Результаты вычислительного эксперимента стали известны Мартину Крускалу и Норману Забуски. В своей работе [3] они впервые установили, что модель, используемая Ферми, Пастой и Уламом, при предельном переходе к нулю расстояния между частицами и стремлении их количества к бесконечности, переходит в уравнение Кортевега–де Вриза. Это уравнение было получено в 1895 г. для описания волн на воде. Используя численное моделирование, Забуски и Крускал объяснили парадокс ФПУ (повтор начальных возмущений), используя концепцию солитонов.

Модель ФПУ представляет собой цепочку одинаковых масс, соединенных пружинами [4] (рис. 1).

Движение i -й массы в цепочке зависит от сил, действующих со стороны соседних масс, и внеш-

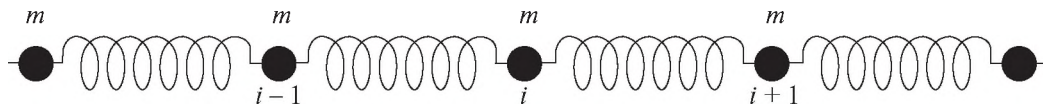


Рис. 1. Модель Ферми, Паста и Улама.

них сил. Второй закон Ньютона для i -й частицы имеет вид

$$m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = F_{i,i+1} - F_{i-1,i} + f_i, \quad (1)$$

где $F_{i,i+1}$ — потенциал взаимодействия между частицами, а f_i — внешнее поле.

В работе [5] было получено эволюционное нелинейное дифференциальное уравнение 5-го порядка, описывающее модель ФПУ. Проведен тест полученного уравнения на свойство Пенлеве и найдены некоторые точные решения. В работах [6, 7] была рассмотрена $\alpha + \beta$ модель ФПУ, т.е. модель распространения возмущений в цепочке масс, потенциал которой имеет вид [8]

$$F_{i,i+1} = \gamma(x_{i+1} - x_i) + \alpha(x_{i+1} - x_i)^2 - \beta(x_{i+1} - x_i)^3. \quad (2)$$

В работах [6, 7] было получено нелинейное дифференциальное уравнение 6-го порядка, соответствующее модели ФПУ.

В работе [9] получены уравнения пятого и седьмого порядка, которые выведены из цепочки Ферми–Паста–Улама. Для анализа аналитических свойств уравнений пятого и седьмого порядка использован тест Пенлеве. Показано, что нелинейные эволюционные уравнения пятого и седьмого порядка не проходят тест на свойство Пенлеве. Однако локальные разложения общих решений существуют. Для этих уравнений получены аналитические решения в виде уединенных волн и кинков. Приведены результаты численного моделирования волновых процессов, описываемых нелинейными уравнениями высокого порядка.

В данной работе сделана попытка учесть потенциал взаимодействия более высокой степени. Ниже учитываются потенциалы 4-й и 5-й степени и выведены дифференциальные уравнения, описывающие модель при таком взаимодействии частиц. Исследованы аналитические свойства полученных нелинейных дифференциальных уравнений 6-го порядка.

2. ВЫВОД НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ МОДЕЛЬ ФПУ С ПОТЕНЦИАЛОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ 4-Й И 5-Й СТЕПЕНИ

Рассмотрим потенциал взаимодействия между частицами в модели ФПУ, зависящий от расстояния между частицами 4-й степени. Предположим, что квадратичная и кубическая составляющие в потенциале отсутствуют и взаимодействие между частицами описывается формулой

$$F_{i+1,i} = \gamma(x_{i+1} - x_i) + Q(x_{i+1} - x_i)^4 \quad (3)$$

Тогда модель ФПУ будет описываться системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \gamma(x_{i+1} - x_i) + Q(x_{i+1} - x_i)^4 - \\ &\quad - \gamma(x_i - x_{i-1}) - Q(x_i - x_{i-1})^4 = \\ &= (x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1})(\gamma + Q(x_{i+1}^3 - x_{i-1}^3 + 2x_{i+1}x_i^2 - \\ &\quad - 2x_{i+1}^2x_i + 2x_ix_{i-1}^2 - 2x_i^2x_{i-1} + \\ &\quad + x_{i+1}x_{i-1}^2 - x_{i+1}^2x_{i-1})), \\ &\quad i = 1 \dots N, \end{aligned} \quad (4)$$

