ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2019, том 8, № 3, с. 232–247

УДК 517.929+519.633

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КЛЕЙНА–ГОРДОНА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ МЕТОДОМ ПРЯМЫХ

В. Г. Сорокин*

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

**e-mail: vsesor@gmail.com*

Поступила в редакцию 02.03.2019 г.
После доработки 02.03.2019 г.
Принята к публикации 12.03.2019 г.

Описываются качественные особенности численного интегрирования методом прямых начально-краевых задач для уравнений в частных производных с запаздыванием. Метод прямых основан на аппроксимации пространственных производных разностными аналогами, что позволяет свести исходное уравнение к приближенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием τ. Для решения полученной системы используются численные методы Рунге–Кутты второго и четвертого порядка и метод Гира, встроенные в программный пакет Mathematica. Сформулированы тестовые задачи для нелинейных уравнений типа Клейна–Гордона с постоянным запаздыванием, решения которых выражаются через элементарные функции. Проводится обширное сопоставление численных решений с точными решениями тестовых задач на значительном временном интервале интегрирования от 0 до 50τ. Установлено, что при умеренных значениях времени запаздывания рассматриваемый численный метод обеспечивает высокую точность полученных результатов.

Ключевые слова: нелинейные уравнения гиперболического типа, уравнения типа Клейна–Гордона, дифференциально-разностные уравнения, уравнения с запаздыванием, численное интегрирование, метод прямых

DOI: 10.1134/S2304487X19030131

1. ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения с запаздыванием используются в динамике популяций, биологии, биохимии, биомедицине, экологии, механике, физике, химии, теории управления и других областях (см., например, [1–14] и ссылки в них). Подобные модели также встречаются в математической теории искусственных нейронных сетей, результаты которой применяются для обработки сигналов и изображений и в задачах о распознавании образов [15–17]. Наиболее простые пространственно однородные модели с запаздыванием описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Анализ и решение ОДУ с запаздыванием по сложности сопоставимы с анализом и решением уравнений в частных производных без запаздывания. Добавление диффузионного члена в модели с ОДУ дает возможность учесть распределение частиц, объектов или субстанции в пространстве и позволяет описывать более сложные явления или процессы. Краткий обзор нелинейных моделей реакционно-диффузионного типа с запаздыванием представлен в [18].

Широко известные методы численного интегрирования начально-краевых задач без запаздывания после некоторой модификации могут применяться и для задач с запаздыванием (см. обзор [19]). Одним из таких является метод прямых [20–22], который позволяет свести уравнение в частных производных с запаздыванием к системе ОДУ с запаздыванием. Полученную систему можно решить с помощью пакетов вычислительных программ Mathematica [23], Maple [24] и MATLAB [25], которые пока не справляются с непосредственным решением уравнений с запаздыванием в частных производных.

Данная статья посвящена тестированию метода прямых в среде Mathematica 11.2.0 на модельных задачах для нелинейных уравнений типа Клейна–Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = au_{xx} + f(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \tag{1}$$

где $\tau > 0$ – время запаздывания, $a > 0$.

Отметим, что для корректной постановки начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с запаздыванием начальные условия необходимо задавать не в точке, а на отрезке $-\tau \le t \le 0$ (или $0 \le t \le \tau$).

2. МЕТОД ПРЯМЫХ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Краткое описание метода прямых. Рассмотрим одномерную начально-краевую задачу для уравнения с запаздыванием достаточно общего вида

$$\begin{gathered}\varepsilon u_{tt} + \sigma u_t = [p(x,u)u_x]_x + \\ + q(x,u)u_x + f(x,u,w), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ u(x,t) = \varphi_0(x,t), \quad u_t(x,t) = \varphi_1(x,t), \\ 0 \le x \le 1, \quad -\tau \le t \le 0; \\ u(0,t) = \psi_0(t), \quad u(1,t) = \psi_1(t), \quad t > 0,\end{gathered} \tag{2}$$

где $\varepsilon \ge 0, \sigma \ge 0$ $(\varepsilon + \sigma > 0)$; функции p, q и f могут явно зависеть от t. Уравнение (2) включает в себя как частные случаи реакционно-диффузионное уравнение с запаздыванием ($\varepsilon = 0, \sigma = 1$), уравнение типа Клейна–Гордона с запаздыванием ($\varepsilon = 1, \sigma = 0$), нелинейное телеграфное уравнение с запаздыванием ($\varepsilon = 1, \sigma > 0$) и др. Второе слагаемое в правой части уравнения соответствует возможной конвективной (движущейся) составляющей модели; в частности, при $p(x,u) = 1$, $q(x,u) = -u$, $\varepsilon = 0$, $\sigma = 1$ уравнение (2) является уравнением Бюргерса с нелинейным источником и запаздыванием.

Для применения метода прямых к уравнениям вида (2) необходимо ввести вторую искомую функцию $v = u_t$. Тогда получим:

$$\begin{gathered}u_t = v, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ \varepsilon v_t + \sigma v = [p(x,u)u_x]_x + q(x,u)u_x + \\ + f(x,u,w), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ u(x,t) = \varphi_0(x,t), \quad v(x,t) = \varphi_1(x,t), \\ 0 \le x \le 1, \quad -\tau \le t \le 0; \\ u(0,t) = \psi_0(t), \quad u(1,t) = \psi_1(t), \quad t > 0, \\ v(0,t) = (\psi_0)'_t, \quad v(1,t) = (\psi_1)'_t, \quad t > 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Введем пространственную сетку $x_m = mh$, где $m = 0, 1, \dots, M$, $h = 1/M$ – шаг сетки. Аппроксимируя производные по x разностными аналогами и записывая уравнение в точке x_m, сводим задачу (3) к системе ОДУ:

$$\begin{gathered}(u_m)'_t = v_m, \quad m = 1, \dots, M-1, \quad 0 < t \le T; \\ \varepsilon (v_m)'_t + \sigma v_m = \delta_x [p_m \delta_x u_m] + q_m \delta_x u_m + f_m, \\ m = 1, \dots, M-1, \quad 0 < t \le T; \\ u_m(t) = \varphi_0(x_m,t), \quad v_m(t) = \varphi_1(x_m,t), \\ m = 0, 1, \dots, M, \quad -\tau \le t \le 0; \\ u_0(t) = \psi_0(t), \quad u_M(t) = \psi_1(t), \quad 0 < t \le T, \\ v_0(t) = (\psi_0)'_t, \quad v_M(t) = (\psi_1)'_t, \quad 0 < t \le T.\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $u_m = u_m(t) = u(x_m,t)$, $v_m = v_m(t) = v(x_m,t)$, $w_m = u(x_m, t-\tau)$, $p_m = p(x_m,u_m)$, $q_m = q(x_m,u_m)$, $f_m = f(x_m,u_m,w_m)$, T – временной интервал вычислений, δ_x – разностный оператор, который определяется так:

$$\delta_x u_m = \frac{1}{h}(u_{m+1} - u_m),$$

$$\delta_x [p_m \delta_x u_m] = \frac{1}{h^2}\big[p_m(u_{m+1} - u_m) - p_{m-1}(u_m - u_{m-1})\big].$$

Система (4) содержит $M-1$ неизвестных функций $u_m(t)$, $M-1$ неизвестных функций $v_m(t)$ и $2M-2$ уравнений, а также четыре известные функции: $u_0(t), u_M(t), v_0(t), v_M(t)$.

Замечание 1. Функция $w_m(t)$ является известной и обозначает функцию $u_m(t-\tau)$, которая была вычислена на несколько временных слоев ранее. Численное интегрирование уравнений с запаздыванием, в отличие от уравнений без запаздывания, требует хранения данных со всех временных слоев в промежутке от $t_n - \tau$ до t_{n-1}, где t_n – расчетный временной слой, что приводит к существенным затратам оперативной памяти [1].

Замечание 2. Помимо равномерной сетки по x можно использовать также сетки с неравномерным шагом [26]. Для неравномерных сеток с переменным шагом $h_m = x_m - x_{m-1}$ вторая производная u_{xx} аппроксимируется так:

$$u_{xx} \approx \frac{2}{h_m + h_{m+1}}\left(\frac{u_{m+1} - u_m}{h_{m+1}} - \frac{u_m - u_{m-1}}{h_m}\right),$$

где $\sum h_m = 1$ (если $0 \le x \le 1$).

Замечание 3. Метод прямых может использоваться также для численного интегрирования 2D- и 3D-уравнений реакционно-диффузионного типа с запаздыванием, в которых слагаемые $[p(x,u)u_x]_x$ и $q(x,u)u_x$ заменяются соответственно на $\operatorname{div}[p(\mathbf{x},u)\nabla u]$ и $\mathbf{q}(\mathbf{x},u)\cdot\nabla u$. В частности, в двумерном случае на равномерных сетках оператор Лапласа ($\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$) аппроксимируется следующим образом:

$$\Delta u \approx \frac{1}{h^2}(u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}) + \frac{1}{\tilde{h}^2}(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}),$$

где $u_n = u(y_n,t)$, $y_n = n\tilde{h}$ $(n = 0, 1, \dots, N)$, $\tilde{h} = 1/N$ – шаг сетки по y.

