ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2022, т. 11, № 5, с. 329–342

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 536.2.083

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕНЗОРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Н.О. Борщев

Астрокосмический центр Федерального государственного учреждения науки институт им. С.А. Лебедева, Москва, 119991, Россия

**e-mail: moriarty93@mail.ru*

Поступила в редакцию: 4.12.2022

После доработки: 11.12.2022

Принята к публикации: 13.12.2022

При проектировании теплового режима композиционных конструкций и конструкций для которых характерен смешанный вид теплообмена из-за его сложной физико-химической и геометрической структуры, зачастую необходимо знать именно его эффективные теплофизические характеристики. В данной работе предлагается метод восстановления эффективного тензора теплопроводности как функции от температуры на основе минимизации среднеквадратичной ошибки между теоретическим и экспериментальным полем температур в местах установки датчиков температур. Данная методика апробирована на шпангоуте спускаемого космического аппарата «Орел». Поскольку данные задачи считаются некорректными, то необходимо применить регуляризацию, смягчающую погрешность входных зашумленных данных. В качестве метода минимизации выбран алгоритм сопряженных градиентов, как наиболее точный метод первого порядка сходимости.

Ключевые слова: обратная задача теплопроводности, коэффициент теплопроводности, базисная функция, регуляризация А.Н. Тихонова.

DOI: 10.26583/vestnik.2022.242

ВВЕДЕНИЕ

При определении теплофизических параметров объекта необходимо иметь представления о его начально-граничных условиях, характерных в ходе проведения экспериментальной тепловой отработки. Вид объекта испытаний представлен на рис. 1.

При спуске в плотных слоях атмосферы Земли на шпангоут воздействует аэродинамический тепловой поток (приходящие стрелки). Одновременно происходит излучение тепловой энергии (уходящие стрелки) в атмосферу.

По торцу стыковочного агрегата (см. рис. 1) расположен шпангоут шириной 200 мм. На корабль и стыковочный агрегат нанесено теплоизолирующее покрытие для предотвращения перегрева при прохождении плотных слоев атмосферы. На переднюю часть шпангоута теплоизоляция не наносится, так как этой частью шпангоута стыковочного агрегата транспортный корабль сопрягается при стыковке со станцией.

При спуске корабля в плотных слоях атмосферы на него воздействует аэродинамический тепловой поток, достигающий 70 кВт/м^2. Под воздействием теплового потока температурное поле шпангоута изменяется в широком диапазоне, что может приводить к значительной его деформации.

При проведении термосиловых испытаний на передний торец шпангоута симметрично установлены 12 термопар. По данным термопар идентифицируется его тепловая математическая модель шпангоута для нахождения ориентации главных осей теплопроводности относительно выбранной системы координат (см. рис. 1).

Для идентификации теплофизических характеристик первоочередной задачей является составление тепловой физико-математической модели, по которой будет происходить восстановление целевых характеристик [1–4].

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\lambda_{\theta\theta}(\mathrm{T})\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\lambda_{\theta z}(T)\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial z}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{\theta z}(T)\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{zz}(T)\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial z}\right)=C(T)\rho\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial\tau};\;\; z\in[0;l_z],\;\theta\in[0;\pi],\;\;\tau>0.$$

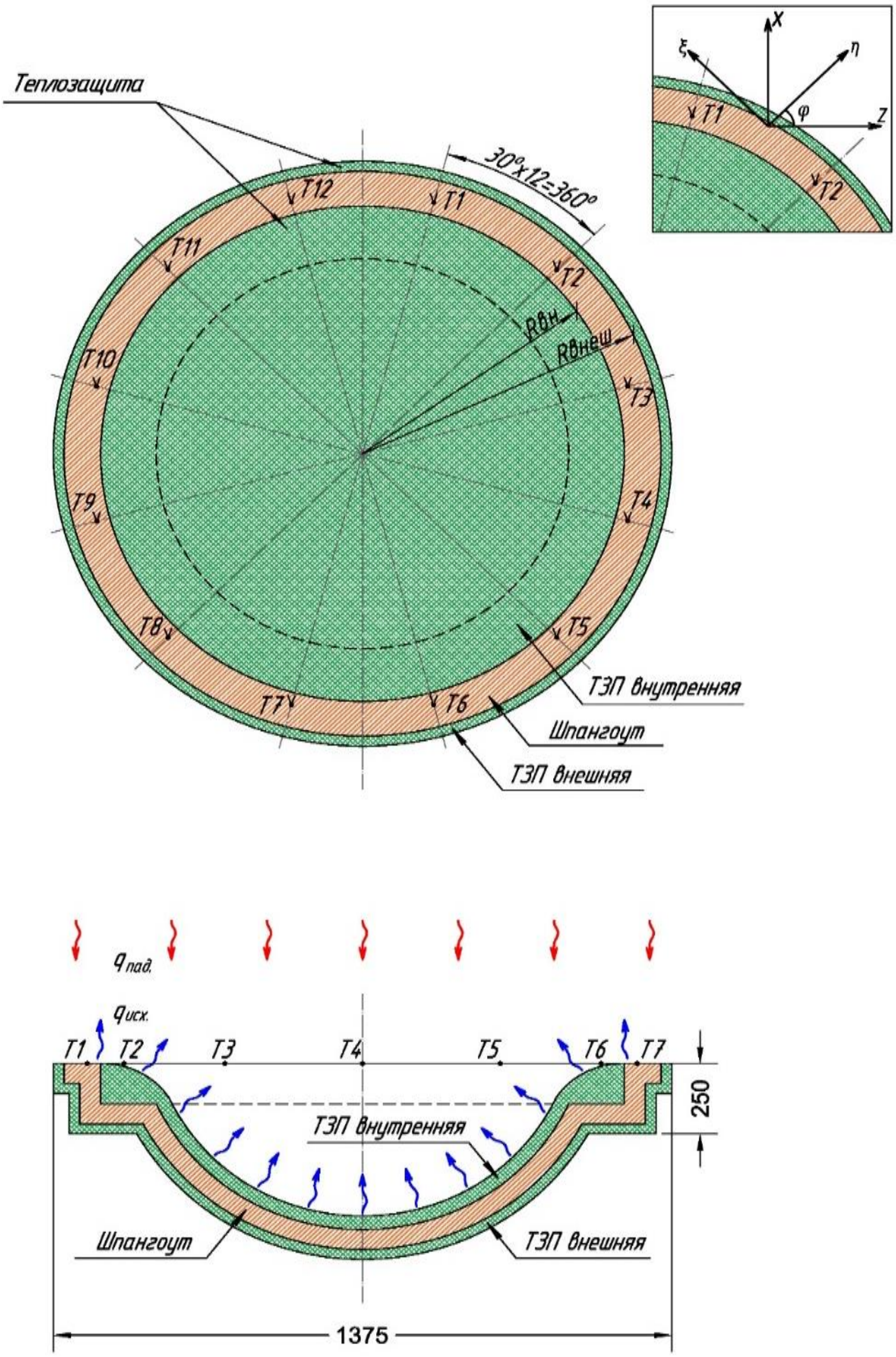

Рис. 1. Расчетная схема АСА в одной плоскости симметрии

Граничные условия будут иметь следующий вид:

$$-\left[\lambda_{\theta z}(T)\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial z}+\frac{\lambda_{\theta\theta}(T)}{r}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}\right]=0, z\in[0;l_z], \theta=0, \tau>0;$$

$$\left[\lambda_{\theta z}(T)\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial z}+\frac{\lambda_{\theta\theta}(T)}{r}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}\right]=0, z\in[0;l_z], \theta=0, \tau>0;$$

$$\left[\lambda_{\theta z}(T)\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial r}+\frac{\lambda_{\theta\theta}(T)}{r}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}\right]=0, z\in[0;l_z], \theta=\pi, \tau>0;$$

$$-\left[\lambda_{\theta z}(T)\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial r}+\frac{\lambda_{\theta\theta}(T)}{r}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}\right]=0, z\in[0;l_z], \theta=\pi, \tau>0.$$