где x_i — смещение i -й частицы от положения равновесия, m — масса частицы. Используем переход к непрерывному пределу в модели ФПУ. Для этого разложим отклонение x_{i+1} в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x \pm hx_\xi + \frac{h^2}{2} x_{\xi\xi} \pm \frac{h^3}{6} x_{\xi\xi\xi} + \\ &+ \frac{x^4}{24} x_{\xi\xi\xi\xi} \pm \frac{h^5}{120} x_{\xi\xi\xi\xi\xi} + \frac{h^6}{720} x_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi} + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя разложение (5) в систему (4) и учитывая слагаемые с точностью до h^6 , получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{\gamma h^2}{m} x_{\xi\xi} + \frac{\gamma h^4}{12m} x_{\xi\xi\xi\xi} + \\ &+ \frac{4Qh^5}{m} x_{\xi\xi}(x_\xi)^3 + \frac{\gamma h^6}{360m} x_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi}, \end{aligned} \quad (6)$$

После введения параметра

$$c^2 = \frac{\gamma h^2}{m}, \quad (7)$$

уравнение (8) принимает вид:

$$x_{\tau\tau} = c^2 x_{\xi\xi} + \frac{mc^4}{12\gamma} x_{\xi\xi\xi\xi} + \frac{4Qc^5 m\sqrt{m}}{\gamma^2 \sqrt{\gamma}} x_{\xi\xi} (x_{\xi})^3 + \frac{m^2 c^6}{360\gamma^2} x_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi}, \quad (8)$$

Используя

$$\tau = ct, \quad (9)$$

разделив уравнение на c^2 после введения параметра $\delta^2 = \frac{mc^2}{12\gamma}$, запишем уравнение в виде

$$x_{tt} = x_{\xi\xi} + \delta^2 x_{\xi\xi\xi\xi} + \frac{4Qc^3 m\sqrt{m}}{\gamma^2 \sqrt{\gamma}} x_{\xi\xi} (x_{\xi})^3 + \frac{5}{2} \delta^4 x_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi}. \quad (10)$$

Используя также замену

$$x = \left(\frac{\gamma^2 \sqrt{\gamma}}{4Qc^3 m\sqrt{m}} \right)^{\frac{1}{3}} x', \quad (11)$$

приводим уравнение к виду

$$x_{tt} = x_{\xi\xi} + \delta^2 x_{\xi\xi\xi\xi} + x_{\xi\xi} (x_{\xi})^3 + \frac{5}{2} \delta^4 x_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi}. \quad (12)$$

Таким образом, получено дифференциальное уравнение 6-го порядка, описывающее нелинейные волны в цепочке масс.

Решение уравнения (12) может быть представлено в виде двух волн, бегущих в противоположных направлениях. Удобно изучать одну из этих волн, для этого решение будем искать в виде:

$$x(\xi, \tau) = f(z, T) + \varepsilon x_1(\xi, \tau), \quad (13)$$

$$z = \xi - \tau, \quad T = \varepsilon \tau,$$

где $f(z, T)$ соответствует профилю волны на больших расстояниях. Подставляя (13) в уравнение (12) и опуская члены более высокого порядка по ε , получим уравнение для $f(z, T)$ в виде

$$2f_{zT} + \delta^2 f_{zzzz} + f_{zz} (f_z)^3 + \frac{5}{2} \delta^4 f_{zzzzzz} = 0, \quad (14)$$

которое с помощью замены

$$u(z, T) = f_z(z, T) \quad (15)$$

приводится к эволюционному уравнению:

$$2u_T + \delta u_{zzz} + u_z (u)^3 + \frac{2}{5} \delta^4 u_{zzzzz} = 0. \quad (16)$$