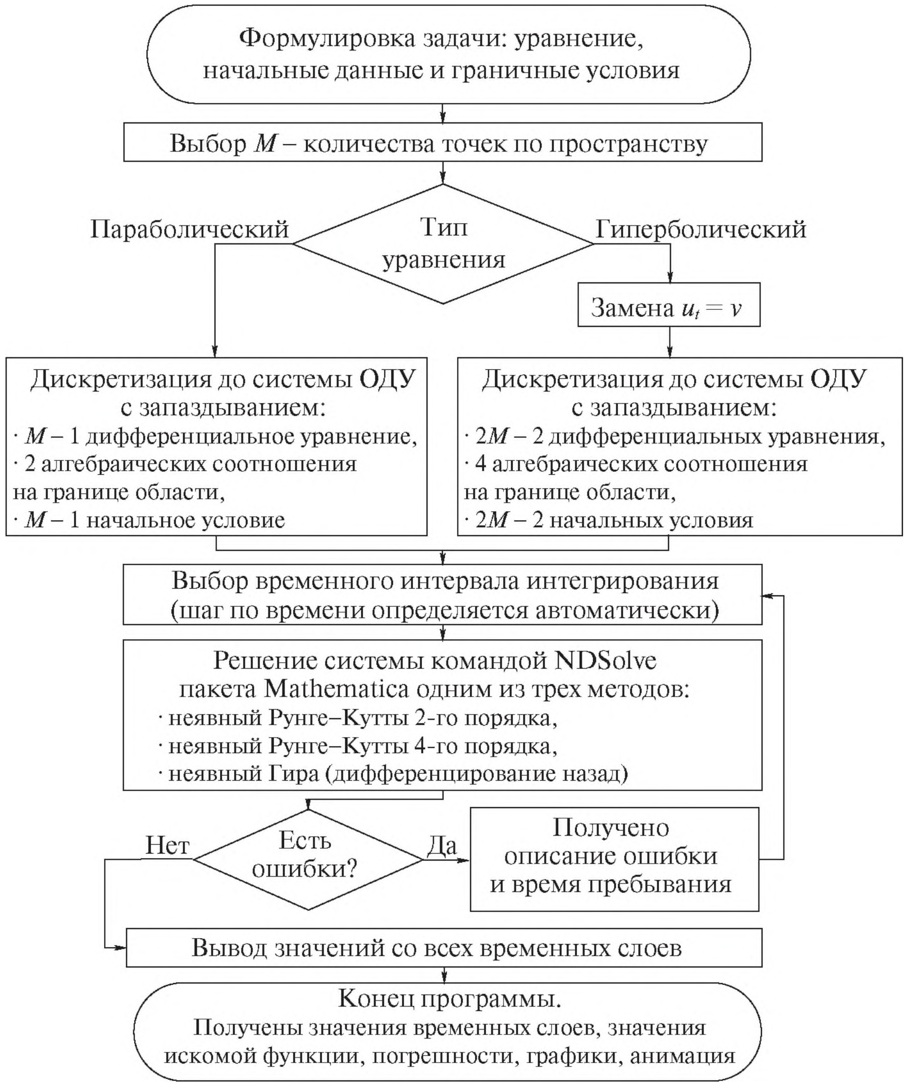

Рис. 1. Процедура численного интегрирования начально-краевых задач с запаздыванием (общая схема).

Общая схема численного интегрирования задач с запаздыванием методом прямых. Процедура численного интегрирования начально-краевой задачи (2) схематически изображена на рис. 1 и может быть описана в виде последовательности действий:

1) формулируем задачу, состоящую из уравнения, начальных данных и граничных условий;

2) выбираем количество точек сетки по пространству M, определяющее количество уравнений в системе ОДУ, которая будет получена из исходного уравнения с помощью метода прямых;

3) если рассматривается уравнение гиперболического типа, то вводим новую переменную $v = u_t$;

4) применяем метод прямых и получаем систему ОДУ с запаздыванием, состоящую, если рассматривается параболическое уравнение, из $M-1$ уравнения и $M-1$ начального условия (плюс два алгебраических соотношения на границе области), или, если рассматривается гиперболическое уравнение, из $2M-2$ уравнений и $2M-2$ начальных условий (плюс четыре алгебраических соотношения на границе области);

5) выбираем временной интервал интегрирования;

6) решаем систему ОДУ из пункта 4 с помощью одного из методов команды NDSolve;

7) в случае возникновения ошибок в процессе расчета, пробуем сократить временной интервал вычислений из пункта 5 и пытаемся получить удовлетворительное решение на более коротком временном интервале;

8) в итоге получаем значения искомой функции на всех временных слоях, значения абсолютных и относительных погрешностей на точном

решении (если точное решение известно), графики и анимации численного решения (вместе с точным решением).

Отметим, что вместо постоянного коэффициента σ в уравнении (2) может стоять функция $\sigma = \sigma(x, u)$.

Интегрирование систем ОДУ с запаздыванием в среде Mathematica. Основным методом численного интегрирования ОДУ и систем ОДУ, в том числе с запаздыванием, в среде Mathematica является команда (встроенная функция) NDSolve [28, 27]. На текущий момент с помощью команды NDSolve можно решать только системы с постоянным запаздыванием (в том числе с несколькими запаздываниями) [23]. Без дополнительных опций команда NDSolve решает систему комплексным методом, при котором в процессе вычисления происходит автоматическая смена методов решения системы ОДУ и выбор значений параметров метода. В ранних версиях Mathematica такой подход не удавалось применять для решения жестких задач, однако в более поздних версиях (например, Mathematica 11.2.0) комплексный метод уже давал некоторые результаты. Тем не менее, мы будем использовать команду NDSolve вместе с опцией Method, которая позволяет пользователю самостоятельно выбирать один из встроенных методов решения жестких систем ОДУ: метод из класса неявных методов Рунге–Кутты [29, 30] или неявный многошаговый метод Гира, основанный на формуле дифференцирования назад (BDF – Backward differentiation formula [31]).

Шаг по времени выбирается командой NDSolve автоматически. Максимальное количество шагов, за которое программа обязана построить решение, по умолчанию оценивается по величине начального шага [32], что может оказаться несостоятельным, если, например, решение неограниченно возрастает по экспоненциальному закону. Снять это ограничение можно с помощью опции `MaxSteps` $\to \infty$ внутри команды `NDSolve`.

Приведем краткое описание применяемых методов. Для начала запишем систему (4) в общем виде в векторной форме:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}'_t = F(t, \mathbf{u}, \mathbf{w}), \quad \mathbf{w} = \mathbf{u}(x, t-\tau), \quad 0 < t \le T; \\ &\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \quad -\tau \le t \le 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Входящие в (5) векторы определяются следующим образом:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) = (u_0(t), v_0(t), \ldots, u_M(t), v_M(t));$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_0(x_0, t), \varphi_1(x_0, t), \ldots, \varphi_0(x_M, t), \varphi_1(x_M, t));$$

$$F_0 = (\psi_0)'_t + u_0(t) - \psi_0(t),$$

$$F_1 = (\psi_0)''_{tt} + v_0(t) - (\psi_0)'_t,$$

$$F_m = \delta_x[p_m \delta_x u_m] + q_m \delta_x u_m + f_m, \quad m = 2, \ldots, 2M-1,$$

$$F_{2M} = (\psi_1)'_t + u_M(t) - \psi_1(t),$$

$$F_{2M+1} = (\psi_1)''_{tt} + v_M(t) - (\psi_1)'_t.$$

Метод Гира встроен в Mathematica как часть пакета IDA, входящего в библиотеку методов SUNDIALS, которая разрабатывается Ливерморской национальной лабораторией им. Э. Лоуренса, США (IDA – Implicit Differential-Algebraic solver — неявный дифференциально-алгебраический решатель, SUNDIALS – SUite of Nonlinear and DIfferential/ALgebraic equation Solvers – набор нелинейных и дифференциальных/алгебраических решателей) [31]. Программный код методов IDA (см. руководство пользователя [33]) основан на DASPK [34, 35] – программах на языке Фортран, позволяющих решать дифференциально-алгебраические системы больших размерностей. Опишем работу метода Гира, руководствуясь материалами [31, 33].

Метод Гира основан на аппроксимации временной производной с помощью формулы дифференцирования назад порядка r с переменным шагом, которая имеет вид

$$(\mathbf{u}_n)'_t = s_n^{-1} \sum_{i=0}^{r} \alpha_{n,i} \mathbf{u}_{n-i}, \tag{6}$$

где $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}(t_n)$, $s_n = t_n - t_{n-1}$ – шаг по времени, $\sum s_n = T$, t_n – текущий временной слой; коэффициенты $\alpha_{n,i}$ однозначно определяются порядком r и значениями предыдущих шагов s_n [33].

Применяя формулу (6) к системе (5), получаем систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}_n) \equiv \mathbf{F}(t_n, \mathbf{u}_n, \tilde{\mathbf{w}}_n) - s_n^{-1} \sum_{i=0}^{r} \alpha_{n,i} \mathbf{u}_{n-i} = 0, \tag{7}$$

которая на каждом слое t_n решается итерационным методом Ньютона

$$\mathbf{J}_n(\mathbf{u}_n^{(j+1)} - \mathbf{u}_n^{(j)}) = -\mathbf{G}(\mathbf{u}_n^{(j)}).$$

Здесь на каждой итерации j решается линейная система, $\mathbf{J}_n$ – аппроксимация Якобиана системы (7), которая вычисляется по формуле

$$\mathbf{J}_n = \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u}_n)}{\partial \mathbf{u}_n} \equiv \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u}_n, \tilde{\mathbf{w}}_n)}{\partial \mathbf{u}_n} - \frac{\alpha_{n,0}}{s_n}.$$

Функция $\tilde{\mathbf{w}}_n = \mathbf{u}(t_n - \tau)$ вычисляется с помощью интерполяции, если значение $t_n - \tau$ лежит вне точек сетки, и является известной функцией $\mathbf{u}_*$, значения которой были вычислены ранее на слое t_*, если $t_n - \tau = t_*$.

На каждом временном слое метод Гира вычисляет оценку $\mathbf{E}_n$ локальной погрешности и автоматически выбирает размер шага s_n и порядок r таким образом, чтобы выполнялось соотношение $\|\mathbf{E}_n/\boldsymbol{\omega}_n\| < 1$, где m-я компонента $\omega_{n,m}$ вектора $\boldsymbol{\omega}_n$ определяется по формуле

$$\omega_{n,m} = \frac{1}{10^{-p}|u_{n,m}| + 10^{-q}}.$$

Значения констант p и q определяются с помощью опций PrecisionGoal $\to p$ и AccuracyGoal $\to q$ команды NDSolve. Норма $\|\cdot\|$ по умолчанию автоматически выбирается командой NDSolve в зависимости от метода решения (но может быть задана вручную). Для метода Гира это норма вида $\|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2}$ [36].

