

УДК 517.95

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2023 П.А. Грибов, Н.А. Кудряшов, А.А. Кутуков*

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия
*e-mail: alexkutuk@gmail.com

Поступила в редакцию 06.06.2023

После доработки: 08.06.2023

Принята к публикации: 15.06.2023

Представлены преобразования для нелинейных уравнений в частных производных с переменным коэффициентом. Показано, что свойства интегрируемости для некоторых уравнений с переменными коэффициентами выполняются естественным образом, так как эти уравнения преобразуются к хорошо известным интегрируемым уравнениям в частных производных.

Ключевые слова: солитонные преобразования, дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, интегрируемые дифференциальные уравнения.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.245

В последние годы появились обширные исследования, посвященные нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных с переменными коэффициентами (см., например, [1–14]). Эти уравнения являются естественными обобщениями многих хорошо известных уравнений из различных разделов физики.

В данной работе исследуются широко известные нелинейные уравнения в частных производных с переменными коэффициентами, для которых применяются преобразования переменных. Показано, что некоторые нелинейные уравнения с переменными коэффициентами являются интегрируемыми уравнениями и обладают всеми свойствами интегрируемости, поскольку они преобразуются к хорошо известным интегрируемым уравнениям.

Рассмотрим уравнение Кортевега–де Вриза с переменными коэффициентами, имеющее вид

$$u_t + 3uu_x + u_{xxx} + (\varphi_1(t)x + \varphi_2(t))u_x + 2\varphi_1(t)u = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) изучено, в частности, в работе [1], где было показано, что оно может быть решено с помощью преобразования рассеяния. Уравнение (1) имеет псевдопотенциалы Уолквиста–

Эстабрука и пару Лакса [2]. Недавно было обнаружено, что уравнение (1) обладает свойством Пенлеве и имеет рациональные решения [7].

Ниже будет показано, что уравнение (1) может быть преобразовано к хорошо известному уравнению Кортевега–де Вриза.

Покажем, что это можно сделать с помощью преобразований:

$$v(y, \tau) = \frac{1}{k^2(t)} u(x, t), \quad (2)$$

$$y = k(t)x - \int_0^t k(\varsigma)\varphi_2(\varsigma)d\varsigma, \quad (3)$$

$$\tau = \int_0^t k^3(\varsigma)d\varsigma, \quad (4)$$

где

$$k(t) = k(t=0)\exp\left\{-\int_0^t \varphi_1(\xi)d\xi\right\}. \quad (5)$$

Назовем эти преобразования солитонными, потому что они позволяют находить солитонные решения некоторых уравнений.

С учетом преобразований (2)–(4) получаются соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t} = k^3 \frac{\partial}{\partial \tau} + \left(x \frac{dk}{dt} - k\varphi_2\right) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = k \frac{\partial}{\partial y}. \quad (7)$$

Подстановка (2)–(7) в уравнение (1) приводит к уравнению Кортевега–де Вриза:

$$v_\tau + 3vv_y + v_{yyy} = 0. \quad (8)$$

Очевидно, уравнение (1) обладает естественными свойствами для интегрируемых уравнений. В частности, оно имеет солитонные решения. Односолитонное решение для уравнения (1) принимает вид

$$u(x, t) = k^2(t) \operatorname{ch}^{-2} \left\{ \frac{1}{2} (k(t)x - \omega(t)) \right\}, \quad (9)$$

где $\omega(t)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{d\omega}{dt} = k^3 + \varphi_2 k. \quad (10)$$

N -солитонные решения уравнения (1) определяются формулой Хироты для обычного уравнения Кортевега–де Вриза [8]:

$$u = 4 \frac{\partial^2 \ln \Phi_N}{\partial x^2}, \quad (11)$$

где $\Phi_N = \Phi(\theta_1, \dots, \theta_N)$ соответствует решению уравнения Хироты [8], и

$$\theta_j = k_j(t)x - \omega_j(t), \quad (12)$$

$$k_j(t) = k_j(t=0) \exp \left\{ - \int_0^t \varphi_1(\tau) d\tau \right\}, \quad (13)$$

$$\frac{d\omega_j}{dt} = k_j^3 + \varphi_2(t)k_j. \quad (14)$$

Фазовый сдвиг для солитонов определяется по формуле

$$e^{A_{ij}} = \left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \right)^2 = \left(\frac{k_i(t=0) - k_j(t=0)}{k_i(t=0) + k_j(t=0)} \right)^2. \quad (15)$$

Можно также получить пару Лакса и бесконечное число сохраняющихся величин для уравнения (1) с учетом пары Лакса и сохраняющихся величин для обычного уравнения Кортевега–де Вриза и преобразований (2)–(4).