Расчетные формулы по определению эффективного теплового потока имеют вид [5, 7]:

$$q^{рез}(T^4)=\sum_{i=1}^{N}q_{м}^{эф}-\varepsilon_{м}\sigma T(M,\tau)^4,$$

где эффективный тепловой поток определяется выражением:

$$q_{м}^{эф}=\sum_{j=1}^{N}q_j^{изл}+\frac{(1-\varepsilon_j)}{F_j}\int_{F_j}q_j(M,\tau)\varphi_{м\to j}dF_j.$$

Угловой коэффициент переизлучения или ядро интегрального уравнения определяется выражением:

$$\varphi_{м\to j}=\frac{\cos\theta_{м}\cos\theta_j}{\pi l^2},$$

где $\theta_{м}$ – угол между нормалью к рассматриваемой площадке конструкции и направлением на ИК-имитатор; θ_j – угол между нормалью к рассматриваемой площадкой конструкции и направлением на ОИ; N – количество ИК-имитаторов; $\varepsilon_{м}$ – интегральная степень черноты поверхности материала -й поверхности; T – средняя температура i-й поверхности.

Тепловой конвективный поток определяется следующими зависимостями:

$$q_{i,j}^{к}=\alpha_{к}(T)(T(r,\theta,\tau)-T_{c}),$$

где $\alpha_{к}(T)$ – коэффициент теплоотдачи нагреваемого объекта в окружающую среду. Вычисляется этот коэффициент из решения критериального уравнения вида:

$$\alpha_{к}(T)=Nu_l(T)\frac{\lambda_{в}(T_c)}{l_{эф}},$$

где $\lambda_{в}$ – коэффициент теплопроводности воздуха, $\frac{Вт}{мК}$; $l_{эф}$ – характерный размер (размер, вдоль которого движется тепловой конвективный поток), м; T_{c} – температура окружающей среды, К; $Nu_l(T)$ – критерий Нуссельта.

Рассмотрим задачу восстановления функций: $\lambda_{zz}(T),\lambda_{\theta z}(T),\lambda_{zz}(T)$ на основании информации о мгновенных значениях температур в определенных точках замеров тепловых потенциалов цилиндрической области.

Подлежащие определению искомые теплофизические функции $\lambda_{zz}(T),\lambda_{\theta z}(T),\lambda_{\theta\theta}(T)$ будем искать в следующем виде:

$$\lambda_{\theta\theta}(T)\approx\sum_{m=1}^{M}\lambda_m^{\theta\theta}N_m(T),$$

$$\lambda_{\theta z}(T)\approx\sum_{m=1}^{M}\lambda_m^{\theta z}N_m(T),$$

$$\lambda_{zz}(T)\approx\sum_{m=1}^{M}\lambda_m^{zz}N_m(T).$$

Для аппроксимации компонент вектора теплопроводности воспользуемся линейно-непрерывными базисными функциями:

$$N_m^{\lambda}(T)=\begin{cases}0, T<T_{m-1}\\ \dfrac{T-T_{m-1}}{T_m-T_{m-1}}, T_{m-1}\le T\le T_m,\\ \dfrac{T_{m+1}-T}{T_{m+1}-T_m}, T_{m-1}\le T\le T_m,\\ 0, T>T_m, m=\overline{1,M}.\end{cases}$$

Рассмотрим общий подход к построению устойчивых вычислительных алгоритмов решения некорректных задач, предложенный А.Н. Тихоновым [7, 8]. Метод основан на переходе от исходного уравнения первого рода к задаче минимизации целевого функционала невязки между теоретическими величинами и экспериментальными с дополнительным стабилизирующем слагаемым:

$$S(\lambda_p)=\frac{1}{2}\int_0^{\tau_{\max}}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}([T(\lambda_p^{(n)},z_j,\theta_k,\tau)-\tilde{T}]^2)\,d\tau,$$

$$p=\theta\theta, z\theta, zz.$$

Приближенное решение исходной задачи есть экстремаль этого функционала:

$$S(\lambda_p)=\min S(T);$$

где γ – параметр регуляризации, величина которого согласуется с погрешностью задания входных данных, а именно погрешность замеров температур в местах установки термопар.

Функционал имеет вид

$$S(\lambda_p)=\frac{1}{2}\int_0^{\tau_{\max}}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}([T(\lambda_p^{(n)},z_j,\theta_k,\tau)-\tilde{T}]^2+$$

$$+\frac{1}{2}\gamma(\delta)\|\lambda_p\|^2)d\tau;$$

где норма вычисляется из стабилизирующего функционала первого порядка:

$$\left\|\lambda_p\right\|^2 = \int\limits_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\left[|\lambda(S)|^2 + \left|\frac{\partial\lambda(S)^2}{\partial S}\right|\right] d\tau,$$

$$p = \theta\theta,\ z\theta,\ zz,$$

где

$$|\lambda(S)| = \lambda_{\theta\theta}(T)^2 + \lambda_{z\theta}(T)^2 + \lambda_{zz}(T)^2;$$

$$\frac{\partial\lambda(S)}{\partial S} = \frac{\lambda^{n+1} - \lambda^{(n)}}{S^{n+1} - S^{(n)}}.$$

Это позволяет гарантировать сходимость приближенных решений к точному в выбранной метрике пространства, а, следовательно, и равномерную сходимость.

В работе используется метод безусловной минимизации функционала $S(\lambda_p)$ с помощью градиентного метода сопряженных направлений, как наиболее точного метода первого порядка точности, позволяющего достичь требуемой сходимости за минимальное число итераций.