Методы Рунге–Кутты основаны на использовании квадратурных формул. Интегрируя уравнения системы (5) по времени от t_{n-1} до t_n, получаем:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n-1} + \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{F}(t, \mathbf{u}, \mathbf{w})dt. \tag{8}$$

Интеграл в формуле (8) аппроксимируем некоторой квадратурной формулой и получаем выражения, описывающие неявный r-стадийный метод Рунге–Кутты [29, 30, 37]:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n-1} + s_n \sum_{i=1}^{r} b_i \mathbf{K}_n^i, \tag{9}$$

$$\mathbf{K}_n^i = \mathbf{F}\left(t_n + c_i s_n, \mathbf{u}_{n-1} + s_n \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \mathbf{K}_n^j, \tilde{\mathbf{w}}_n\right), \tag{10}$$

где s_n – шаг сетки, b_i – веса квадратурной формулы, c_i – коэффициенты, определяющие узлы квадратурной формулы, a_{ij} – коэффициенты, подчиняющиеся условию $c_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}$ $(i = 1, \ldots, r)$. Функция $\tilde{\mathbf{w}}_n = \mathbf{u}(t_n - \tau)$ вычисляется с помощью интерполяции, если значение $t_n - \tau$ лежит вне точек сетки, и является известной функцией $\mathbf{u}_*$, значения которой были вычислены ранее на слое t_*, если $t_n - \tau = t_*$. Различные методы Рунге–Кутты порождаются различными квадратурными формулами, которые определяются наборами коэффициентов a_{ij}, b_i и c_i. Система нелинейных алгебраических уравнений (10) относительно значений $\mathbf{K}_n^i$ по умолчанию в Mathematica решается методом Ньютона.

Мы далее будем использовать методы Рунге–Кутты с коэффициентами Лобатто IIIC, которые основаны на квадратурных формулах Лобатто и хорошо подходят для решения жестких задач [38, 39]. Первый и последний узлы квадратурной формулы Лобатто совпадают с началом и концом отрезка интегрирования, поэтому $c_1 = 0$, $c_r = 1$; остальные коэффициенты c_i являются нулями производных многочленов Лежандра

$$\frac{d^{r-2}}{dx^{r-2}}(x^{r-1}(x-1)^{r-1}).$$

В результате получаются квадратурные формулы порядка $2r - 2$. Веса $b_1, \ldots, b_r$ квадратурных формул Лобатто определяются так, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{i=1}^{r} b_i c_i^{\beta-1} = \frac{1}{\beta}, \quad \beta = 1, \ldots, 2r-2.$$

Отличие формул Лобатто IIIC от IIIA и IIIB заключается в выражениях для определения коэффициентов a_{ij}. Для Лобатто IIIC коэффициенты a_{ij} определяются из следующих условий:

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij} c_j^{\beta-1} = \frac{c_i^{\beta}}{\beta}, \quad i = 1, \ldots, r, \quad \beta = 1, \ldots, r-1;$$
$$a_{i1} = b_1, \quad i = 1, \ldots, r.$$

В Mathematica значения коэффицентов метода Рунге–Кутты (коэффициентов квадратурных формул) определяются автоматически. Выбрать вид коэффициентов (например, коэффициенты Лобатто IIIC) можно с помощью свойства Coefficients опции Method команды NDSolve [30]. Методы Рунге–Кутты с коэффициентами Лобатто IIIC при r стадиях имеют порядок $2r - 2$ (см. [39]). Размер шага s_n метода (9)–(10) определяется в Mathematica автоматически исходя из оценки локальной погрешности решения [29]. Для этого решения, полученные основным методом порядка p с весами b_i, сравниваются с решениями вспомогательного метода порядка $\hat{p}$ с весами $\hat{b}_i$ (по умолчанию $\hat{p} = p - 1$). Коэффициенты c_i и a_{ij} обоих методов совпадают, а значит, совпадают и значения функций $\mathbf{K}_n^i$, что отменяет необходимость второй раз решать нелинейную систему (10).

Замечание 4. В задачах с решениями, достигающими абсолютных значений высоких порядков команде NDSolve с выбранным методом Рунге–Кутты могут потребоваться минуты и десятки минут для построения решения. Существенно сократить время работы метода до нескольких секунд можно увеличением допустимых абсолютной и относительной погрешностей с помощью опций AccuracyGoal $\to q$ и PrecisionGoal $\to p$. При заданных значениях q и p программа попытается сделать так, чтобы погрешность численного решения x не превысила значения $10^{-q}+10^{-p}|x|$.

Замечание 5. В работе [40] показано, что команда NDSolve дает адекватные результаты при решении одиночных ОДУ с запаздыванием, что позволяет перейти к тестированию команды NDSolve для решения жестких систем ОДУ вида (4). Там же проводится обширное сопоставление численных решений с точными решениями модельных тестовых задач реакционно-диффузионного типа (уравнение (2) при $\varepsilon = 0$, $\sigma = 1$); показано, что методы Рунге–Кутты и Гира, встроенные в команду NDSolve, обеспечивают высокую точность полученных результатов.

3. ФОРМУЛИРОВКИ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КЛЕЙНА–ГОРДОНА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Предварительные замечания. Задачи для уравнений в частных производных с запаздыванием могут иметь негладкие или неустойчивые решения, что осложняет их численное интегрирование. Дело в том, что теоретические оценки точности численных решений нелинейных уравнений в частных производных даже при отсутствии запаздывания содержат константы, которые зависят от гладкости рассматриваемого решения и обычно не могут быть вычислены априорно. Практическая сходимость численных методов, основанная на измельчении расчетной сетки, также не может в полной мере гарантировать надежность используемых схем и точность расчетов (особенно вблизи значений параметров задачи, соответствующих быстро осциллирующим или неустойчивым решениям). Эти и другие качественные особенности дифференциальных уравнений с запаздыванием рассматриваются в [18, 41–43].

Наиболее наглядным и весьма эффективным способом оценки области применимости и точности численных методов является прямое сравнение численных и точных решений тестовых задач. Много точных решений уравнений вида (1) и других нелинейных уравнений с запаздыванием (а также систем таких уравнений), полученных в последние годы, приведено в [10, 19, 44–58]. Методы построения точных решений описываются в [2, 59–62]. Эти уравнения и их точные решения содержат ряд свободных параметров (которые можно варьировать) и могут быть полезны для оценки точности соответствующих численных методов.

Формулировки тестовых задач для уравнений типа Клейна–Гордона с запаздыванием. Воспользуемся результатами работ [45, 53, 56] и сформулируем несколько модельных тестовых задач типа Клейна–Гордона с запаздыванием, которые содержат произвольные постоянные.

Тестовая задача 1. Нелинейное уравнение типа Клейна–Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = au_{xx} + u(u - kw), \quad w = u(x, t-\tau), \tag{11}$$

где $a > 0$, $k > 0$ – произвольные постоянные, с начальными данными

$$\begin{gathered} u(x,t) = U_1(x,t) \equiv \exp(ct + cx/\sqrt{a}), \\ u_t(x,t) = c\exp(ct + cx/\sqrt{a}), \\ c = (\ln k)/\tau, \quad -\tau \le t \le 0, \end{gathered} \tag{12}$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = \exp(ct), \quad u(1,t) = \exp(ct + c/\sqrt{a}), \quad t > 0, \tag{13}$$

имеет в области $0 < x < 1$, $t > 0$ точное решение $u = U_1(x,t)$.

Тестовая задача 2. Нелинейное уравнение типа Клейна–Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = au_{xx} + u(u - w), \quad w = u(x, t-\tau), \tag{14}$$

где $a > 0$ – произвольная постоянная, с начальными данными

$$\begin{gathered} u(x,t) = U_2(x,t) \equiv \sin(\beta x/\sqrt{a})\cos(\beta t), \\ u_t(x,t) = -\beta\sin(\beta x/\sqrt{a})\sin(\beta t), \\ \beta = 2\pi/\tau, \quad -\tau \le t \le 0; \end{gathered} \tag{15}$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = \sin(\beta/\sqrt{a})\cos(\beta t), \quad t > 0, \tag{16}$$

имеет в области $0 < x < 1$, $t > 0$ точное решение $u = U_2(x,t)$.

Тестовая задача 3. Нелинейное уравнение типа Клейна–Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = au_{xx} + bu - s(u - kw)^2, \quad w = u(x, t-\tau), \tag{17}$$

где $a > 0$, $\tau > 0$ – произвольные постоянные,

$$\begin{gathered} k > 0, \quad k \ne 1, \quad b = (\ln k)^2/\tau^2 - a, \\ s = b/(1-k)^2, \end{gathered} \tag{18}$$

с начальными данными

$$\begin{gathered} u(x,t) = U_3(x,t) \equiv 1 + \frac{e^{ct+1}}{e^2 - 1}(e^x - e^{-x}), \\ c = \frac{\ln k}{\tau}, \quad -\tau \le t \le 0, \end{gathered} \tag{19}$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = 1, \quad t > 0; \quad u(1,t) = 1 + e^{ct}, \quad t > 0, \tag{20}$$

имеет в области $0 < x < 1$, $t > 0$ точное решение $u = U_3(x,t)$.

Тестовая задача 4. Нелинейное уравнение типа Клейна–Гордона с запаздыванием

$$u_{tt} = au_{xx} + bu[1 - s(u - kw)], \quad w = u(x, t - \tau), \quad (21)$$

где $a > 0$, $\tau > 0$, s – произвольные постоянные,

$$k > 0, \quad b = (\ln k)^2/\tau^2 + a\pi^2/4, \quad (22)$$

с начальными данными

$$u(x,t) = U_4(x,t) \equiv e^{ct}[\cos(\pi x/2) + 2\sin(\pi x/2)], \quad c = (\ln k)/\tau, \quad -\tau \le t \le 0, \quad (23)$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = e^{ct}, \quad t > 0; \quad u(1,t) = 2e^{ct}, \quad t > 0, \quad (24)$$

имеет в области $0 < x < 1$, $t > 0$ точное решение $u = U_4(x,t)$.

4. СОПОСТАВЛЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ И ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА КЛЕЙНА–ГОРДОНА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Предварительные замечания. Численные решения всех тестовых задач были получены путем применения метода прямых в комбинации с методом Рунге–Кутты второго или четвертого порядка или с методом Гира. Расчеты проводились на интервале $0 \le t \le T = 50\tau$ для трех времен запаздывания $\tau = 0.05$, $\tau = 0.1$, $\tau = 0.5$ (иногда дополнительно брались более высокие значения $\tau \ge 1$). Некоторые тестовые задачи не удалось решить на столь большом интервале: процедура интегрирования прерывалась с ошибкой и указанием времени прерывания расчета. Тем не менее, в большинстве случаев адекватное численное решение задачи можно получить, если подходящим образом сократить рассматриваемый временной интервал вычислений.

Под абсолютной и относительной погрешностями численного решения u_m^n тестовой задачи для уравнения типа Клейна–Гордона с запаздыванием будем соответственно понимать величины

$$\sigma_a = \max_{\substack{1\le n\le N\\ 1\le m\le M}} |u_e - u_m^n|, \quad \sigma_r = \max_{\substack{1\le n\le N\\ 1\le m\le M}} |(u_e - u_m^n)/u_e|,$$

где $u_e = u_e(x_m, t_n)$ – значение точного решения этой задачи на временном слое t_n для уравнения m, N – количество шагов по времени, выбираемое командой NDSolve автоматически, M – количество уравнений системы ОДУ, выбираемое вручную.

Сопоставление точных и численных решений тестовых задач.

Тестовая задача 1. Решение $u = U_1$ тестовой задачи (11)–(13) при $a = 1$, $k = 0.5$ является экспоненциально убывающей функцией. В табл. 1 указаны абсолютные погрешности численных решений, полученных комбинацией метода прямых с тремя методами решения системы ОДУ на отрезке $0 \le t \le 50\tau$ для различных M и τ. Из таблицы можно сделать вывод, что все методы хорошо справились с решением задачи, причем метод Рунге–Кутты четвертого порядка дал чуть лучшую аппроксимацию точного решения. С увеличением M абсолютные погрешности уменьшаются; все методы дали второй порядок аппроксимации по пространству. Отметим также, что абсолютные погрешности уменьшаются при увеличении времени запаздывания.

На рис. 2 представлены графики точного решения (сплошная линия) и численного решения, полученного методом Рунге–Кутты второго порядка (кружочки) при $a = 1$, $k = 0.5$ и $\tau = 0.05$, $\tau = 0.5$ для $M = 100$ в моменты времени $\bar{t} \approx 0.1$, $\bar{t} \approx 1$, $\bar{t} \approx 3$, где $\bar{t} = t/\tau$. Графики, полученные другими методами выглядят аналогично и здесь не приводятся.

Тестовая задача 2. Решение $u = U_2$ тестовой задачи (14)–(16) при $a = 1$ представляет собой незатухающий колебательный процесс с периодом τ по обеим переменным. Важно отметить, что это решение быстро осциллирует при малых τ и является сингулярным относительно параметра запаздывания (поскольку решение $u = U_2$ не имеет предела при $\tau \to 0$). Указанное обстоятельство ограничивает возможности используемых здесь численных методов при малых τ, поскольку требует для таких τ большого числа точек сетки по x (например, при $\tau = 0.05$ для достижения приемлемой точности требуется брать более 1000 точек, а при $\tau = 0.1$ и $M = 1000$ абсолютная погрешность вычислений для метода Рунге–Кутты 2-го порядка довольно велика и равна 4.1×10^{-2}).

В табл. 2 указаны абсолютные погрешности численных решений, полученных комбинацией метода прямых с методом Гира и с методом Рунге–Кутты второго порядка на интервале времени $0 \le t \le 50\tau$ для трех умеренных времен запаздывания $\tau = 0.5$, $\tau = 1$, $\tau = 2$ при различном количестве точек сетки по пространственной переменной ($M = 50$, $M = 100$, $M = 200$). Видно, что при увеличении τ и увеличении количества уравнений M уменьшается погрешность численного решения. Погрешность также уменьшается, если уменьшается рассматриваемый интервал времени T (например, при $\tau = 0.5$ оба метода показывают приемлемую аппроксимацию точного реше-

Таблица 1. Абсолютные погрешности численных решений задачи (11)–(13) при $a = 1$, $k = 0.5$ на интервале $0 \le t \le T = 50\tau$

Метод	M	$\tau = 0.05$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 1$
Рунге–Кутты 2-го порядка	10	4.0×10^{-2}	1.2×10^{-2}	2.5×10^{-4}	2.7×10^{-5}
	50	2.0×10^{-3}	5.0×10^{-4}	1.0×10^{-5}	1.9×10^{-6}
	100	5.0×10^{-4}	1.2×10^{-4}	2.6×10^{-6}	9.5×10^{-7}
	200	1.2×10^{-4}	3.0×10^{-5}	7.2×10^{-7}	6.0×10^{-7}
Рунге–Кутты 4-го порядка	10	4.0×10^{-2}	1.2×10^{-2}	2.5×10^{-4}	2.7×10^{-5}
	50	2.0×10^{-3}	5.0×10^{-4}	9.8×10^{-6}	1.1×10^{-6}
	100	5.0×10^{-4}	1.2×10^{-4}	2.5×10^{-6}	2.7×10^{-7}
	200	1.2×10^{-4}	3.0×10^{-5}	6.1×10^{-7}	6.7×10^{-8}
Гира	10	4.0×10^{-2}	1.2×10^{-2}	2.5×10^{-4}	2.7×10^{-5}
	50	2.0×10^{-3}	5.0×10^{-4}	9.8×10^{-6}	1.3×10^{-6}
	100	5.0×10^{-4}	1.2×10^{-4}	2.5×10^{-6}	3.0×10^{-7}
	200	1.2×10^{-4}	3.1×10^{-5}	6.5×10^{-7}	1.3×10^{-7}

ния для $M = 100$ с абсолютной погрешностью 0.08 на интервале $0 \le t \le T = 20\tau$, а при $M = 200$ абсолютная погрешность на этом же интервале времени будет меньше в четыре раза). Погрешности решений, полученных методом Рунге–Кутты четвертого порядка, совпадают с погрешностями решений, полученных методом Гира, и отдельно в таблице не приводятся. Колебания по x имеют период τ, то есть с увеличением времени запаздывания частота колебаний уменьшается, и поэтому для достижения приемлемой погрешности можно использовать меньшее количество точек сетки по пространству. Тестирование методов для умеренных и больших времен запаздывания при больших M не проводилось, так как такие вычисления требуют больших затрат оперативной памяти, но, ввиду сказанного выше, не являются необходимыми. Отметим, что метод Рунге–Кут-

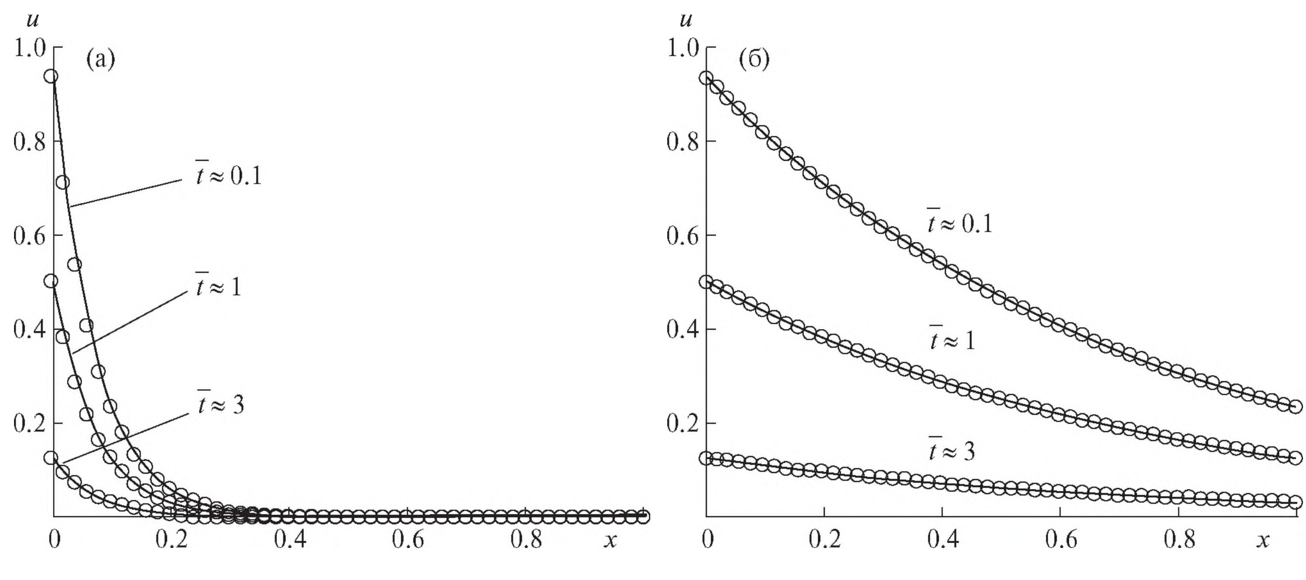

Рис. 2. Точные решения (сплошные линии) и численные решения (кружочки), полученные комбинацией метода прямых и метода Рунге–Кутты второго порядка тестовой задачи (11)–(13) при $a = 1$, $k = 0.5$ и (а) $\tau = 0.05$, (б) $\tau = 0.5$ для $M = 100$ в различные моменты времени $\bar{t} = t/\tau$.

Таблица 2. Абсолютные погрешности численных решений задачи (14)–(16) при $a = 1$ и умеренных временах запаздывания τ на интервале $0 \le t \le T = 50\tau$

Метод	M	$\tau = 0.5$	$\tau = 1$	$\tau = 2$
Рунге–Кутты 2-го порядка	50	0.79	0.2	4.6×10^{-2}
	100	0.2	4.4×10^{-2}	7.7×10^{-3}
	200	4.3×10^{-2}	5.7×10^{-3}	1.9×10^{-3}
Гира	50	0.8	0.2	5.1×10^{-2}
	100	0.2	5.1×10^{-2}	1.3×10^{-2}
	200	5.1×10^{-2}	1.3×10^{-2}	3.2×10^{-3}

ты второго порядка дает чуть более хорошую аппроксимацию точного решения.