Заметим, что уравнение (1) можно получить из уравнения Кортевега–де Вриза (8), если использовать преобразования (6) и (7) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{k^3} \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{dk}{dt} x - k\varphi_2 \right) \frac{\partial}{\partial x}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \quad (17)$$

и принять во внимание уравнение

$$\frac{dk}{dt} + \varphi_1 k = 0. \quad (18)$$

В качестве второго примера рассмотрим модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза с переменными коэффициентами, которое имеет вид [2, 7]

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} + (\varphi_1(t)x + \varphi_2(t))u_x + \varphi_1(t)u = 0. \quad (19)$$

Используя преобразование

$$v(y, \tau) = \frac{1}{k(t)} u(x, t) \quad (20)$$

и y, τ из (6), (7), получим модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза:

$$v_\tau + 6v^2 v_y + v_{yyy} = 0. \quad (21)$$

Уравнение (19) обладает всеми свойствами интегрируемого уравнения, потому что оно приводится преобразованиями (6), (7) и (20) к уравнению (21). В частности, уравнение (19) имеет солитонные решения, которые выражаются формулами Хироты для модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза. Например, односолитонное решение для уравнения (19) принимает вид

$$u(x, t) = \frac{k(t)}{\operatorname{ch}(k(t)x - \omega(t))}, \quad (22)$$

где $k(t)$ и $\omega(t)$ определяются уравнениями (18) и (10).

Рассмотрим также обобщенное нелинейное уравнение Шредингера в виде

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u + i(\varphi_1(t)x + \varphi_2(t))u_x + i\varphi_1(t)u = 0. \quad (23)$$

Задача рассеяния для уравнения (23) принимает вид

$$\Psi_{1x} + i\lambda \Psi_1 - u \Psi_2 = 0, \quad (24)$$

$$\Psi_{2x} - i\lambda \Psi_2 - u^* \Psi_1 = 0. \quad (25)$$

Временная зависимость Ψ_1 и Ψ_2 выбирается в виде

$$\Psi_{1t} = A \Psi_1 + B \Psi_2, \quad (26)$$

$$\Psi_{2t} = C \Psi_1 - A \Psi_2, \quad (27)$$

где

$$A = -2i\lambda^2 + i(\varphi_1 x + \varphi_2)\lambda + iuu^*, \quad (28)$$

$$B = 2u\lambda - u(\varphi_1 x + \varphi_2) + iu_x, \quad (29)$$

$$C = -2u^*\lambda + u^*(\varphi_1 x + \varphi_2) + iu_x^* \quad (30)$$

при

$$\lambda_t + \varphi_1 \lambda = 0. \quad (31)$$

В этом случае солитонные преобразования выбираются в виде

$$y = k(t)x - \int_0^t \varphi_2(\zeta)k(\zeta)d\zeta, \quad (32)$$

$$v(y, \tau) = \frac{1}{k(t)}u(x, t), \quad (33)$$

$$\tau = \int_0^t k^2(\zeta)d\zeta, \quad (34)$$

где

$$k(t) = k(t=0)\exp\left\{-\int_0^t \varphi_1(\xi)d\xi\right\}. \quad (35)$$

Подстановка (32)–(35) в уравнение (23) дает нелинейное уравнение Шредингера

$$iv_\tau + v_{yy} + 2|v|^2v = 0. \quad (36)$$

Уравнение (23) также обладает всеми свойствами, уникальными для интегрируемых уравнений. В частности, это уравнение имеет солитонные решения. Односолитонное решение уравнения (23) принимает вид

$$u = \frac{\exp(\theta_1)}{1 + \exp\{\theta_1 + \theta_1^* + \varphi_{11}\}}, \quad (37)$$

где

$$\theta_1 = k_1(t)x + \omega_1(t), \quad (38)$$

$$\exp\{\varphi_{11}\} = \frac{1}{2}(k_1 + k_1^*)^{-2}, \quad (39)$$

$$\frac{dk_1}{dt} + \varphi_1 k_1 = 0, \quad (40)$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = ik_1^2 - \varphi_2 k_1 - \varphi_1. \quad (41)$$

Использование преобразования

$$u = \frac{G}{F} \quad (42)$$

позволяет получить N -солитонные решения уравнения (23) по аналогии с нелинейным уравнением Шредингера [8]. Они выражаются при помощи формул для N -солитонных решений.

Можно получить и другие интегрируемые уравнения с переменными коэффициентами, подобные тем, которые рассматривались выше с учетом известных интегрируемых уравнений.