Последовательный алгоритм метода сопряженных градиентов можно представить в следующем виде:

$$\vec{\lambda}^{n+1} = \vec{\lambda}^{n} + \Delta\vec{\lambda}^{n+1},$$

где

$$\Delta\vec{\lambda}^{n+1} = -\beta_k p^{(n)}.$$

Направление спуска определяется из:

$$\vec{p}^{n} = \operatorname{grad} S\left(\vec{\lambda}^{n}\right) + \beta_n \vec{\mathrm{p}}^{n-1};$$

$$\beta_0 = 0, p^{(0)} = \operatorname{grad} S\left(\lambda^{(0)}\right);$$

$$\beta_n = \frac{|\operatorname{grad} S(\lambda^{(n)})|^2}{|\operatorname{grad} S(\lambda^{(n-1)})|^2}.$$

Критерием останова итерационного процесса является выражение:

$$\left|\operatorname{grad} S\left(\lambda^{(0)}\right)\right| = \sqrt{\left\{\sum_{p=1}^{3}\left[\frac{\partial S(\lambda^{(n)})}{\partial\lambda_p}\right]^2\right\}} \le \delta_{\text{sum}}.$$

В этом случае останов итерационного процесса осуществляется при выполнении условия:

$$L^S \le \delta_{\text{sum}},$$

где δ_{sum} – погрешность входных данных, вычисленная в той же метрике, что и целевой функционал:

$$\delta_{\text{sum}} = \delta_a + \delta_f + \delta_{\text{окр}},$$

δ_f – погрешность входных температур, определяемая следующим выражением:

$$\delta_f = \int\limits_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} \delta_L(\tau)d\tau,$$

где δ_L – оценка изменения среднеквадратичного уклонения измеренных температур в точке с заданной координатой по времени t от истинного значения; δ_a –погрешности, обусловленные аппроксимацией исходной задачи конечно-разностным аналогом и соответствующей параметризацией искомых функций; $\delta_{\text{окр}}$ – погрешности округления.

Поэтому погрешностями, связанными с округлением результатов арифметических операций, обычно пренебрегают.

СОСТАВЛЕНИЕ ЦЕЛЕВОГО ФУНКЦИОНАЛА НЕВЯЗКИ

Для получения формулы градиента функционала J будем решать задачу минимизации функционала невязки как задачу на условный экстремум методом множителей Лагранжа при ограничениях, определяемых условиями постановки «прямой» задачи теплообмена [6–11].

Составим функционал L Лагранжа. При использовании метода регуляризации А.Н. Тихонова, ограничиваясь слагаемыми первого порядка точности, получаем:

$$L(\lambda_p) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\left(\left[T\left(z_j,\theta_k,\tau\right) - \tilde{T}\right]^2 + \frac{1}{2}\gamma(\delta)\left\|{\lambda_m^{\theta\theta}}^2 + {\lambda_m^{z\theta}}^2 + {\lambda_m^{\theta\theta}}^2\right\|\right)d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\left[\frac{\psi\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\lambda_{\theta\theta}(T)\frac{\partial T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial\theta}\right) + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\lambda_{\theta z}(T)\frac{\partial T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial z}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{zz}(T)\frac{\partial T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial z}\right) - C(T)\rho\frac{\partial T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial\tau}\right]d\tau.$$

СОСТАВЛЕНИЕ ВАРИАЦИИ ЦЕЛЕВОГО ФУНКЦИОНАЛА

Дадим теперь векторам значений параметров искомых функций малые возмущения, причем такие, чтобы относительные величины возмущений каждой координаты всех векторов были одинаковыми, тогда температурное поле также получит приращение некоторой величины.

Таким образом, имеем для искомых теплофизических характеристик следующие приращения.

Для первой компоненты тензора:

$$\lambda_m^{zz}(T+\Delta T)=(1+\bar{\Delta})\sum_{m=1}^{M}\left(\lambda_m^{zz}N_m(T)+\lambda_m^{zz}\frac{N_m(T)}{dT}\Delta T\right)=(1+\bar{\Delta})\left(\lambda_{zz}(T)+\frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT}\Delta T\right).$$

Для второй компоненты тензора:

$$\lambda_m^{z\theta}(T+\Delta T)=(1+\bar{\Delta})\sum_{m=1}^{M}\left(\lambda_m^{z\theta}N_m(T)+\lambda_m^{z\theta}\frac{N_m(T)}{dT}\Delta T\right)=(1+\bar{\Delta})\left(\lambda_{z\theta}(T)+\frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT}\Delta T\right).$$

Для третьей компоненты тензора:

$$\lambda_m^{\theta\theta}(T+\Delta T)=(1+\bar{\Delta})\sum_{m=1}^{M}\left(\lambda_m^{\theta\theta}N_m(T)+\lambda_m^{\theta\theta}\frac{N_m(T)}{dT}\Delta T\right)=(1+\bar{\Delta})\left(\lambda_{\theta\theta}(T)+\frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT}\Delta T\right).$$

Тогда первое и третье слагаемые в левой части уравнения теплопроводности примут следующий вид.

Первое слагаемое:

$$(1+\bar{\Delta})\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{zz}\big(T(\theta,z,\tau)+\Delta T(\theta,z,\tau)\big)\frac{\partial\big(T(\theta,z,\tau)+\Delta T(\theta,z,\tau)\big)}{\partial z}\right)=$$

$$=(1+\bar{\Delta})\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{zz}(T)\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial z}+\lambda_{zz}(T)\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial z}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{d\lambda_{rr}(T)}{dT}\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial z}\Delta T(\theta,z,\tau)+\frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial r}\Delta T(\theta,z,\tau)\right)\right]=$$

$$=(1+\bar{\Delta})\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{zz}(T)\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial z}+\lambda_{zz}(T)\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial z}+\frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial z}\Delta T(\theta,z,\tau)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial z}\Delta T(\theta,z,\tau)\right)\right];$$

Третье слагаемое:

$$(1+\bar{\Delta})\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\lambda_{\theta\theta}\big(T(\theta,z,\tau)+\Delta T(\theta,z,\tau)\big)\frac{\partial\big(T(\theta,z,\tau)+\Delta T(\theta,z,\tau)\big)}{\partial\theta}\right)=$$

$$=(1+\bar{\Delta})\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\lambda_{\theta\theta}(T)\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}+\lambda_{\theta\theta}(T)\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}+\right.$$

$$\left.+\frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT}\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}\Delta T(\theta,z,\tau)+\frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}\Delta T(\theta,z,\tau)\right]=$$

$$=(1+\bar{\Delta})\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\lambda_{\theta\theta}(T)\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial z}+\lambda_{\theta\theta}(T)\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}+\frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}\Delta T(\theta,z,\tau)\right)\right].$$

Второе слагаемое в левой части:

$$(1+\overline{\Delta})\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{z\theta}(T(\theta,z,\tau)+\Delta T)\frac{\partial\big(T(\theta,z,\tau)+\Delta T(\theta,z,\tau)\big)}{\partial\theta}\right)=$$
$$=(1+\overline{\Delta})\frac{2}{r}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{r\theta}(T)\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}+\lambda_{z\theta}(T)\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT}\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}\Delta T(\theta,z,\tau)+\frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}\Delta T(\theta,\mathrm{z},\tau)\right)\right].$$

