ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2023, т. 12, № 1, с. 39–51

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 537.8

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

© 2023 *С.П. Баутин*[1,*], *О.А. Карелина*[1,], *А.Г. Обухов*[2,**]**

[1]*Снежинский физико-технический институт НИЯУ МИФИ, Снежинск, 456776, Россия*

[2]*Тюменский индустриальный университет, Тюмень, 625000, Россия*

[*]*e-mail: spbautin@mail.ru*

[**]*e-mail: karelina-1999@inbox.ru*

[***]*e-mail: agobukhov@inbox.ru*

Поступила в редакцию: 03.03.2023

После доработки: 03.03.2023

Принята к публикации: 14.03.2023

В работе в случае двух независимых пространственных переменных рассматривается система уравнений движения сплошной среды при постоянных значениях плотности и температуры. Решения задачи Коши для этой нелинейной системы уравнений с частными производными представлены в виде тригонометрических рядов. Построена бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения коэффициентов тригонометрических рядов, зависящих от времени. Доказана сходимость используемых тригонометрических рядов. Также доказана теорема о кратных частотах, описывающая появление в решении гармоник, которых не было в начальных условиях.

Ключевые слова: система уравнений движения, задача Коши, тригонометрические ряды, сходимость, теорема о кратных частотах.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.251

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день основным способом построения решений начально-краевых задач для нелинейных уравнений с частными производными являются разностные методы, при которых численно определяется конечное число значений искомых функций в отдельных изолированных точках. Но очень часто под вопросом остаются надежность и адекватность получаемых разностными методами численных результатов.

Среди аналитических методов получения решений нелинейных уравнений с частными производными одним из основных методов является использование конечных или бесконечных представлений с применением различных систем базисных функций для разных функциональных пространств.

На протяжении более чем двухсотлетней истории исследований уравнений с частными производными одним из востребованных функциональных базисов является базис из тригонометрических функций. Хотя в 1804 г. при первых изложениях предложенного Ж.Б.Ж. Фурье подхода к решению линейного уравнения теплопроводности современники ставили чуть ли не в вину то, что он не использует степенные ряды. Заметим, что через семьдесят лет, в 1874 г., С.В. Ковалевская привела свой знаменитый контрпример, показывающий, что линейное уравнение теплопроводности может не иметь решения в виде сходящегося ряда по степеням времени [1, 2]. К сожалению, эффективность тригонометрических рядов Фурье и более поздних обобщений этого подхода имеет место только при решении линейных задач.

Чуть более десяти лет назад, т.е. спустя двести лет после первых работ Ж.Б.Ж. Фурье, методика применения бесконечных тригонометрических рядов была эффективно применена для математического моделирования одномерных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа при построении решений нелинейной системы уравнений с частными производными смешанного типа [3]. Но доказать сходимость используемых тригонометрических рядов тогда не удавалось. Проведенные численные расчеты [3] показали «машинную» сходимость используемых представлений: при увеличении числа слагаемых в конечных отрезках тригонометрических рядов, используемых для приближенного описания решений, отличия в разных приближениях фактически стремились к нулю.

Недавно, применяя описанную методику представления с помощью тригонометрического ряда решения задачи Коши для уравнения Бюргерса, являющегося нелинейным уравнением с частными производными, удалось доказать сходимость построенного тригонометрического ряда [4]:

$$u_t + uu_x = \mu_0 u_{xx}:$$
$$u(t,x)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^o \sin(kx).$$

Этот факт и послужил отправной точкой для исследований, представленных в данной работе: построение в виде тригонометрических рядов решений нелинейной системы из двух уравнений с частными производными в случае двух независимых пространственных переменных.