Предположим, что уравнение

$$v_\tau + L(v) = 0 \quad (43)$$

является интегрируемым. Рассмотрим солитонные преобразования в виде

$$v(y, \tau) = \frac{1}{s(t)}u(x, t), \quad (44)$$

$$y = \alpha(t)x + \beta(t), \quad (45)$$

$$\tau = \gamma(t), \quad (46)$$

где $s(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ – гладкие функции от t . С учетом (45), (46) получаются соотношения

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{\dot{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\alpha x + \beta}{\alpha \dot{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (47)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (48)$$

Используя уравнение (43) и преобразования (44)–(46), получаем уравнение

$$u_t - \frac{\dot{s}}{s}u - \frac{\alpha x + \beta}{\alpha}u_x + \dot{\gamma} s L\left(\frac{u}{s}\right) = 0. \quad (49)$$

Принимая во внимание форму оператора $L(v)$; можно найти новое интегрируемое уравнение, которое соответствует уравнению (43).

Возьмем, к примеру, уравнение Буссинеска:

$$v_{\tau\tau} + v_{yyyy} + 3(v^2)_{yy} = 0. \quad (50)$$

Используя преобразования (44)–(46) и формулы (47) и (48), получаем следующее уравнение [2]:

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_{xxxx} + 3(u^2)_{xx} + (2F_1x + F_2)u_{xt} + \\ + 6F_1u_t + \frac{1}{4}(2F_1x + F_2)^2u_{xx} + \\ + \left[(7F_1^2 + F_{1t})x + \frac{7}{2}F_1F_2 + \frac{1}{2}F_{2t}\right] \times \\ \times u_x + (8F_1^2 + 2F_{1t})u = 0, \end{aligned} \quad (51)$$

если принять в (44)–(46)

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\alpha F_1(t), \quad (52)$$

$$s = \alpha^2(t), \quad (53)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{1}{2}\alpha F_2, \quad (54)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \alpha^2(t), \quad (55)$$

где $F_1(t)$ и $F_2(t)$ — произвольные гладкие функции от t .

В заключение сформулируем результаты данной работы. Рассмотрены некоторые нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных с переменными коэффициентами и показано, что эти уравнения преобразуются к хорошо известным интегрируемым уравнениям. Так-

же показано, что эти уравнения обладают солитонными решениями и всеми другими свойствами интегрируемых уравнений.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00141, <https://rscf.ru/project/22-11-00141/>.

Вклад авторов: Н.А. Кудряшов – идея метода, концепция исследования; А.А. Кутуков – подготовка примеров, написание текста статьи; П.А. Грибов – обзор публикаций, проверка текста на ошибки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chan W. L., Kam Shun L. Nonpropagating solitons of the variable coefficient and nonisospectral Korteweg-de Vries equation. *Journal of Mathematical Physics*, 1989. V. 30(11). Pp. 2521–2526.
2. Lou S. Y. *Pseudopotentials*. Lax pairs and Backlund transformations for some variable coefficient nonlinear equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1991. V. 24(10). L513.
3. Porsezian K. Backlund transformations and explicit solutions of certain inhomogeneous nonlinear Schrödinger-type equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1991. V. 24(7). L337.
4. Porsezian K., Daniel, M., Bharathikannan R. Generalized χ -dependent Hirota equation: singularity structure, Bäcklund transformation and soliton solutions. *Physics Letters A*, 1991. V. 156(5). Pp. 206–210.
5. Winternitz P., Gazeau J.P. Allowed transformations and symmetry classes of variable coefficient Korteweg-de Vries equations. *Physics Letters A*, 1992. V. 167(3). Pp. 246–250.
6. Gagnon L., Winternitz P. Symmetry classes of variable coefficient nonlinear Schrödinger equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1993. V. 26(23). Pp. 7061.
7. Kudryashov N.A., Nikitin V.A. Painleve analysis, rational and special solutions of variable coefficient Korteweg-de Vries equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1994. V. 27(4). L101.
8. Hirota R. Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons. *Physical Review Letters*, 1971. V. 27(18). Pp. 1192.
9. Caudrey P.J., Gibbon J.D., Eilbeck J.C., Bullough R.K. Exact multisoliton solutions of the self-induced transparency and sine-Gordon equations. *Physical Review Letters*, 1973. V. 30(6). Pp. 237.
10. Kudryashov N.A. Governed optical solitons of the generalized Schrödinger equation with dual-power law of refractive index. *Optik*, 2022. V. 266. № 169619.
11. Zhao J., Luan Z., Zhang P., Dai C., Biswas A., Liu W., Kudryashov N. A. Dark three-soliton for a nonlinear Schrödinger equation in inhomogeneous optical fiber. *Optik*, 2020. V. 220. No. 165189.
12. Popov S.P. Neavtonomnye solitonnye resheniya modifirovannogo uravneniya Kortevega–de Vriza–sinus-Gordona [Nonautonomous soliton solutions of the modified Korteweg-de Vries-sine-Gordon equation]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016. V. 56. № 11. Pp. 1960–1969 (in Russian).
13. Liu X., Luan Z., Zhou Q., Liu W., Biswas A. Dark two-soliton solutions for nonlinear Schrödinger equations in inhomogeneous optical fibers. *Chinese Journal of Physics*, 2019. V. 61. Pp. 310–315.
14. Clarkson P.A. Painleve analysis and the complete integrability of a generalized variable-coefficient Kadomtsev-Petviashvili equation. *IMA journal of applied mathematics*, 1990. V. 44(1). Pp. 27–53.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 2, pp. 90–94