Используя преобразование растяжения

$$T = \frac{t}{2}, \quad x = z, \quad (17)$$

уравнение (16) можно представить в виде

$$u_t + u_x u^3 + \delta^2 u_{xxx} + \frac{2}{5} \delta^4 u_{xxxxx} = 0. \quad (18)$$

Если в полученном уравнении оставить члены с точностью до h^5 , то получим

$$u_t + u_x u^3 + \delta^2 u_{xxx} = 0. \quad (19)$$

Аналогично рассмотрим модель ФПУ с потенциалом

$$F_{i+1,i} = \gamma(x_{i+1} - x_i) + \theta(x_{i+1} - x_i)^5. \quad (20)$$

С помощью преобразований, аналогичных представленным выше, сохраняя члены с точностью до h^6 , получим уравнения вида

$$y_{\tau\tau} = y_{\xi\xi} + y_{\xi\xi} y_{\xi}^4 + \delta^2 y_{\xi\xi\xi\xi} + \frac{2}{5} \delta^4 y_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi}, \quad (21)$$

$$u_t + u_x u^4 + \delta^2 u_{xxx} + \frac{2}{5} \delta^4 u_{xxxxx} = 0. \quad (22)$$

Полученные выше эволюционные дифференциальные уравнения 5-го порядка (18) и (22) являются частными случаями обобщенного уравнения Кавахары [10]:

$$u_t + a u_x u^n + b u_{xxx} - c u_{xxxxx} = 0, \quad a \neq 0, \quad c \neq 0. \quad (23)$$

В случае $n = 1$, имеем известное уравнение Кавахары [11].

3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 5-ГО ПОРЯДКА

Проведем исследование уравнений (18) и (22) на тест Пенлеве. Для этого используем переменные бегущей волны

$$u(x, t) = w(x - C_0 t) = w(z), \quad (24)$$

тогда уравнение (18) примет вид

$$\frac{2}{5} \delta^4 w_{zzzzz} + \delta^2 w_{zzz} + w^3 w_z - C_0 w_z = 0. \quad (25)$$

Проинтегрируем один раз уравнение (25) по z

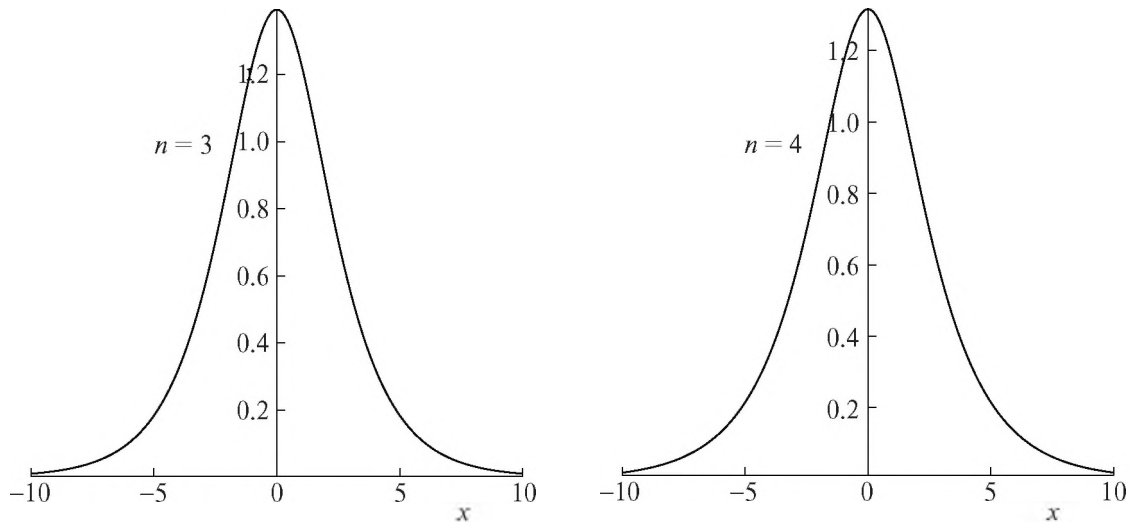
$$\frac{2}{5} \delta^4 w_{zzzz} + \delta^2 w_{zz} + \frac{1}{4} w^4 - C_0 w + C_1 = 0. \quad (26)$$