1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Рассматривается полная система уравнений Навье-Стокса, решения которой описывают движения сжимаемой вязкой теплопроводной сплошной среды [2]:

$$\begin{cases} \rho_t + \mathbf{V}\cdot\nabla\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{V} = 0, \\ \rho[\mathbf{V}_t + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}] + \dfrac{1}{\gamma}(T\nabla\rho + \rho\nabla T) = \\ = \mu_0\left[\dfrac{1}{4}\nabla(\mathrm{div}\,\mathbf{V}) + \dfrac{3}{4}\Delta\mathbf{V}\right], \\ \rho(T_t + \mathbf{V}\cdot\nabla T) + (\gamma-1)\rho\,T\,\mathrm{div}\,\mathbf{V} = \\ \quad = k_0\Delta T + \Phi(\gamma,\mu_0,\mathbf{V}), \end{cases}$$

где ρ – плотность газа; $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$ – вектор скорости газа в декартовых переменных; T – температура; μ_0, k_0 – положительные постоянные коэффициенты вязкости и теплопроводности; $\gamma = = \mathrm{const} > 1$; $\Phi(\gamma,\mu_0,\mathbf{V})$ – диссипативная функция:

$$\Phi = \frac{\mu_0\gamma(\gamma-1)}{2}\left\{\left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)^2 + \right.\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)^2\right] +$$
$$\left. + \frac{3}{2}\left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)^2\right]\right\}.$$

Эта система уравнений в дифференциальной форме передает законы сохранения массы, импульса и энергии.

Далее из полной системы уравнений Навье-Стокса исследуются только уравнения движения в предположении постоянных значений термодинамических параметров – плотности $\rho = 1$ и температуры $T = 1$:

$$\mathbf{V}_t + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = \mu_0\left[\tfrac{1}{4}\nabla(\mathrm{div}\,\mathbf{V}) + \tfrac{3}{4}\Delta\mathbf{V}\right]. \quad (1.1)$$

В системе (1.1) введены безразмерные переменные. При этом, за масштаб скорости u_{00} взята величина $\frac{1}{3}\cdot 10^3$ м/с, близкая к скорости звука в воздухе при нормальных условиях. За масштаб расстояния x_{00} берется величина, соответствующая геометрическим характеристикам конкретного исследуемого течения.

В данной работе рассматривается случай отсутствия зависимости от z и равенства нулю третей компоненты вектора скорости газа:

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0;\ v_3 = 0,$$

и вводятся обозначения $u = v_1$, $v = v_2$. В этом случае система (1.1), записанная в нормальной форме и в подробной записи, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_t = -uu_x - vu_y + \mu_0\left(u_{xx} + \frac{3}{4}u_{yy} + \frac{1}{4}v_{xy}\right), \\ v_t = -uv_x - vv_y + \mu_0\left(\frac{3}{4}v_{xx} + v_{yy} + \frac{1}{4}u_{xy}\right), \end{cases} \quad (1.2)$$

а третье уравнение системы (1.1) выполняется тождественно.

Далее о системе (1.2) и будет говориться как о системе уравнений движения.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

С учетом результатов из монографий [2, 3] используются следующие представления искомых функций u, v:

$$u(t,x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}u_{k,1}(t)\sin(kx)+ \\ +\sum_{m=1}^{\infty}u_{m,2}(t)\sin(my),$$
$$v(t,x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}v_{k,1}(t)\sin(kx)+ \\ +\sum_{m=1}^{\infty}v_{m,2}(t)\sin(my). \quad (2.1)$$

У искомых коэффициентов, зависящих от времени, стоят двойные индексы: первый индекс соответствует частоте гармоники, перед которой стоит этот коэффициент; второй индекс равен единице, если коэффициент стоит перед гармоникой, зависящей от пространственной переменной *x*; второй индекс равен двойке, если коэффициент стоит перед гармоникой, зависящей от пространственной переменной *y*.