Тогда возмущенное уравнение теплопроводности при изменении параметров на величину Δ будет иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{zz}(T)\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial \mathrm{z}}+\lambda_{zz}(\mathrm{T})\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial z}+\frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial z}\Delta T(\theta,z,\tau)\right)+$$
$$+\frac{2}{r}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{r\theta}(T)\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}+\lambda_{z\theta}(T)\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT}\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}\Delta T(\theta,z,\tau)+\frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}\Delta T(\theta,z,\tau)\right)\right]+$$
$$+\frac{2}{r}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{r\theta}(T)\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}+\lambda_{z\theta}(T)\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT}\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}\Delta T(\theta,z,\tau)+\frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}\Delta T(\theta,z,\tau)\right)\right]=\frac{C(T)}{1+\overline{\Delta}}\frac{\partial\Delta T(r,\theta,\tau)}{\partial\tau}.$$

Выражение для возмущенного теплового лучистого удельного потока примет следующий вид при допущении о незначительном вкладе диффузного переизлучения между ИК- и испытуемым объектом на температурное поле объекта: имитаторами

$$q_{\text{эф}}(T+\Delta T)=q_{\text{пад}}-\varepsilon\sigma T(\theta,z,\tau)^4-4\varepsilon\sigma T(\theta,z,\tau)^3\Delta T(\theta,z,\tau).$$

Выражение для возмущенного теплового конвективного потока примет следующий вид:

$$q^{\text{к}}(T+\Delta T)=\alpha_{\text{к}}(T+\Delta T)(T+\Delta T-T_{\text{c}})=\left(\alpha_{\text{к}}(T)+\frac{d\alpha_{\text{к}}(T)}{dT}\right)(T+\Delta T-T_{\text{c}}).$$

Выражение для производной от коэффициента теплоотдачи по температуре:

$$\frac{\partial\alpha_{\text{к}}(T)}{\partial\mathrm{C}_m}=\frac{\lambda_{\text{в}}(T_{\text{c}})}{l}\frac{\partial Nu_l(T)}{\partial\mathrm{C}_m}=\frac{\lambda_{\text{в}}(T_{\text{c}})}{l}\times$$
$$\times\begin{bmatrix}\dfrac{3}{16(Gr_lPr(T_{\text{c}}))^{\frac{3}{4}}}\left(\dfrac{2Pr(T_{\text{c}})}{5(1+2Pr(T_{\text{c}})^{\frac{1}{2}}+2Pr(T_{\text{c}}))}\right)^{\frac{1}{4}}\dfrac{\partial Gr_{\mathrm{l}}(T)}{\partial T}\ \text{при Re}<2300;\\ \dfrac{0.0425}{(Gr_{\mathrm{l}}Pr(T_{\text{c}}))^{\frac{3}{4}}}\dfrac{\partial Gr_l(T)}{\partial\mathrm{C}_m}\ \text{при Re}>2300.\end{bmatrix}.$$

Выражение для производной от критерия Грософа по компоненте тензора теплопроводности T:

$$\frac{\partial Gr_l(T)}{\partial T}=\frac{g\beta l^3}{\upsilon(T_{\text{c}})^2}.$$

Возмущенные граничные условия будут иметь вид:

$$-\left[\lambda_{\mathrm{z}\theta}(T)+\frac{d\lambda_{\mathrm{z}\theta}(T)}{dT}\Delta T(\theta,z,\tau)\frac{\partial T(\theta,z,\tau)+\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial z}+\right.$$

$$+\left(\lambda_{\theta\theta}(T)+\frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT}\Delta T(\theta,z,\tau)\right)\frac{1}{r}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)+\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}\Bigg]=0,$$

$$z\in[0;l_z],\ \theta=0,\tau>0;$$

$$\left(\lambda_{z\theta}(T)+\frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT}\Delta T\right)\frac{\partial T(\theta,z,\tau)+\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial z}+$$

$$+\left(\lambda_{\theta\theta}(T)+\frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT}\Delta T(\theta,z,\tau)\right)\frac{1}{r}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)+\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}=0,$$

$$z\in[0;l_z],\ \theta=\pi,\ \tau>0;$$

$$-\Bigg[\lambda_{zz}(T)+\frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT}\Delta T\frac{\partial T(\theta,z,\tau)+\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial z}+$$

$$+\left(\lambda_{z\theta}(T)+\frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT}\Delta T\right)\frac{\partial T(\theta,z,\tau)+\Delta T(\theta,z,\tau)}{r\,\partial\theta}\Bigg]=0,$$

$$z=0,\ \theta\in[0;\pi],\ \tau>0;$$

$$\left(\lambda_{zz}(T)+\frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT}\Delta T\right)\frac{\partial T(\theta,z,\tau)+\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial z}+$$

$$+\left(\lambda_{z\theta}(T)+\frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT}\Delta T\right)\frac{\partial T(\theta,z,\tau)+\Delta T(\theta,z,\tau)}{r\,\partial\theta}=q^{\text{эф}}(T^4)-q^{\text{к}}(T),$$

$$z=l_z,\ \ \theta\in[0;\pi],\ \ \tau>0.$$

Теперь вычтем из возмущенного уравнения теплопроводности невозмущенное, получим уравнение, определяющее поле приращения температур при возмущении параметров на величину Δ:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\lambda_{\theta\theta}(T)\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}+\frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}\Delta T(\theta,z,\tau)\right]+$$

$$+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_{z\theta}(T)\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}+\frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}\Delta T(\theta,z,\tau)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{zz}(T)\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial z}+\frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial z}\Delta T(\theta,z,\tau)\right)=C(T)\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial\tau}.$$

Выражения для потоков будут иметь следующий вид.

Для диффузного лучистого потока:

$$q_{\text{эф}}(\Delta T)=-4\varepsilon\sigma T^3\Delta T(\theta,z,\tau).$$

Для конвективного естественного потока выражение относительно возмущающей температуры при линеаризации коэффициента теплоотдачи:

$$q^{\text{к}}(\Delta T)=\alpha_{\text{к}}(T)\Delta T(\theta,z,\tau)+\frac{d\alpha_{\text{к}}(T)}{dT}\Delta T(\theta,z,\tau).$$

Граничные условия будут иметь следующий вид:

$$-\Bigg[\frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial z}\Delta T(\theta,z,\tau)+\frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT}\frac{1}{r}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}\Delta T(\theta,z,\tau)+$$

$$+\lambda_{z\theta}(T)\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial z}+\frac{\lambda_{\theta\theta}(T)}{r}\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}\Bigg]=0,$$

$$z\in[0;l_z],\ \theta=0,\ \tau>0;$$

$$\frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial z}\Delta T(\theta,z,\tau)+\frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT}\frac{1}{r}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}\Delta T(\theta,z,\tau)+$$

$$+\lambda_{z\theta}(T)\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial z}+\frac{\lambda_{\theta\theta}(T)}{r}\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial\theta}=0,$$

$$z\in[0;l_z],\ \theta=\pi,\ \tau>0;$$

$$-\left[\frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial z}\Delta T(\theta,z,\tau)+\frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{r\,\partial\theta}\Delta T(\theta,z,\tau)+\right.$$