Умножим уравнение (26) на w_z и снова проинтегрируем по z , тогда имеем

$$\frac{2}{5} \delta^4 \left(w_{zzz} w_z - \frac{1}{2} w_{zz}^2 \right) + \frac{\delta^2}{2} w_z^2 + \frac{1}{20} w^5 - \frac{C_0}{2} w^2 + C_1 w + C_2 = 0. \quad (27)$$

Аналогичным образом уравнение (22) примет вид

$$\frac{2}{5} \delta^4 \left(w_{zzz} w_z - \frac{1}{2} w_{zz}^2 \right) + \frac{\delta^2}{2} w_z^2 + \frac{1}{30} w^6 - \frac{C_0}{2} w^2 + C_1 w + C_2 = 0. \quad (28)$$


 Рис. 2. График решения (38) при $n = 3$ и $n = 4$.

Таким образом, понизили порядок дифференциальных уравнений с 5-го до 3-го, что упрощает их исследование.

Анализ уравнения на свойство Пенлеве проводится в три шага. На первом шаге определяется порядок полюса и первый член разложения решения уравнения в ряд Лорана. Для этого используется уравнение, составленное из ведущих членов. Для уравнения (27) оно имеет вид

$$\frac{2}{5}\delta^4 \left(w_{zzz}w_z - \frac{1}{2}w_{zz}^2 \right) + \frac{1}{20}w^5 = 0. \quad (29)$$

Подставляя в уравнение (29)

$$w = \frac{a_0}{z^p}, \quad (30)$$

найдем, что решение уравнения (27) имеет полюс нецелого порядка $p = \frac{4}{3}$. Сделав в уравнении (29)

замену $w(z) = v(z)^{\frac{4}{3}}$ и умножив его на $v(z)^{\frac{1}{3}}$, получим уравнение

$$\frac{16}{9}\delta^4 \left(\frac{4}{15}v_z^2v_{zz} + \frac{2}{5}vv_zv_{zzz} - \frac{1}{9}\frac{v_z^4}{v} - \frac{1}{5}vv_z^2 \right) + \frac{1}{20}v^7 = 0, \quad (31)$$

решение которого в свою очередь имеет полюс целого порядка $p = 1$. Подставляя в уравнение (31)

$v = \frac{a_0}{z^p}$, найдем a_0 :

$$a_{0_{1,2,3,4}} = \pm \left(\frac{1}{3}364^{1/4}\sqrt{2}(1 \pm i) \right) \delta. \quad (32)$$

Таким образом, решение уравнения (31) имеет 4 ветви.

На втором шаге находятся индексы Фукса, которые в случае интегрируемости соответствуют номерам произвольных коэффициентов при разложении решения в ряд Лорана. Для определения индексов Фукса в уравнение (31) подставляем выражение $v = \pm a_0(z - z_0)^2 + \beta(z - z_0)^{r-1}$, где a_0 определяется формулой (32). Индексы Фукса находятся путем приравнивания слагаемого, линейного по β , к нулю и решения полученного алгебраического уравнения относительно r . Выражения для индексов Фукса уравнения (31) имеют громоздкий вид, однако два из трех индексов являются комплексными. Таким образом, уравнение (31) не проходит тест Пенлеве и задача Коши для него не может быть решена методом обратной задачи рассеяния.