В систему (1.2) подставляются представления (2.1), соответствующие выражения для производных искомых функций, и получаются такие два уравнения:

$$\sum_{k=1}^{\infty}u'_{k,1}(t)\sin(kx)+\sum_{k=1}^{\infty}u'_{k,2}(t)\sin(ky)= \\ =\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}mu_{k,1}(t)\,u_{m,1}(t)\sin(kx)\cos(mx)- \\ -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}ku_{m,2}(t)\,u_{k,1}(t)\sin(my)\cos(kx)- \\ -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}mv_{k,1}(t)\,u_{m,2}(t)\sin(kx)\cos(my)- \\ -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}kv_{m,2}(t)\,u_{k,2}(t)\sin(my)\cos(ky)- \\ -\mu_0\sum_{k=1}^{\infty}k^2u_{k,1}(t)\sin(kx)- \\ -\frac{3}{4}\mu_0\sum_{k=1}^{\infty}k^2u'_{k,2}(t)\sin(ky), \quad (2.2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\upsilon'_{k,1}(t)\sin(kx)+\sum_{k=1}^{\infty}\upsilon'_{k,2}(t)\sin(ky)= \\ =-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}mu_{k,1}(t)\upsilon_{m,1}(t)\sin(kx)\cos(mx)- \\ -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}ku_{m,2}(t)\upsilon_{k,1}(t)\sin(my)\cos(kx)- \\ -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}mv_{k,1}(t)\upsilon_{m,2}(t)\sin(kx)\cos(my)- \\ -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}kv_{m,2}(t)\upsilon_{k,2}(t)\sin(my)\cos(ky)- \\ -\frac{3}{4}\mu_0\sum_{k=1}^{\infty}k^2\upsilon_{k,1}(t)\sin(kx)- \\ -\mu_0\sum_{k=1}^{\infty}k^2\upsilon_{k,2}(t)\sin(ky). \quad (2.3)$$

Уравнение (2.2) проецируется на базис $\{\sin(x),\ \sin(2x),\ \sin(3x),\dots\}$ Для этого уравнение последовательно умножается на $\sin(\ell x)$, $\ell=1,2,\dots$, а затем каждое из полученных соотношений интегрируется по x и по y на своих отрезках от $-\pi$ до $+\pi$. С учетом значений конкретных определенных интегралов и при введении константы $b_{k\ell m}$:

$$b_{k\ell m}=\begin{cases}1, \text{если } m=|k-\ell|;\\ -1, \text{если } m=k+\ell;\\ 0, \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

получается следующая бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$u'_{\ell,1}(t)=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}mu_{k,1}(t)u_{m,1}(t)b_{k,\ell,m}- \\ -\mu_0\ell^2u_{\ell,1}(t);\quad \ell=1,2,3,\dots \quad (2.4)$$

В каждое уравнение бесконечной системы (2.4) входит бесконечное число искомых функций: только $u_{\ell,1}(t),\ell=1,2,\dots$

Затем уравнение (2.3) проецируется на базис $\{\sin(x),\sin(2x),\sin(3x),\dots\}$. Для этого уравнение (2.3) последовательно умножается на $\sin(\ell x)$, $\ell=1,2,\dots$, а затем каждое из полученных соотношений интегрируется по x и по y на своих отрезках от $-\pi$ до $+\pi$. В результате проецирования получается следующая бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$v'_{\ell,1}(t)=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}mu_{k,1}(t)v_{m,1}(t)b_{k,\ell,m}- \\ -\frac{3}{4}\mu_0\ell^2v_{\ell,1}(t);\quad \ell=1,2,3,\dots \quad (2.5)$$

В каждое уравнение бесконечной системы (2.5) также входит бесконечное число искомых функций, но уже одновременно $u_{k,1}(t)$ и $v_{m,1}(t)$.

После этого уравнение (2.2) проецируется теперь на базис

$$\{\sin(y),\sin(2y),\sin(3y),\dots\},$$

и в результате этого получается следующая бесконечная система, обыкновенных дифференциальных уравнений для бесконечного числа, искомых функций $u_{\ell,2}(t),\ell=1,2,\dots$:

$$u'_{\ell,2}(t)=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}kv_{m,2}(t)u_{k,2}(t)b_{\ell,m,k}- \\ -\frac{3}{4}\mu_0\ell^2u_{\ell,2}(t);\quad \ell=1,2,3,\dots \quad (2.6)$$