$$\left.+\lambda_{zz}(T)\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial z}+\lambda_{z\theta}(T)\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{r\,\partial\theta}\right]=0,$$

$$z=0,\ \ \theta\in[0;\pi],\ \tau>0;$$

$$\frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial z}\Delta T(\theta,z,\tau)+\frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{r\,\partial\theta}\Delta T(\theta,z,\tau)+$$

$$+\lambda_{zz}(T)\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{\partial z}+\lambda_{z\theta}(\mathrm{T})\frac{\partial\Delta T(\theta,z,\tau)}{r\,\partial\theta}=-4\varepsilon\sigma T^3\Delta T(\theta,z,\tau)-\alpha_{\text{к}}(T)\Delta T(\theta,z,\tau)-$$

$$-\frac{d\alpha_{\text{к}}(T)}{dT}\Delta T(\theta,z,\tau),$$

$$z=l_z,\ \theta\in[0;\pi],\ \tau>0.$$

При возмущении параметров искомых функций обобщенный функционал L (функционал Лагранжа) получит вариацию

$$\Delta L=\delta L+I_1.$$

При решении методом регуляризации А.Н. Тихонова

$$\Delta L=\delta L+I_1+I_\gamma.$$

Выражение для линейной части приращения функционала невязки имеет вид

$$\delta L(r,\theta,\tau)=\int\limits_0^{\tau_{\max}}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\left[T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)-\tilde{T}\right]\Delta T(\theta,z,\tau)\,d\tau.$$

Выражение I_1 получено таким образом, что в него входит

$$I_1(\theta,z,\tau)=\int\limits_0^{\tau_{\max}}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\left(\psi\left(z_j,\theta_k,\tau\right)\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\lambda_{\theta\theta}(T)\frac{\partial\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial\theta}+\right.\right.\right.$$

$$\left.+\frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT}\frac{\partial T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial\theta}\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)\right]+$$

$$+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_{z\theta}(T)\frac{\partial\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial\theta}+\frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{\mathrm{d}T}\frac{\partial T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial\theta}\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{zz}(T)\frac{\partial\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial z}+\frac{\mathrm{d}\lambda_{zz}(T)}{dT}\frac{\partial T(\theta,z,\tau)}{\partial z}\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)\right)-$$

$$\left.-C(T)\frac{\partial\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial\tau}\right)d\tau;$$

$$I_\gamma=\Delta\gamma\left[\lambda_m^{zz}+\lambda_m^{\theta z}+\lambda_m^{\theta\theta}\right]d\tau.$$

Таким образом, запишем новый вид вариации функционала

$$\delta L = \int\limits_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\left[T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)-\tilde{T}\right]\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right) +$$

$$+\int\limits_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\Bigg(\psi\left(z_j,\theta_k,\tau\right)\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\lambda_{\theta\theta}(T)\frac{\partial\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial\theta}+\frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT}\frac{\partial T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial\theta}\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)\right]+\right.$$

$$+\frac{2}{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_{z\theta}(T)\frac{\partial\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial\theta}+\frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT}\frac{\partial T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial\theta}\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{zz}(T)\frac{\partial\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial z}+\frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT}\frac{\partial T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial \mathrm{z}}\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)\right)-$$

$$\left.-C(T)\frac{\partial\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial\tau}\right]\Bigg)d\tau.$$

При решении задачи методом А.Н. Тихонова

$$\delta L = \int\limits_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(\left[T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)-\tilde{T}\right]\Delta T(z_j,\theta_k,\tau)) +$$

$$+\int\limits_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\Bigg(\psi\left(z_j,\theta_k,\tau\right)\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\lambda_{\theta\theta}(T)\frac{\partial\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial\theta}+\frac{d\lambda_{\theta\theta}(T)}{dT}\frac{\partial T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial\theta}\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)\right]+\right.$$

$$+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_{z\theta}(T)\frac{\partial\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial\theta}+\frac{d\lambda_{z\theta}(T)}{dT}\frac{\partial T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial\theta}\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{zz}(T)\frac{\partial\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial z}+\frac{d\lambda_{zz}(T)}{dT}\frac{\partial T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial z}\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)\right)-$$

$$\left.-C(T)\frac{\partial\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial\tau}+\Delta\gamma\left[\lambda_m^{zz}+\lambda_m^{\theta z}+\lambda_m^{\theta\theta}\right]\right]\Bigg)d\tau.$$

Исходя из условия глобального минимума функционала можно выразить множитель Лагранжа:

$$\psi\left(z_j,\theta_k,\tau\right)=\frac{\left[T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)-\tilde{T}\right]\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)+\Delta\gamma[\lambda_m^{zz}+\lambda_m^{\theta z}+\lambda_m^{\theta\theta})}{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\lambda_{\theta\theta}(T)\frac{\partial\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial\theta}\right]+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_{z\theta}(T)\frac{\partial\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial\theta}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{zz}(T)\frac{\partial\Delta T\left(z_j,\theta_k,\tau\right)}{\partial z}\right)}.$$

КОМПОНЕНТЫ ГРАДИЕНТОВ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

Для получения формулы градиента целевой функции преобразуем выражение для $\delta L(r,\theta,\tau)$. Линейную часть приращения целевого функционала представим в виде:

$$\sum_{m=1}^{M}\frac{\partial\delta I}{\partial\lambda_m^{zz}}\Delta\lambda_m^{zz}+\sum_{m=1}^{M}\frac{\partial\delta I}{\partial\lambda_m^{\theta r}}\Delta\lambda_m^{\theta z}+\sum_{m=1}^{M}\frac{\partial\delta I}{\partial\lambda_m^{\theta\theta}}\Delta\lambda_m^{\theta\theta},$$

который соответствует трактовке градиента функционала в данном конкретном случае (в данной задаче). Второе слагаемое в выражении для δL представим несколько иначе, чем в соотношении для предыдущего функционала. Для этого воспользуемся приведенными выше выражениями для возмущенных значений искомых функций, т.е. выражениями для $\lambda_m^{zz}(T+\Delta T)$, $\lambda_m^{z\theta}(T+\Delta T), \lambda_m^{\theta\theta}(T+\Delta T)$.

Другой вид возмущенного уравнения теплопроводности при изменении параметров на величину Δ будет иметь вид:

первое слагаемое

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{m=1}^{M}(\lambda_m^{zz}+\Delta\lambda_m^{zz})\left(N_m(T)+\frac{N_m(T)}{dT}\Delta T\right)\frac{\partial\big(T(\theta,z,\tau)+\Delta T(\theta,z,\tau)\big)}{\partial z}\right).$$

третье слагаемое

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sum_{m=1}^{M}(\lambda_m^{\theta\theta}+\Delta\lambda_m^{\theta\theta})\left(N_m(T)+\frac{N_m(T)}{dT}\Delta T\right)\frac{\partial\big(T(\theta,z,\tau)+\Delta T(\theta,z,\tau)\big)}{\partial\theta}\right)$$

второе слагаемое в левой части

$$\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{m=1}^{M}\left(\lambda_m^{z\theta}+\Delta\lambda_m^{z\theta}\right)\left(N_m(T)+\frac{N_m(T)}{dT}\Delta T\right)\frac{\partial\big(T(\theta,z,\tau)+\Delta T(\theta,z,\tau)\big)}{\partial\theta}\right).$$

Теперь, как и раньше, вычтем из возмущенного уравнения теплопроводности невозмущенное, чтобы получить уравнение, определяющее поле приращения температур при возмущении параметров на величину Δ.