На рис. 3 представлены графики точного решения (сплошная линия) и численного решения, полученного методом Рунге–Кутты второго порядка (кружочки) при $a = 1$, $\tau = 0.5$ для $M = 100$ и $M = 200$ в некоторый промежуточный момент времени $t = 15.91$ (момент времени выбран так, чтобы была заметна погрешность численного решения) и в момент времени с максимальной амплитудой $t = 16.00$. Видно, что с увеличением количества уравнений M уменьшается погрешность численного решения. Графики решений, полученных методом Гира, выглядят аналогично и здесь не приводятся.

Тестовая задача 3. Решение $u = U_3$ тестовой задачи (17)–(20) при $a = 1$, $k = 0.5$ является монотонно затухающим по обеим переменным. Все три метода (методы Рунге–Кутты второго и четвертого порядка и метод Гира) адекватно работают на всем интервале вычислений $0 \le t \le T = 50\tau$ при всех рассматриваемых временах запаздывания. Графики численных решений, полученных методом Гира, при $M = 100$ для времен запаздывания $\tau = 0.05$ и $\tau = 0.5$ представлены на рис. 4. Графики решений, полученных другими методами, выглядят аналогично и здесь не приводятся. Абсолютные погрешности численных решений представлены в табл. 3.

Тестовая задача 4. Решение $u = U_4$ тестовой задачи (21)–(24) при $a = 1$, $k = 0.5$, $s = 0.2$ является монотонно затухающим во времени. При малых временах запаздывания ($\tau = 0.05$ и $\tau = 0.1$) все три метода (методы Рунге–Кутты второго и четвертого порядка и метод Гира) адекватно работают на начальном участке $0 \le t \le 10\tau$, а после выхода на асимптоту $u = 0$ начинают сильно отклоняться от точного решения, что связано с неустойчивостью при малых τ стационарного решения $u = 0$ (в линейном приближении доказательство данного факта приведено далее). Поведение методов проиллюстрировано на рис. 5 при $M = 200$ на середине отрезка $x = 0.5$. Графики численных решений, полученных методом Рунге–Кутты четвертого порядка, качественно аналогичны графикам численных решений, полученных методом Гира,

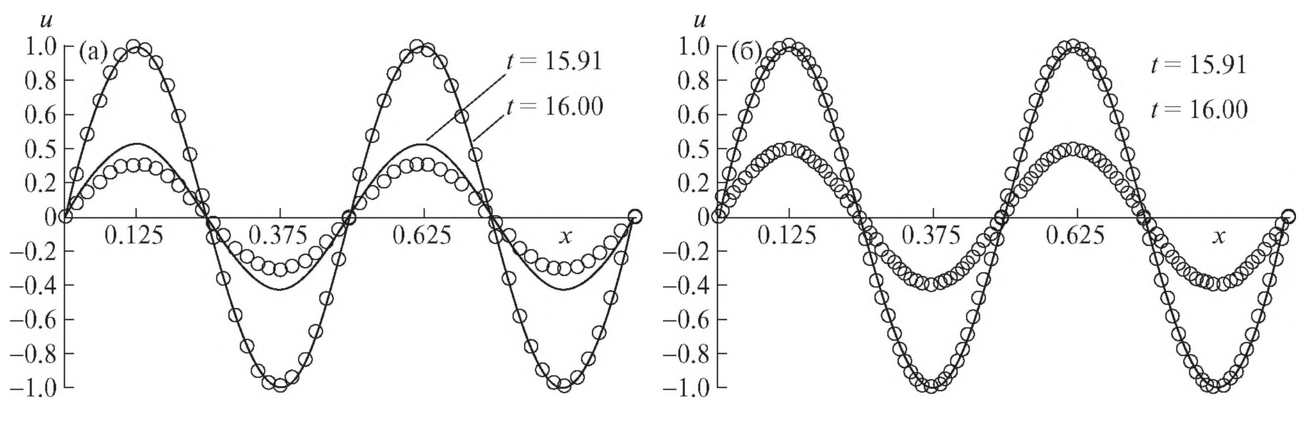

Рис. 3. Точные решения (сплошные линии) и численные решения (кружочки), полученные комбинацией метода прямых и метода Рунге–Кутты второго порядка тестовой задачи (14)–(16) при $a = 1$, $\tau = 0.5$ и (а) $M = 100$, (б) $M = 200$ в моменты времени $t = 15.91$ и $t = 16.00$.

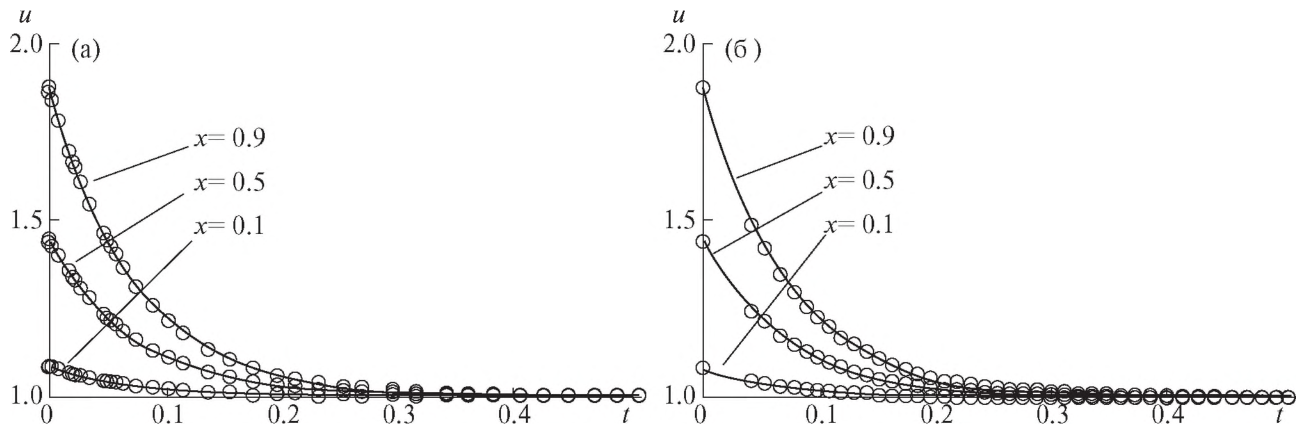

Рис. 4. Точные решения (сплошные линии) и численные решения (кружочки), полученные комбинацией метода прямых и метода Гира, тестовой задачи (17)–(20) при $a = 1$, $k = 0.5$ для $M = 100$ и двух времен запаздывания (а) $\tau = 0.05$, (б) $\tau = 0.5$ при $x = 0.1$, $x = 0.5$, $x = 0.9$.

и здесь опускаются. Из рис. 5 видно, что метод Гира (и метод Рунге–Кутты четвертого порядка) имеет немного больший диапазон применимости по t. В табл. 4 представлены абсолютные погрешности численных решений на интервале $0 \le t \le 10\tau$, когда методы работают хорошо.

При умеренных временах запаздывания ($\tau = 0.5$ и $\tau = 1$) все три метода адекватно работают на всем интервале вычислений $0 \le t \le T = 50\tau$. Абсолютные погрешности численных решений представлены в табл. 4.

Покажем теперь, что при малых значениях $\tau = 0.05$ и $\tau = 0.1$ предельное стационарное состояние рассматриваемого решения ($u \to 0$ при $t \to \infty$) является неустойчивым в линейном приближении. В работе [63] описана общая схема исследования линейной неустойчивости решений нелинейных уравнений с запаздыванием; выведено характеристическое уравнение для задач типа Клейна–Гордона:

$$-\lambda^2 - a(\pi n/L)^2 + f_u(u_0, u_0) + f_w(u_0, u_0)e^{\lambda\tau} = 0, \quad (25)$$

где $n = 1, 2, \ldots$, L – правая граница рассматриваемого отрезка $0 < x < L$. Стационарное решение

Таблица 3. Абсолютные погрешности численных решений задачи (17)–(20) при $a = 1$, $k = 0.5$ на интервале $0 \le t \le T = 50\tau$

Метод	M	$\tau = 0.05$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 1$
Рунге–Кутты 2-го порядка	10	2.1×10^{-6}	5.3×10^{-6}	4.9×10^{-5}	2.2×10^{-3}
	50	9.4×10^{-7}	1.8×10^{-6}	2.5×10^{-6}	6.6×10^{-5}
	100	1.7×10^{-6}	1.2×10^{-6}	1.0×10^{-6}	1.1×10^{-5}
	200	1.3×10^{-6}	1.2×10^{-6}	6.5×10^{-7}	1.4×10^{-6}
Рунге–Кутты 4-го порядка	10	1.2×10^{-6}	4.5×10^{-6}	4.8×10^{-5}	2.3×10^{-3}
	50	5.5×10^{-8}	2.8×10^{-7}	1.9×10^{-6}	7.9×10^{-5}
	100	1.5×10^{-8}	5.6×10^{-8}	4.8×10^{-7}	2.0×10^{-5}
	200	3.4×10^{-9}	1.2×10^{-8}	1.2×10^{-7}	4.9×10^{-6}
Гира	10	1.2×10^{-6}	4.5×10^{-6}	4.8×10^{-5}	2.3×10^{-3}
	50	8.4×10^{-8}	3.2×10^{-7}	1.9×10^{-6}	8.0×10^{-5}
	100	5.0×10^{-8}	9.4×10^{-8}	4.7×10^{-7}	2.1×10^{-5}
	200	6.3×10^{-8}	3.6×10^{-8}	1.3×10^{-7}	5.3×10^{-6}