Здесь

$$b_{\ell mk}\begin{cases}1, \text{если } \ell=k+m;\\ 1, \text{если } \ell=m-k;\\ -1, \text{если } \ell=k-m;\\ 0, \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Затем уравнение (2.3) проецируется на базис $\{\sin(y),\sin(2y),\sin(3y),\dots\}$, и получается следующая бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений для бесконечного числа искомых функций $v_{\ell,2}(t), \ell = 1, 2, \ldots$:

$$v'_{\ell,2}(t) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} k v_{k,2}(t) v_{m,2}(t) b_{\ell,m,k} - \\ -\mu_0 \ell^2 v_{\ell,2}(t); \;\; \ell = 1, 2, 3, \ldots \quad (2.7)$$

В итоге для коэффициентов представлений (2.1) получились четыре группы бесконечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (2.4)–(2.7).

Заметим, что эта система (2.4)–(2.7) достаточно специфически расщепилась:

1) в систему уравнений (2.4) входят только искомые $u_{k,1}$, и эту систему можно решать отдельно от систем (2.5)–(2.7);

2) в системы (2.4), (2.5) входят искомые со вторым индексом «единица», и искомые из систем (2.4), (2.5) стоят в разложении (2.1) перед гармониками, зависящими только от x;

3) если система (2.4) решена, $u_{k,1}$ известны, то система (2.5) становится системой, куда входят только искомые $\upsilon_{k,1}$, и, следовательно, ее тоже можно решать отдельно;

4) в систему уравнений (2.7) входят только искомые $\upsilon_{k,2}$, и эту систему можно решать отдельно от систем (2.4)–(2.6);

5) в системы (2.6), (2.7) входят искомые со вторым индексом «двойка», и искомые из систем (2.6), (2.7) стоят в разложении (2.1) перед гармониками, зависящими только от y;

6) если система (2.7) решена $\upsilon_{k,2}$ известны, то система (2.6) становится системой, куда входят только искомые $u_{k,2}$, и, следовательно, ее тоже можно решать отдельно;

7) из приведенных пунктов следует, что при нахождении коэффициентов разложений (2.1) решаемые задачи разделились по пространственным переменным – можно отдельно находить коэффициенты, стоящие перед гармониками, зависящими только от пространственной переменной x, и отдельно можно находить коэффициенты в рядах, зависящих от пространственной переменной y.

Для построения единственных решений систем (2.5)–(2.7) необходимо задать начальные условия с помощью счетного числа констант

$$u^o_{k,1} = u_{k,1}(t)|_{t=0}; \;\; u^o_{k,2} = u_{k,2}(t)|_{t=0};$$

$$v^o_{k,1} = v_{k,1}(t)|_{t=0}; \;\; v^o_{k,2} = v_{k,2}(t)|_{t=0};$$

которые однозначно определяют начальные условия для решений системы (1.2):

$$u(t,x,y)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} u^o_{k,1}\sin(kx) + \quad (2.7)$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty} u^o_{m,2}\sin(my),$$
$$v(t,x,y)|_{t=0} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} v^o_{k,1}\sin(kx) + \sum_{m=1}^{\infty} v^o_{m,2}\sin(my), \quad (2.8)$$

в предположении абсолютной (потребуется в дальнейшем) сходимости числовых рядов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u^o_{k,1}\,; \;\; \sum_{m=1}^{\infty} u^o_{m,2}\,; \;\; \sum_{k=1}^{\infty} \upsilon^o_{k,1}\,; \;\; \sum_{m=1}^{\infty} \upsilon^o_{m,2}. \quad (2.9)$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Поскольку в бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (2.4) входят только коэффициенты из представления

$$u_1(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,1}(t)\sin(kx), \quad (3.1)$$

то вначале доказывается сходимость ряда (3.1) при оговоренном выше предположении, что заданный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u^o_{k,1},$$

входящий в набор (2.9), сходится абсолютно.