TRANSFORMATIONS OF SOME NONLINEAR EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

P.A. Gribov, N.A. Kudryashov, A.A. Kutukov*

*National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute),
Moscow, 115409 Russia*

**e-mail: alexkutuk@gmail.com*

Received June 6, 2023; revised June 8, 2023; accepted June 15, 2023

Transformations for non-linear partial differential equations with a variable coefficient are presented. It is shown that the integrability properties for some equations with variable coefficients are satisfied in a natural way, since these equations are transformed to well-known integrable partial differential equations.

Keywords: soliton transformations, differential equations with variable coefficients, integrable differential equations.

REFERENCES

1. Chan W. L., Kam Shun L. Nonpropagating solitons of the variable coefficient and nonisospectral Korteweg-de Vries equation. *Journal of Mathematical Physics*, 1989. Vol. 30(11). Pp. 2521–2526.
2. Lou S. Y. *Pseudopotentials*. Lax pairs and Backlund transformations for some variable coefficient nonlinear equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1991. Vol. 24(10). L513.
3. Porsezian K. Backlund transformations and explicit solutions of certain inhomogeneous nonlinear Schrödinger-type equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1991. Vol. 24(7). L337.
4. Porsezian K., Daniel M., Bharathikannan R. Generalized χ -dependent Hirota equation: singularity structure, Bäcklund transformation and soliton solutions. *Physics Letters A*, 1991. Vol. 156(5). Pp. 206–210.
5. Winternitz P., Gazeau J.P. Allowed transformations and symmetry classes of variable coefficient Korteweg-de Vries equations. *Physics Letters A*, 1992. Vol. 167(3). Pp. 246–250.
6. Gagnon L., Winternitz P. Symmetry classes of variable coefficient nonlinear Schrödinger equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1993. Vol. 26(23). Pp. 7061.
7. Kudryashov N.A., Nikitin V.A. Painlevé analysis, rational and special solutions of variable coefficient Korteweg-de Vries equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1994. Vol. 27(4). L101.
8. Hirota R. Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons. *Physical Review Letters*, 1971. Vol. 27(18). Pp. 1192.
9. Caudrey P.J., Gibbon J.D., Eilbeck J.C., Bullough R.K. Exact multisoliton solutions of the self-induced transparency and sine-Gordon equations. *Physical Review Letters*, 1973. Vol. 30(6). Pp. 237.
10. Kudryashov N.A. Governed optical solitons of the generalized Schrödinger equation with dual-power law of refractive index. *Optik*, 2022. Vol. 266. No. 169619.
11. Zhao J., Luan Z., Zhang P., Dai C., Biswas A., Liu W., Kudryashov N. A. Dark three-soliton for a nonlinear Schrödinger equation in inhomogeneous optical fiber. *Optik*, 2020. Vol. 220. No. 165189.
12. Popov S.P. Neavtonomnye solitonnye resheniya modifitsirovannogo uravneniya Kortevega-de Vriza-sinus-Gordona [Nonautonomous soliton solutions of the modified Korteweg-de Vries-sine-Gordon equation]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016. Vol. 56, No. 11. Pp. 1960–1969 (in Russian).
13. Liu X., Luan Z., Zhou Q., Liu W., Biswas A. Dark two-soliton solutions for nonlinear Schrödinger equations in inhomogeneous optical fibers. *Chinese Journal of Physics*, 2019. Vol. 61. Pp. 310–315.
14. Clarkson P.A. Painlevé analysis and the complete integrability of a generalized variable-coefficient Kadomtsev-Petviashvili equation. *IMA journal of applied mathematics*, 1990. Vol. 44(1). Pp. 27–53.