Таким образом, перепишем наш функционал в немного другом виде:

$$\Delta L(r,\theta,\tau)=\sum_{m=1}^{M}\frac{\partial\delta I}{\partial\lambda_m^{zz}}\Delta\lambda_m^{zz}+\sum_{m=1}^{M}\frac{\partial\delta I}{\partial\lambda_m^{\theta r}}\Delta\lambda_m^{\theta z}+\sum_{m=1}^{M}\frac{\partial\delta I}{\partial\lambda_m^{\theta\theta}}\Delta\lambda_m^{\theta\theta}+$$

$$+\int_0^{\tau_{\max}}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\{(\psi(z_j,\theta_k,\tau)[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sum_{m=1}^{M}\Delta\lambda_m^{\theta\theta}\left(N_m(T)+\frac{dN_m(T)}{dT}\Delta T\right)\frac{\partial\left(T(z_j,\theta_k,\tau)+\Delta T(z_j,\theta_k,\tau)\right)}{\partial\theta}\right)+$$

$$+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sum_{m=1}^{M}\lambda_m^{\theta\theta}(N_m(T)\frac{\partial\Delta T(z_j,\theta_k,\tau)}{\partial\theta}+\frac{N_m(T)}{dT}\frac{\partial T(z_j,\theta_k,\tau)}{\partial\theta}\Delta T)\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{m=1}^{M}\Delta\lambda_m^{zz}\left(N_m(T)+\frac{N_m(T)}{dT}\Delta T\right)\frac{\partial\left(T(z_j,\theta_k,\tau)+\Delta T(z_j,\theta_k,\tau)\right)}{\partial z}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{m=1}^{M}\Delta\lambda_m^{zz}\left(N_m(T)\frac{\partial\Delta T(z_j,\theta_k,\tau)}{\partial z}+\frac{N_m(T)}{dT}\frac{\partial T(z_j,\theta_k,\tau)}{\partial z}\Delta T\right)\right)+$$

$$+\frac{2}{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{m=1}^{M}\Delta\lambda_m^{z\theta}\left(N_m(T)+\frac{N_m(T)}{dT}\Delta T\right)\frac{\partial\left(T(z_j,\theta_k,\tau)+\Delta T(z_j,\theta_k,\tau)\right)}{\partial\theta}\right)+$$

$$+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{m=1}^{M}\lambda_m^{z\theta}\left(N_m(T)\frac{\partial\Delta T(z_j,\theta_k,\tau)}{\partial\theta}+\frac{N_m(T)}{dT}\frac{\partial T(z_j,\theta_k,\tau)}{\partial\theta}\Delta T\right)\right)-$$

$$-\frac{\partial C(T)}{\partial T}\Delta T(z_j,\theta_k,\tau)+\Delta\gamma[\lambda_m^{zz}+\lambda_m^{\theta z}+\lambda_m^{\theta\theta}]\Big)\Big\}d\tau.$$

Выражение для первой компоненты тензора теплопроводности*:*

$$\frac{\partial\delta L}{\partial\lambda_m^{zz}}=-\int_0^{\tau_{\max}}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\psi(\theta,z,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial z}\left[\sum_{m=1}^{M}N_m(T)\frac{\partial\left(T(z_j,\theta_k,\tau)+\Delta T(z_j,\theta_k,\tau)\right)}{\partial z}\right]+\Delta\gamma\lambda_m^{zz}\right]d\tau.$$

Выражение для второй компоненты тензора теплопроводности:

при использовании метода А.Н. Тихонова

$$\frac{\partial \delta L}{\partial \lambda_m^{\theta z}} = -\int\limits_0^{\tau_{\max}} \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} \frac{\psi(z_j,\theta_k,\tau)}{r^2\,\partial\theta}\left[\left(\sum_{m=1}^{M} N_m(T)\frac{\partial\left(T(z_j,\theta_k,\tau)+\Delta T(z_j,\theta_k,\tau)\right)}{\partial\theta}\right)+\Delta\gamma\lambda_m^{\theta z}\right]d\tau;$$

при использовании метода А.Н. Тихонова

$$\frac{\partial \delta L}{\partial \lambda_{\mathrm{m}}^{\theta\theta}} = -2\int\limits_0^{\tau_{max}} \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} \frac{\psi(z_j,\theta_k,\tau)}{\mathrm{r}\,\partial z}\left[\left(\sum_{m=1}^{M} N_m(T)\frac{\partial\left(T(z_j,\theta_k,\tau)+\Delta T(z_j,\theta_k,\tau)\right)}{\partial\theta}\right)+\Delta\gamma\lambda_m^{\theta\theta}\right]d\tau.$$

Результаты теплофизических испытаний проводились при воздействии аэродинамической падающей тепловой нагрузки. Угловое распределение по пространству шпангоута и элементов теплозащитного покрытия (сфера ТЗП, кольцо ТЗП) представлены на рис. 2.

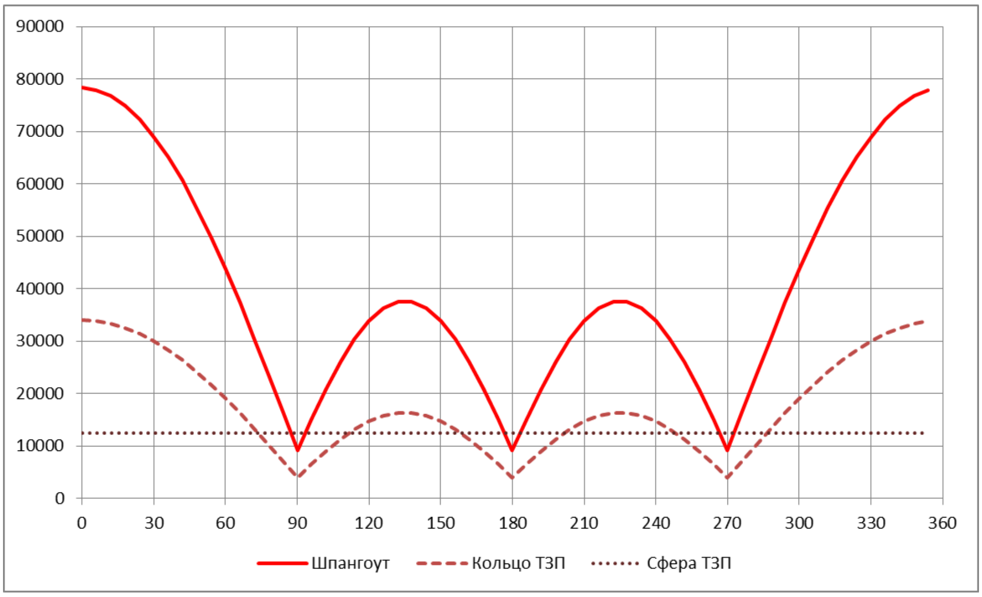

Рис. 2. Угловое распределения потоков для трех рассматриваемых зон при максимальной тепловой нагрузке

Замеры экспериментальных температур в местах установки датчиков температур как функция от времени представлены на рис. 3, где Тп_i – место установки термопары.