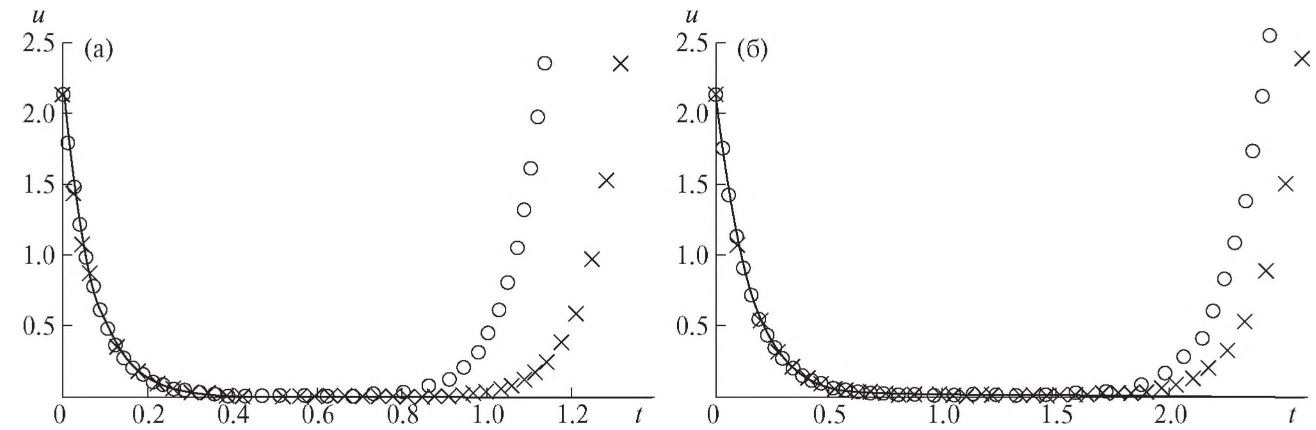

Рис. 5. Точные решения (сплошные линии) и численные решения (метод Рунге—Кутты второго порядка – кружочки, метод Гира – крестики) тестовой задачи (21)—(24) при $a = 1$, $k = 0.5$, $s = 0.2$ в точке $x = 0.5$ для $M = 200$ и двух времен запаздывания (а) $\tau = 0.05$, (б) $\tau = 0.1$.

будет неустойчиво в линейном приближении, если действительная часть хотя бы одного корня λ будет отрицательной. Учитывая, что в задаче (21)—(24) функция $f = bu[1 - s(u - kw)]$, параметры $L = 1$, $a > 0$, $\tau > 0$, $k > 0$, $b = (\ln k)^2/\tau^2 + a\pi^2/4$, и взяв $n = 1$, запишем условие существования отрицательного корня уравнения (25):

$$\tau < \frac{2|\ln k|}{\sqrt{3a}\pi}. \tag{26}$$

Подставляя в (26) используемые значения параметров $a = 1$, $k = 0.5$, получаем, что стационарное решение $u_0 = 0$ задачи (21)—(24) является неустойчивым в линейном приближении при $\tau < 0.254768$.

8. КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Сопоставление численных и точных решений рассмотренных тестовых задач типа Клейна—Гордона с запаздыванием показывает, что при

Таблица 4. Абсолютные погрешности численных решений задачи (21)—(24) при $a = 1$, $k = 0.5$, $s = 0.2$

Метод	M	$0 \le t \le 10\tau$		$0 \le t \le 50\tau$	
		$\tau = 0.05$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.5$	$\tau = 1$
Рунге—Кутты 2-го порядка	10	1.3×10^{-2}	4.1×10^{-2}	2.2×10^{-3}	2.4×10^{-3}
	50	9.4×10^{-4}	1.8×10^{-3}	8.8×10^{-5}	9.6×10^{-5}
	100	5.6×10^{-4}	6.0×10^{-4}	2.3×10^{-5}	2.5×10^{-5}
	200	4.8×10^{-4}	2.9×10^{-4}	6.8×10^{-6}	7.2×10^{-6}
Рунге—Кутты 4-го порядка	10	1.3×10^{-2}	4.1×10^{-2}	2.2×10^{-3}	2.4×10^{-3}
	50	5.4×10^{-4}	1.6×10^{-3}	8.6×10^{-5}	9.4×10^{-5}
	100	1.4×10^{-4}	4.1×10^{-4}	2.2×10^{-5}	2.4×10^{-5}
	200	3.4×10^{-5}	1.0×10^{-4}	5.4×10^{-6}	5.9×10^{-6}
Гира	10	1.3×10^{-2}	4.1×10^{-2}	2.2×10^{-3}	2.4×10^{-3}
	50	5.4×10^{-4}	1.6×10^{-3}	8.6×10^{-5}	9.4×10^{-5}
	100	1.4×10^{-4}	4.1×10^{-4}	2.2×10^{-5}	2.4×10^{-5}
	200	3.5×10^{-5}	1.0×10^{-4}	5.4×10^{-6}	6.1×10^{-6}

умеренных значениях τ (порядка единицы) метод прямых в комбинации со встроенными в программный пакет Mathematica методами Рунге–Кутты и Гира обеспечивает высокую точность полученных результатов. Увеличение числа ОДУ в аппроксимирующей системе уравнений приводит к увеличению точности расчетов. При достаточно малых временах запаздывания и значительном временном интервале интегрирования $0 \le t \le 50\tau$ возможны ситуации с прерыванием вычислений, которые могут быть обусловлены как неустойчивостью решения (или неустойчивостью его предельного стационарного состояния), так и качественными особенностями решений, связанными с быстро осциллирующими колебаниями или сингулярностями погранслойного типа. Тем не менее, в большинстве случаев адекватное численное решение задачи можно получить, если подходящим образом сократить рассматриваемый временной интервал вычислений.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит А.Д. Полянина за внимание к работе и полезные замечания.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310385-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брацун Д.А., Захаров А.П.* К вопросу о численном расчете пространственно-распределенных динамических систем с запаздыванием по времени // Вестник Пермского универ. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. 4. № 12. С. 32–41.
2. *Полянин А.Д., Журов А.И.* Метод функциональных связей: Точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием // Вестник НИЯУ "МИФИ". 2013. Т. 2. № 4. С. 425–431.
3. *Bocharov G.A., Rihan F.A.* Numerical modelling in biosciences using delay differential equations // J. Comp. & Appl. Math. 2000. V. 125. P. 183–199.
4. *Faria T., Trofimchuk S.* Nonmonotone travelling waves in a single species reaction–diffusion equation with delay // J. Dif. Equations. 2006. V. 228. P. 357–376.
5. *Herz A.V.M. et al.* Viral dynamics in vivo: limitations on estimates of intracellular delay and virus decay // Proc. Nat. Acad. Sci, 1996. V. 93. P. 7247–7251.
6. *Huang J., Zou X.* Traveling wavefronts in diffusive and cooperative Lotka–Volterra system with delays // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 271. P. 455–466.
7. *Kyrychko Y.N., Hogan S.J.* On the use of delay equations in engineering applications // J. Vibration and Control. 2010. V. 16. № 7–8. P. 943–960.
8. *Mittler J.E. et al.* Influence of delayed viral production on viral dynamics in HIV-1 infected patients // Mathematical Biosciences. 1998. V. 152. P. 143–163.
9. *Nelson P.W., Perelson A.S.* Mathematical analysis of delay differential equation models of HIV-1 infection // Mathematical Biosciences. 2002. V. 179. P. 73–94.
10. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2014. V. 19. P. 409–416.
11. *Shakeri F., Dehghan M.* Solution of delay differential equations via a homotopy perturbation method // Mathematical and Computer Modelling. 2008. V. 48. P. 486–498.
12. *Walter H.O.* Topics in Delay Differential Equations // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 2014. V. 116. № 2. P. 87–114.
13. *Wu J.H.* Introduction to neural dynamics and signal transmission delay. Berlin: de Gruyter, 2002.
14. *Wu J., Zou X.* Travelling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay // J. Dynamics & Dif. Equations. 2001. V. 13. № 3. P. 651–687.
15. *Lu J.G.* Global exponential stability and periodicity of reaction–diffusion delayed recurrent neural networks with Dirichlet boundary conditions // Chaos, Solitons and Fractals. 2008. V. 35. P. 116–125.
16. *Wu J., Campbell S. A., Bélair J.* Time-Delayed Neural Networks: Stability and Oscillations // Encyclopedia of Computational Neuroscience. N.Y.: Springer, 2014. P. 1–8.
17. *Wang L., Gao Y.* Global exponential robust stability of reaction–diffusion interval neural networks with time-varying delays // Phys. Lett. A. 2006. V. 350. P. 342–348.
18. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г.* Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: математические модели и качественные особенности // Вестник НИЯУ "МИФИ". 2017. Т. 6. № 1. С. 41–55.
19. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г.* Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: численные методы и тестовые задачи // Вестник НИЯУ "МИФИ". 2017. Т. 6. № 2. С. 126–142.
20. *Van der Houwen P.J., Sommeijer B.P., Baker C.T.H.* On the stability of predictor-corrector methods for parabolic equations with delay // IMA J. Numerical Analysis. 1986. V. 6. P. 1–23.
21. *Пименов В.Г.* Численные методы решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Вестн. Удмурт. ун-та. матем. мех. компьют. науки. 2008. № 2. С. 113–116.
22. *Rihan F.A.* Computational methods for delay parabolic and time-fractional partial differential equations // Numerical Methods for Partial Differential Equations. 2010. V. 26. P. 1556–1571.
23. Wolfram Language Documentation [Электронный ресурс] // Delay Differential Equations. URL: http://reference.wolfram.com/mathematica/tutorial/NDSolveDelayDifferentialEquations.html (дата обращения 20.02.2019).
24. Maple Programming Help [Электронный ресурс] // Numeric Delay Differential Equation Examples. URL: http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=examples/NumericDDEs (дата обращения 20.02.2019).
25. MATLAB Documentation [Электронный ресурс] // Delay Differential Equations. URL: http://www.

mathworks.com/help/matlab/delay-differential-equations.html (дата обращения 20.02.2019).