Для (28) уравнение из ведущих членов имеет вид

$$\frac{2}{5}\delta^4 \left(w_{zzz}w_z - \frac{1}{2}w_{zz}^2 \right) + \frac{1}{30}w^6 = 0. \quad (33)$$

Решение (28) имеет полюс первого порядка ($p = 1$) и 4 ветви

$$a_{0_{1,2,3,4}} = \pm (3^{1/4}\sqrt{2}(1 \pm i))\delta. \quad (34)$$

Индексы Фукса для каждой ветви принимают следующие значения

$$j_1 = -1, \quad j_{2,3} = \frac{5 \pm i\sqrt{39}}{2}. \quad (35)$$

Два из трех индексов Фукса являются комплексными числами. Поэтому уравнение (28) также не проходит тест на свойство Пенлеве, и за-

дача Коши для этого уравнения не может быть решена методом обратной задачи рассеяния.

4. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ПОЛУЧЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 5-ГО ПОРЯДКА

Полученные дифференциальные уравнения (18) и (22), описывающие модель ФПУ с потенциалами взаимодействия между частицами соответственно (3) и (20), не проходят тест на свойство Пенлеве, а значит, не могут быть решены методом обратной задачи рассеяния. Однако некоторые точные решения этих уравнений находятся.

Рассмотрим общий вид уравнений (18) и (22) в переменных бегущей волны:

$$\frac{2}{5}\delta^4 w_{zzzzz} + \delta^2 w_{zzz} + w^n w_z - C_0 w_z = 0, \quad n = 3, 4. \quad (36)$$

Сделав замену $z = \frac{z'}{\delta}$, опустив штрихи и умножив уравнение (36) на δ , получим

$$\mu w_{zzzzz} + w_{zzz} + w^n w_z - C_0 w_z = 0, \quad n = 3, 4, \quad (37)$$

где $\mu = \frac{2}{5}$.

Для уравнения (37) в работе [12] были найдены точные решения в виде

$$w(z) = A \operatorname{sech}(Bz)^{\frac{4}{n}}, \quad (38)$$

где

$$A = \left(\frac{(n+1)(n+4)(3n+4)C_0}{8(n+2)} \right)^{1/n},$$

$$B = \frac{n\sqrt{(n^2+4n+8)C_0}}{4(n+2)}, \quad (39)$$

$$C_0 = \frac{1}{\mu} \left(\frac{2(n+2)}{n^2+4n+8} \right)^2.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе выведены нелинейные дифференциальные уравнения 6-го порядка, описывающие модель Ферми–Паста–Улама с потенциалами взаимодействия частиц 4-й и 5-й степени. Уравнения приведены к эволюционным дифференциальным уравнениям 5-го порядка и имеют вид обобщенного уравнения Кавахары. Исследованы аналитические свойства уравнений и показано, что оба уравнения не обладают свойством Пенлеве, однако допускают существование некоторых аналитических решений. Получены точные решения уравнений в виде уединенной волны.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00209).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fermi E., Pasta J., Ulam S.* Studies of nonlinear problems // Los Alamos Report – LA-1940; 1955. P. 978–988.
2. *Ford J.* Equipartition of energy for nonlinear systems // J. Math. Phys. 1961. V. 2. № 3. P. 387–393.
3. *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15. № 6. P. 240.
4. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики // Изд. дом “Интеллект”. 2010. 368 с.
5. *Kudryashov N.A.* Refinement of the Korteweg-de Vries equation from the Fermi-Pasta-Ulam model // Phys. Lett. A. 2015. V. 379. P. 2610–2614.
6. *Волков А.К., Кудряшов Н.А.* Уравнение высокого порядка для описания $\alpha + \beta$ модели Ферми–Паста–Улама // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2016. Т. 5. № 4. С. 308–320.
7. *Kudryashov N.A., Volkov A.K.* The fifth-order partial differential equation for the description of the $\alpha + \beta$ Fermi-Pasta-Ulam model // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. 2017. V. 42. P. 491–501.
8. *Kudryashov N.A.* Analytical properties of nonlinear dislocation equation // Applied Mathematics Letters. 2017. V. 69. P. 29–34.
9. *Кудряшов Н.А.* Модель Ферми–Паста–Улама и нелинейные эволюционные уравнения // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2016. Т. 5. № 1. С. 3–22.
10. *Demina M.V., Kudryashov N.A.* From Laurent series to exact meromorphic solutions: The Kawahara equation // Physics Letters A. 2010. V. 374. P. 4023–4029.
11. *Takuiji Kawahara.* Formation of Saturated Solitons in a Nonlinear Dispersive System with Instability and Dissipation // Physical review letters. 1983. V. 51. № 5. P. 381–383.
12. *Dey B., Khare Avinash, Nagaraja C. Kumar.* Stationary solitons of the fifth order KdV-type. Equations and their stabilization // Physics Letters A. 1996. V. 223. P. 449–452.