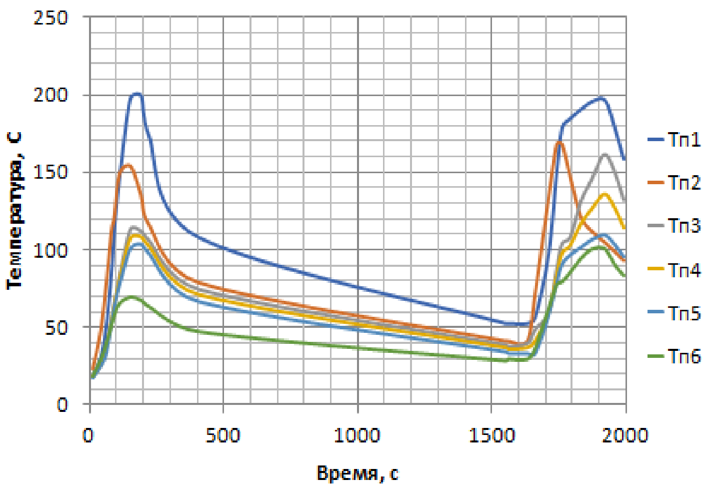

Рис. 3. Зависимость замеров температур от времени

При идентификации теплофизических параметров теоретическое температурное поле будет итерационно приближаться к экспериментальному. На рис. 4, 5 показано изменение теоретического температурного поля в местах установки датчиков температур для 1 и 5 итерации.

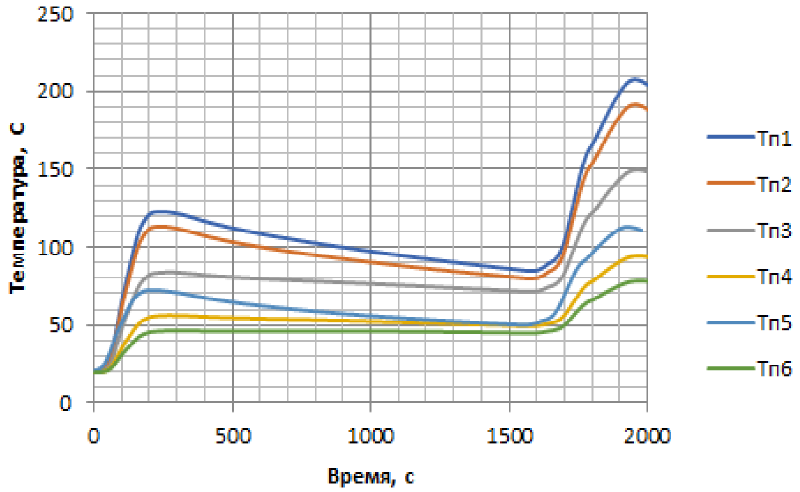

Рис. 4. Температурное поле на 1 итерации

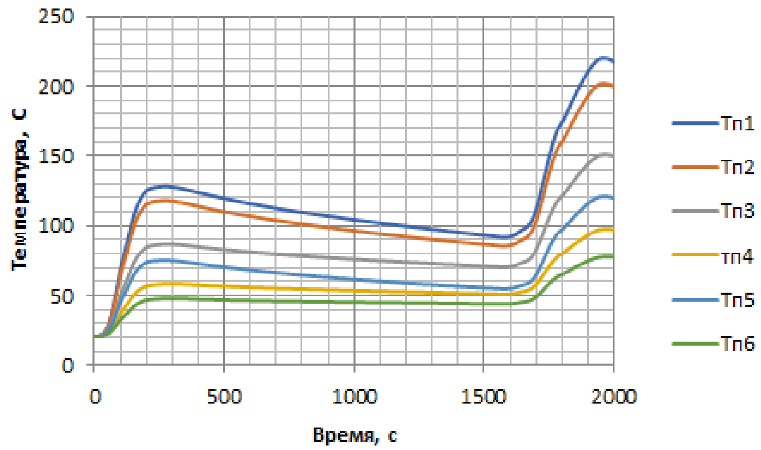

Рис. 5. Температурное поле на 5 итерации

Результаты восстановленных компонент тензора теплопроводности как функций от температуры при переходе в декартовую систему координат представлены на рис. 6.

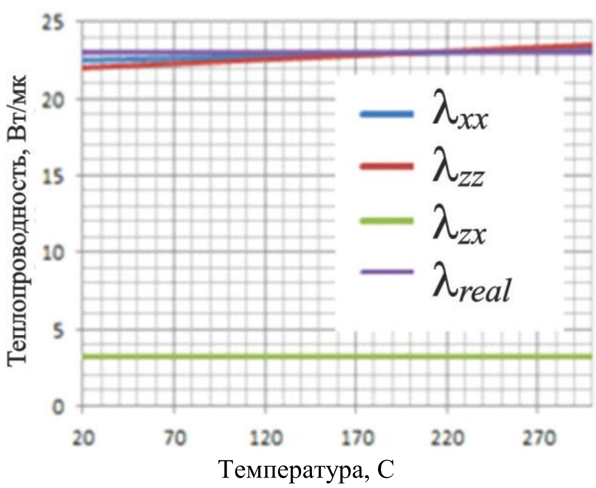

Рис. 6. Значения восстановленного симметричного тензора теплопроводности методом регуляризации А.Н. Тихонова

Главные компоненты тензора теплопроводности и угол ориентации главных осей определяются по следующим зависимостям:

$$\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\lambda_{xy}(T)}{\lambda_{xx}(T) - \lambda_{yy}(T)};$$

$$\lambda_{\xi}(T) = \lambda_{xx}(T)\cos^2(\varphi) + \lambda_{yy}(T)\sin^2(\varphi) + \lambda_{xy}(T)\sin(2\varphi);$$

$$\lambda_{\eta}(T) = \lambda_{yy}(T)\cos^2(\varphi) + \lambda_{xx}(T)\sin^2(\varphi) + \lambda_{xy}(T)\sin(2\varphi).$$

Результаты представлены на рис. 7.