26. *Крайнов А.Ю., Миньков Л.Л.* Численные методы решения задач тепло- и массопереноса. Томск: STT, 2016. 92 с.
27. Wolfram Language Documentation [Электронный ресурс] // The Numerical Method of Lines. URL: http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveMethodOfLines.html (дата обращения 20.02.2019).
28. Wolfram Language Documentation [Электронный ресурс] // NDSolve. URL: http://reference.wolfram.com/language/ref/NDSolve.html (дата обращения 20.02.2019).
29. Wolfram Language Documentation [Электронный ресурс] // "ExplicitRungeKutta" Method for NDSolve. URL: http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveExplicitRungeKutta.html (accessed: 20.02.2019).
30. Wolfram Language Documentation [Электронный ресурс] // "ImplicitRungeKutta" Method for NDSolve. URL: http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveImplicitRungeKutta.html (accessed: 20.02.2019).
31. Wolfram Language Documentation [Электронный ресурс] // IDA Method for NDSolve. URL: http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveIDAMethod.html (дата обращения 20.02.2019).
32. Wolfram Language Documentation [Электронный ресурс] // Numerical Solution of Differential Equations. URL: http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NumericalSolutionOfDifferential Equations.html (дата обращения 20.02.2019).
33. *Hindmarsh A., Taylor A.* User Documentation for IDA: A Differential-Algebraic Equation Solver for Sequential and Parallel Computers. 1999.
34. *Brown P.N., Hindmarsh A.C., Petzold L.R.* Using Krylov Methods in the Solution of Large-Scale Differential-Algebraic Systems // SIAM J. Scientific Computing. 1994. V. 15. P. 1467–1488.
35. *Brown P.N., Hindmarsh A.C., Petzold L.R.* Consistent Initial Condition Calculation for Differential-Algebraic Systems // SIAM J. Scientific Computing. 1998. V. 19. P. 1495–1512.
36. Wolfram Language Documentation [Электронный ресурс] // Norms in NDSolve. URL: http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveVectorNorm.html (accessed: 20.02.2019).
37. *Bellen A., Zennaro M.* Numerical Methods for Delay Differential Equations. Oxford: Oxford University Press, 2013.
38. *Liu H., Sun G.* Implicit Runge–Kutta methods based on Lobatto quadrature formula // Int. J. Computer Mathematics. 2005. V. 82. № 1. P. 77–88.
39. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.
40. *Сорокин В.Г., Полянин А.Д.* Численное интегрирование нелинейных задач реакционно-диффузионного типа с запаздыванием методом прямых // Вестник НИЯУ "МИФИ". 2018. Т. 7. № 3. С. 211–227.
41. *Paul C.A.H.* Developing a delay differential equation solver // Appl. Numer. Math. 1992. V. 9. P. 403–414.
42. *Baker C.T.H., Paul C.A.H.* Issues in the numerical solution of evolutionary delay differential equations // Adv. Comput. Math. 1995. V. 3. P. 171–196.
43. *Shampine L.F., Thompson S.* Numerical Solutions of Delay Differential Equations. In: Delay Differential Equations: Recent Advances and New Directions. N.Y.: Springer, 2009. P. 245–271.
44. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction-diffusion systems // Int. J. Non-Linear Mechanics. 2014. V. 62. P. 33–40.
45. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Вязьмин А.В.* Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения гиперболического типа с запаздыванием: точные решения, глобальная неустойчивость // Мат. моделирование и числ. методы. 2014. № 4. С. 53–73.
46. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction-diffusion equations // Int. J. Non-Linear Mechanics. 2014. V. 59. P. 16–22.
47. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Nonlinear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions // Appl. Math. Lett. 2014. V. 37. P. 43–48.
48. *Полянин А.Д., Журов А.И.* Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием и переменными коэффициентами переноса: решения с обобщенным и функциональным разделением переменных // Мат. моделирование и числ. методы. 2015. № 4 (8). С. 3–37.
49. *Polyanin A.D.* Exact generalized separable solutions to nonlinear delay reaction-diffusion equations // Theor. Found. Chem. Eng. 2015. V. 49. № 1. P. 107–114.
50. *Polyanin A.D.* Exact solutions to new classes of reaction-diffusion equations containing delay and arbitrary functions // Theor. Found. Chem. Eng. 2015. V. 49. № 2. P. 169–175.
51. *Сорокин В.Г.* Точные решения некоторых нелинейных обыкновенных дифференциально-разностных уравнений // Вестник НИЯУ "МИФИ". 2015. Т. 4. № 6. С. 493–500.
52. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Nonlinear delay reaction-diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions // Appl. Math. Lett. 2015. V. 46. P. 38–43.
53. *Сорокин В.Г.* Точные решения некоторых нелинейных уравнений и систем уравнений в частных производных с запаздыванием // Вестник НИЯУ "МИФИ". 2016. Т. 5. № 3. С. 199–219.
54. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time // Int. J. Non-Linear Mechanics. 2013. V. 54. P. 115–126.
55. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact solutions of nonlinear differential-difference equations of a viscous fluid with finite relaxation time // Int. J. Non-Linear Mechanics. 2013. V. 57. P. 116–122.

56. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Vyazmin A.V.* Exact solutions and qualitative features of nonlinear hyperbolic reaction-diffusion equations with delay // Theor. Found. Chem. Eng. 2015. V. 49. № 5. P. 622–635.

57. *Polyanin A.D.* Functional separable solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with variable coefficients // Appl. Math. and Comput. 2019. V. 347. P. 282–292.

58. *Polyanin A.D.* Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients // Appl. Math. Lett. 2019. V. 90. P. 49–53.

59. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2014. V. 19. № 3. P. 417–430.

60. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients // Int. J. Non-Linear Mechanics. 2014. V. 67. P. 267–277.

61. *Полянин А.Д., Журов А.И.* Некоторые методы построения точных решений нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздывающим аргументом и переменными коэффициентами переноса // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2015. Т. 4. № 2. С. 107–118.

62. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* The generating equations method: Constructing exact solutions to delay reaction-diffusion systems and other non-linear coupled delay PDEs // Int. J. Non-Linear Mechan. 2015. V. 71. P. 104–115.

63. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г.* Об устойчивости и неустойчивости решений реакционно-диффузионных и более сложных нелинейных уравнений с запаздыванием // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2018. Т. 7. № 5. С. 389–404.

Vestnik Nacional’nogo Issledovatel’skogo Yadernogo Universiteta “MIFI”, 2019, vol. 8, no. 3, pp. 232–247

Numerical Integration of Nonlinear Klein–Gordon Type Equations with Delay by the Method of Lines

V. G. Sorokin[#]

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia

[#]*e-mail: vsesor@gmail.com*

Received March 2, 2019; revised March 2, 2019; accepted March 12, 2019

Abstract—Qualitative features of numerical integration of initial-boundary value problems for partial differential equations with delay by the method of lines have been described. The method of lines is based on the approximation of spatial derivatives by corresponding finite differences, which allows reducing the initial equation to an approximate system of ordinary differential equations with delay. The system is then solved by the Runge–Kutta methods of the second and fourth orders and by the BDF method, which are built into Wolfram Mathematica. Test problems for nonlinear Klein–Gordon type equations with a constant delay τ whose solutions are expressed in terms of elementary functions have been formulated. The extensive comparison of numerical and exact solutions of the test problems on a significant time interval from 0 to 50τ has been made. It has been found that the numerical method under consideration with moderate delay times ensures high accuracy of the results obtained.

Keywords: nonlinear hyperbolic equations, Klein–Gordon type equations, differential-difference equations, equations with delay, numerical integration, method of lines

DOI: 10.1134/S2304487X19030131

REFERENCES

1. Bratsun D.A., Zakharov A.P., K voprosu o chislennom raschete prostranstvenno-raspredelennyh dinamicheskih sistem s zapazdyvaniem po vremeni (On the numerical calculation of spatially extended dynamical systems with time delay), *Vestnik Permskogo Universiteta. Ser. Matematika, Mekhanika, Informatika*, 2012, vol. 4, no. 12, pp. 32–41 (in Russian).
2. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Metod funktcional’nyh svyazei: Tochnye resheniya reaktcionno-diffuzionnyh uravnenii s zapazdyvaniem (Method of functional relations: Exact solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay), *Vestnik NIYaU MIFI*, 2013, vol. 2, no. 4, pp. 425–431 (in Russian).
3. Bocharov G.A., Rihan F.A. Numerical modelling in biosciences using delay differential equations, *J. Comp. Appl. Math.,* 2000, vol. 125, pp. 183–199.
4. Faria T., Trofimchuk S., Nonmonotone travelling waves in a single species reaction–diffusion equation with delay, *J. Diff. Equations*, 2006, vol. 228, pp. 357–376.
5. Herz A.V.M. et al., Viral dynamics in vivo: limitations on estimates of intracellular delay and virus decay, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1996, vol. 93, pp. 7247–7251.