Nonlinear Wave Processes in a Medium of Interacting Particles without Collisions

V. V. Averina^{a,#} and N. A. Kudryashov^{a,##}

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: lera_averina@mail.ru

^{##}e-mail: nakudr@gmail.com

Received March 11, 2019; revised March 14, 2019; accepted March 26, 2019

Abstract—The Fermi–Pasta–Ulam model including the fourth and fifth terms in the potential of interaction between neighboring particles has been considered. A passage to a continuum limit has been performed when the distance between the particles approaches zero and the number of particles tends to infinity. It has been shown that, a nonlinear partial differential equation of the sixth order is obtained instead of the well-known Korteweg–de Vries equation taking into account the quadratic interaction between particles. The fifth-order evolution partial differential equation has been obtained. The analytical properties of the resulting equations have been investigated. It has been shown that the general solution of the fifth-order differential equation obtained during the passage to traveling wave variables has four branches in the expansion into a Laurent series. In the second step of the Painlevé test, Fuchs indices two of which are complex have been found. It has been shown that the fifth-order nonlinear partial differential equations found from the Fermi–Pasta–Ulam model do not pass the Painlevé test. The exact solutions of the fifth-order evolution equations have been obtained using the simplest equation method. The chart of the solutions has been constructed.

Keywords: Fermi–Pasta–Ulam model, nonlinear wave processes, continuum limit, Painlevé analysis

DOI: 10.1134/S2304487X19030040

REFERENCES

1. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of nonlinear problems // Los Alamos Report – LA-1940; 1955. p. 978–988.
2. Ford J. Equipartition of energy for nonlinear systems // J. Math. Phys., 1961, vol. 2, no. 3, pp. 387–393.
3. Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965, vol. 15, no. 6, p. 240.
4. Kudryashov N.A. Methods of nonlinear mathematical physics // Izdatel'skiy dom "Intellekt", 2010. 368 pp. (in Russian).
5. Kudryashov N.A. Refinement of the Korteweg–de Vries equation from the Fermi–Pasta–Ulam model // Phys. Lett. A. 2015. V. 379. P. 2610–2614.
6. Volkov A.K., Kudryashov N.A. High-Order Equation for the Description of the $\alpha + \beta$ Fermi–Pasta–Ulam Model // Vestnik Nacional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2016, vol. 5, no. 4, pp. 308–320.
7. Kudryashov N.A., Volkov A.K. The fifth-order partial differential equation for the description of the $\alpha + \beta$ Fermi–Pasta–Ulam model // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. 2017. V. 42. P. 491–501.
8. Kudryashov N.A. Analytical properties of nonlinear dislocation equation // Applied Mathematics Letters. 2017. V. 69. P. 29–34.
9. Kudryashov N.A. Fermi–Pasta–Ulam Model and Higher-Order Nonlinear Evolution Equations // Vestnik Nacional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2016, vol. 5, no. 1, p. 3–22.
10. Demina M.V., Kudryashov N.A. From Laurent series to exact meromorphic solutions: The Kawahara equation // Physics Letters A. 374 (2010) 4023–4029.
11. Takuji Kawahara. Formation of Saturated Solitons in a Nonlinear Dispersive System with Instability and Dispersion // Physical review letters. 1983, vol. 51, no. 5. p. 381–383.
12. B. Dey, Avinash Khare, C. Nagaraja Kumar. Stationary solitons of the fifth order KdV-type. Equations and their stabilization // Physics Letters A. 223 (1996). P. 449–452.