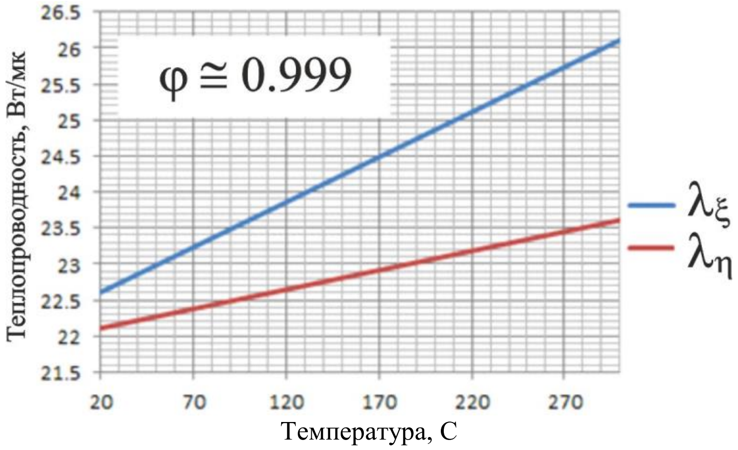

Рис. 7. Значения относительных погрешностей восстановленных главных тензоров теплопроводности методом регуляризации А.Н. Тихонова

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработан метод и алгоритм идентификации симметричного тензора теплопроводности как функции от температуры с помощью регуляризации А.Н. Тихонова.
2. Произведена апробация разработанного метода на примере шпангоута стыковочного агрегата перспективного транспортного корабля «Орел».
3. Симметричная компонента тензора теплопроводности является около нулевой при малом отличии двух ортогональных компонент тензора друг от друга, что говорит о том, что материал при таком уровне температур не проявляет явно выраженную анизотропию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крейн С.Г., Прозоровская О.И.* Аналитические полугруппы и некорректные задачи для эволюционных уравнений // Доклады Академии наук СССР. 1960. Т. 133. № 2. С. 277–280.

2. *Басистов Ю.А., Яновский Ю.Г.* Некорректные задачи в механике (реологии) вязкоупругих сред и их регуляризация // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. Т. 16. № 1. С. 117–143.

3. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Кокурин М.М.* Прямые и обратные теоремы для итерационных методов решения нерегулярных операторных уравнений и разностных методов решения некорректных задач Коши // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60. № 6. С. 939–962.

4. *Васин В.В.* Модифицированный метод наискорейшего спуска для нелинейных регулярных операторных уравнений // Доклады Академии наук. 2015. Т. 462. № 3. С. 264.

5. *Голичев И.И.* Модифицированный градиентный метод наискорейшего спуска решения нелениаризованной задачи для нестационарных уравнений Навье–Стокса // Уфимский математический журнал. 2013. Т. 5. № 4. С. 60–76.

6. *Блох А.Г., Журавлев Ю.А., Рыжков Л.Н.*. Теплообмен излучением. М.: Энегоатомиздат, 1991.

7. *Залетаев В.М., Капинос Ю.В., Сургучев О.В.* Расчет теплообмена космического аппарата. М.: Машиностроение, 1979.

8. *Фаворский О.Н., Каданер Я.С.* Вопросы теплообмена в космосе. М.: Высшая школа, 1967.

9. *Карслоу У., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.

10. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 288 с.

11. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 280 с.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2022, vol. 11, no. 5, pp. 329–342

PARAMETRIC IDENTIFICATION OF THE HEAT CONDUCTIVITY TENSOR IN CYLINDRICAL COORDINATES

N.O. Borshchev
Astrocosmic Center of the Federal State Institution of Science S.A. Lebedev Institute, Moscow, 119991, Russia
**e-mail: moriarty93@mail.ru*

Received December 4, 2022; revised December 11, 2022; accepted December 13, 2022

When designing the thermal regime of composite structures and structures characterized by a mixed type of heat exchange due to its complex physico-chemical and geometric structure, it is often necessary to know its effective thermophysical characteristics. In this paper, we propose a method for restoring the effective thermal conductivity tensor as a function of temperature based on minimizing the root-mean-square error between the theoretical and experimental temperature field at the temperature sensor installation sites. This technique has been tested on the frame of the descent spacecraft "Eagle". Since these tasks are considered incorrect, it is necessary to apply regularization that mitigates the error of the input noisy data. The algorithm of conjugate gradients is chosen as the minimization method, as the most accurate method of the first order of convergence.

Keywords: inverse problem of thermal conductivity, coefficient of thermal conductivity, basic function, regularization of A.N. Tikhonov.

REFERENSES

1. *Krein S.G., Prozorovskaya O.I.* Analiticheskie polugruppy i nekorrektnye zadachi dlya evolyucionnyh uravnenij [Analytical semigroups and ill-posed problems for evolutionary equations] // Reports of the Academy of Sciences of the USSR. 1960. Vol. 133. № 2. P. 277–280 (in Russian).

2. *Bassistov Yu.A., Yanovsky Yu.G.* Nekorretnye zadachi v mekhanike (reologii) vyazkouprugih sred i ih regulyarizaciya [Uncorrected problems in mechanics (rheology) of viscoelastic media and their regularization] // Mechanics of composite materials and structures. 2010. Vol. 16. № 1. P. 117–143 (in Russian).

3. *Bakushinsky A.B., Kokurin M.Yu., Kokurin M.M.* Pryamye i obratnye teoremy dlya iteracionnyh metodov resheniya neregulyarnyh operatornyh uravnenij i raznostnyh metodov resheniya nekorrektnyh zadach Koshi [Direct and inverse theorems for iterative methods for solving irregular operator equations and difference methods for solving ill-posed Cauchy problems] // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2020. Vol. 60. № 6. P. 939–962 (in Russian).

4. *Vasin V.V.* Modificirovannyj metod naiskorejshego spuska dlya nelinejnyh regulyarnyh operatornyh uravnenij [Modified steepest descent method for nonlinear regular operator equations] // Reports of the Academy of Sciences. 2015. Vol. 462. № 3. P. 264 (in Russian).

5. *Golichev I.I.* Modificirovannyj gradientnyj metod naiskorejshego spuska resheniya neleniarizovannoj zadachi dlya nestacionarnyh uravnenij Nav'e-Stoksa [Modified gradient method of the steepest descent of the solution of the non-leniarized problem for non-stationary Navier-Stokes equations] // Ufa Mathematical Journal. 2013. Vol. 5. № 4. P. 60–76 (in Russian).

6. *Bloch A.G., Zhuravlev Yu.A., Ryzhkov L.N.* Teploobmen izlucheniem [Heat exchange by radiation]. M.: Enegoatomizdat Publ., 1991.

7. *Zaletaev V.M., Kapinos Yu.V., Surguchev O.V.* Raschet teploobmena kosmicheskogo apparata [Calculation of heat exchange of the spacecraft]. M.: Mashinostroenie Publ., 1979.

8. *Favorsky O.N., Kadaner Ya.S.* Voprosy teploobmena v kosmose [Questions of heat exchange in space]. M.: Higher School Publ., 1967.

9. *Karslow U., Jaeger D.* Teploprovodnost' tverdyh tel [Thermal conductivity of solids]. M.: Nauka Publ., 1964. 487 p.

10. *Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V.* Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnyh zadach [Extreme methods of solving incorrect problems]. M.: Nauka. Gl. ed. phys.-mat. lit Publ., 1988. 288 p.

11. *Alifanov O.M.* Obratnye zadachi teploobmena [Inverse problems of heat transfer]. M.: Mechanical Engineering Publ., 1988. 280 p.