6. Huang J., Zou X., Traveling wavefronts in diffusive and cooperative Lotka–Volterra system with delays, *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, vol. 271, pp. 455–466.
7. Kyrychko Y.N., Hogan S.J., On the use of delay equations in engineering applications, *J. Vibration and Control*, 2010, vol. 16, no. 7–8, pp. 943–960.
8. Mittler J.E. et al., Influence of delayed viral production on viral dynamics in HIV-1 infected patients, *Math. Biosci.*, 1998, vol. 152., pp. 143–163.
9. Nelson P.W., Perelson A.S., Mathematical analysis of delay differential equation models of HIV-1 infection, *Math. Biosci.*, 2002, vol. 179, pp. 73–94.
10. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, pp. 409–416.
11. Shakeri F., Dehghan M., Solution of delay differential equations via a homotopy perturbation method. *Mathematical and Computer Modelling*, 2008, vol. 48, pp. 486–498.
12. Walter H.O., Topics in Delay Differential Equations, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 2014, vol. 116, no. 2, pp. 87–114.
13. Wu J.H. *Introduction to Neural Dynamics and Signal Transmission Delay*, Berlin: De Gruyter, 2002.
14. Wu J., Zou X., Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay, *J. Dynamics Dif. Equations*, 2001, vol. 13. no. 3, pp. 651–687.
15. Lu J.G., Global exponential stability and periodicity of reaction–diffusion delayed recurrent neural networks with Dirichlet boundary conditions. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, vol. 35, pp. 116–125.
16. Wu J., Campbell S.A., Bélair J., Time-Delayed Neural Networks: Stability and Oscillations, In: *Encyclopedia of Computational Neuroscience*, N.Y.: Springer, 2014, pp. 1–8.
17. Wang L., Gao Y., Global exponential robust stability of reaction–diffusion interval neural networks with time-varying delays, *Phys. Lett. A*, 2006, vol. 350, pp. 342–348.
18. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Reaktcionno-diffuzionnye uravneniya s zapazdyvaniem: Matematicheskie modeli i kachestvennye osobennosti (Reaction-diffusion equations with delay: Mathematical models and qualitative features), *Vestnik NIYaU MIFI*, 2017, vol. 6, no. 1, pp. 41–55 (in Russian).
19. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Reaktcionno-diffuzionnye uravneniya s zapazdyvaniem: Chislennye metody i testovye zadachi (Reaction-diffusion equations with delay: Numerical methods and test problems), *Vestnik NIYaU MIFI*, 2017, v. 6, no. 2, pp. 126–142 (in Russian).
20. Van der Houwen P.J., Sommeijer B.P., Baker C.T.H., On the stability of predictor-corrector methods for parabolic equations with delay, *IMA J. Numerical Analysis*, 1986, vol. 6, pp. 1–23.
21. Pimenov V.G., Chislennye metody resheniya uravneniya teploprovodnosti s zapazdyvaniem (Numerical methods of solution for heat equation with delay), *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Ser. Matematika, Mekhanika, Kompjuternye Nauki*, 2008, no. 2, pp. 113–116.
22. Rihan F.A., Computational methods for delay parabolic and time-fractional partial differential equations, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2010, vol. 26, pp. 1556–1571.
23. Wolfram Language Documentation [electronic resource] // Delay Differential Equations. URL: http://reference.wolfram.com/mathematica/tutorial/NDSolveDelayDifferentialEquations.html (date of the application 20.02.2019).
24. Maple Programming Help [electronic resource] // Numeric Delay Differential Equation Examples. URL: http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=examples/ NumericDDEs (date of the application 20.02.2019).
25. MATLAB Documentation [electronic resource] // Delay Differential Equations. URL: http://www.mathworks.com/help/matlab/delay-differential-equations.html (date of the application 20.02.2019).
26. Krainov A.Yu., Min'kov L.L., *Chislennye metody resheniya zadach teplo- i massoperenosa* (Numerical methods of solving heat-mass transfer problems), Tomsk: STT, 2016, 92 p. (in Russian).
27. Wolfram Language Documentation [electronic resource] // The Numerical Method of Lines. URL: http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveMethodOfLines.html (date of the application 20.02.2019).
28. Wolfram Language Documentation [electronic resource] // NDSolve. URL: http://reference.wolfram.com/language/ref/NDSolve.html (date of the application 20.02.2019).
29. Wolfram Language Documentation [electronic resource] // "ExplicitRungeKutta" Method for NDSolve. URL: http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveExplicitRungeKutta.html (date of the application 20.02.2019).
30. Wolfram Language Documentation [electronic resource] // "ImplicitRungeKutta" Method for NDSolve. URL: http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveImplicitRungeKutta.html (date of the application 20.02.2019).
31. Wolfram Language Documentation [electronic resource] // IDA Method for NDSolve. URL: http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveIDAMethod.html (date of the application 20.02.2019).
32. Wolfram Language Documentation [electronic resource] // Numerical Solution of Differential Equations. URL: http://reference.wolfram.com/language/tutorial/NumericalSolutionOfDifferentialEquations.html (date of the application 20.02.2019).
33. Hindmarsh A., Taylor A., *User Documentation for IDA: A Differential-Algebraic Equation Solver for Sequential and Parallel Computers*, 1999.
34. Brown P.N., Hindmarsh A.C., Petzold L.R., Using Krylov Methods in the Solution of Large-Scale Differential-Algebraic Systems, *SIAM J. Scientific Computing*, 1994, vol. 15, pp. 1467–1488.
35. Brown P.N., Hindmarsh A.C., Petzold L.R. Consistent Initial Condition Calculation for Differential-Algebraic Systems, *SIAM J. Scientific Computing*, 1998, vol. 19, pp. 1495–1512.
36. Wolfram Language Documentation [electronic resource] // Norms in NDSolve. URL: http://reference.

wolfram.com/language/tutorial/NDSolveVectorNorm.html (date of the application 20.02.2019).

37. Bellen A., Zennaro M., *Numerical Methods for Delay Differential Equations*, Oxford: Oxford University Press, 2013.
38. Liu H., Sun G., Implicit Runge–Kutta methods based on Lobatto quadrature formula, *Int. J. Computer Mathematics*, 2005, vol. 82, no. 1, pp. 77–88.
39. Hairer E., Wanner G., *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Berlin: Springer, 1996.
40. Sorokin V.G., Polyanin A.D., Chislennoe integrirovanie nelinejnykh zadach reakcionno-diffusionnogo tipa s zapazdyvaniem metodom pryamykh (Numerical Integration of Nonlinear Reaction–Diffusion Problems with Delay by the Method of Lines), *Vestnik NIYaU MIFI*, 2018, vol. 7, no 3, pp. 211–227 (in Russian).
41. Paul C.A.H., Developing a delay differential equation solver, *Appl. Numer. Math.*, 1992, vol. 9, pp. 403–414.
42. Baker C.T.H., Paul C.A.H., Issues in the numerical solution of evolutionary delay differential equations, *Adv. Comput. Math.*, 1995, vol. 3, pp. 171–196.
43. Shampine L.F., Thompson S., Numerical Solutions of Delay Differential Equations, In: *Delay Differential Equations: Recent Advances and New Directions*, N.Y.: Springer, 2009, pp. 245–271.
44. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction-diffusion systems, *Int. J. Non-Linear Mechan.*, 2014, vol. 62, pp. 33–40.
45. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Vyazmin A.V., Nelinejnye reakcionno-diffuzionnye uravnenija giperbolicheskogo tipa s zapazdyvaniem: tochnye reshenija, global'naja neustojchivost' (Nonlinear delay reaction-diffusion equations of hyperbolic type: Exact solutions and global instability), *Mat. modelir. i chisl. metody*, 2014, no. 4, pp. 53–73 (in Russian).
46. Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction-diffusion equations, *Int. J. Non-Linear Mechan*, 2014, vol. 59, pp. 16–22.
47. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Nonlinear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions, *Appl. Math. Lett.*, 2014, vol. 37, pp. 43–48.
48. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Nelinejnye reakcionno-diffuzionnye uravnenija s zapazdyvaniem i peremennymi koehfficientami perenosa: reshenija s obobshhennym i funkcional'nym razdeleniem peremennykh (Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: generalized and functional separable solutions), *Mat. modelir. i chisl. metody*, 2015, vol. 8, pp. 3–37 (in Russian).
49. Polyanin A.D., Exact generalized separable solutions to nonlinear delay reaction-diffusion equations, *Theor. Found. Chem. Eng*, 2015, vol. 49, no. 1, pp. 107–114.
50. Polyanin A.D., Exact solutions to new classes of reaction-diffusion equations containing delay and arbitrary functions, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2015, vol. 49, no. 2, pp. 169–175.
51. Sorokin V.G., Tochnye reshenija nekotorykh nelinejnykh obyknovennykh differencial'no-raznostnykh uravnenij (Exact solutions of some nonlinear ordinary differential-difference equations), *Vestnik NIYaU MIFI*, 2015, vol. 4, no. 6, pp. 493–500 (in Russian).
52. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Nonlinear delay reaction-diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions, *Appl. Math. Lett.*, 2015, vol. 46, pp. 38–43.
53. Sorokin V.G., Tochnye reshenija nekotorykh nelinejnykh uravnenij i sistem uravnenij v chastnykh proizvodnykh s zapazdyvaniem (Exact solutions of some nonlinear partial differential equations with delay and systems of such equations), *Vestnik NIYaU MIFI*, 2016, vol. 5, no. 3, pp. 199–219 (in Russian).
54. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time, *Int. J. Non-Linear Mechan.*, 2013, vol. 54, pp. 115–126.
55. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Exact solutions of nonlinear differential-difference equations of a viscous fluid with finite relaxation time, *Int. J. Non-Linear Mechan.*, 2013, vol. 57, pp. 116–122.
56. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Vyazmin A.V., Exact solutions and qualitative features of nonlinear hyperbolic reaction-diffusion equations with delay, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2015, vol. 49, no. 5, pp. 622–635.
57. Polyanin A.D., Functional separable solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with variable coefficients, *Appl. Mathematics and Computation*, 2019, vol. 347, pp. 282–292.
58. Polyanin A.D., Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients, *Appl. Math. Lett.*, 2019, vol. 90, pp. 49–53.
59. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 417–430.
60. Polyanin A.D., Zhurov A.I., The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients, *Int. J. Non-Linear Mechan.*, 2014, vol. 67, pp. 267–277.
61. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Nekotorye metody postroenija tochnykh reshenij nelinejnykh reakcionno-diffuzionnykh uravnenij s zapazdyvajushhim argumentom i peremennymi koehfficientami perenosa (Some methods for the construction of exact solutions of nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients), *Vestnik NIYaU MIFI*, 2015, vol. 4, no. 2, pp. 107–118 (in Russian).
62. Polyanin A.D., Zhurov A.I., The generating equations method: Constructing exact solutions to delay reaction-diffusion systems and other non-linear coupled delay PDEs, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2015, vol. 71, pp. 104–115.
63. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Ob ustojchivosti i neustojchivosti reshenij reakcionno-diffusionnykh i bolee slozhnykh nelinejnykh uravnenij s zapazdyvaniem (On the Stability and Instability of Solutions of Reaction–Diffusion and More Complex Nonlinear Equations with Delay), *Vestnik NIYaU MIFI*, 2018, vol. 7, no. 5, pp. 389–404 (in Russian).