Задание коэффициентов $u^o_{k,1}$ определяет начальные условия для системы (2.4), а также при оговоренном условии обеспечивает абсолютную сходимость ряда

$$u_1(t,x)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} u^o_{k,1}\sin(kx) \quad (3.2)$$

при всех значениях x.

Для обоснования сходимости ряда (3.1) рассматриваются две вспомогательные задачи.

Первая вспомогательная задача:

$$\begin{cases} U_t = -UU_x + \mu_0 U_{xx}, \\ U(t,x)\Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} u^o_{k,1}\sin(kx). \end{cases} \quad (3.3)$$

Она является соответствующей задачей Коши для уравнения Бюргерса [4], и ряд в начальных условиях для задачи (3.3) совпадает с рядом из правой части равенства (3.2).

Если решение задачи Коши (3.3) строить в виде пока формального ряда:

$$U(t,x)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t)\sin(kx), \qquad (3.4)$$

с начальными условиями для коэффициентов

$$U_k(0) = u^o_{k,1}$$

то после того, как ряд (3.4) подставляется в уравнение из системы (3.3), и полученное уравнение проецируется на систему базисных гармоник $\sin(\ell x), \ell = 1, 2, \dots$ для коэффициентов $U_k(t)$ получается следующая бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$U'_\ell(t) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m\, U_k(t) U_m(t) b_{k,\ell,m} - \mu_0 \ell^2 U_\ell(t); \quad \ell = 1, 2, 3, \dots$$

Эта система отличается от системы (2.4) только обозначением искомых функций: в выписанной системе используется обозначение $U_k(t)$, а в системе (2.4) – $u_{k,1}(t)$

Поэтому, если будет доказана абсолютная сходимость ряда (3.4) в некоторой окрестности точки $t = 0$ и при всех значениях x, то из этого будет следовать абсолютная сходимость ряда (3.1) при тех же значениях независимых переменных t, x.

Для доказательства сходимости ряда (3.4), решающего задачу (3.3), рассматривается вторая вспомогательная задача:

$$\begin{cases} V_t = -V V_x - \mu_0 V, \\ V\big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} u^o_{k,1}\sin(kx). \end{cases} \qquad (3.5)$$

Поскольку уравнение в задаче (3.5) является уравнением типа Ковалевской, то, по теореме Ковалевской [1, 2], задача (3.5) имеет в некоторой окрестности точки ($t = 0$, $x = 0$) единственное аналитическое решение, которое можно представить в следующем виде:

$$V(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} V^1_n(x)\frac{t^n}{n!}, \; V^1_n(x) = \frac{\partial^n V(t,x)}{\partial t^n}\Big|_{t=0}, \qquad (3.6)$$

и выписанный ряд абсолютно сходится в некоторой окрестности точки ($t = 0$, $x = 0$).

Если решение задачи (3.5) строить в виде ряда (3.6), то для коэффициентов ряда (3.6) получается следующая цепочка рекуррентных соотношений:

$$V^1_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u^o_{k,1}\sin(kx),$$

$$V^1_1(x) = -V^1_0(x)\left[V^1_0(x)\right]' - \mu_0 V^1_0(x),$$

$$V^1_{n+1}(x) = -\sum_{m=0}^{\infty} C^m_n V^1_m(x)\left[V^1_{n-m}(x)\right]' - \mu_0 V^1_n(x), \quad n \ge 1.$$

Очевидно, что все коэффициенты ряда (3.6) представимы в виде

$$V^1_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} V^1_{1,k}\sin(kx),$$

$$V^1_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} V^1_{n+1,k}\sin(kx), \quad n \ge 1,$$

и являются абсолютно сходящимися рядами при любых значениях x.

Поскольку в абсолютно сходящихся рядах можно переставлять и группировать слагаемые, и суммы рядов от этого не меняются, то единственное решение задачи (3.5) представимо в виде

$$V(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} V^1_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(V^1_{n,k}\frac{t^n}{n!}\right)\sin kx = $$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t)\sin kx. \qquad (3.7)$$

И сам ряд (3.7), и его коэффициенты являются абсолютно сходящимися рядами в некоторой окрестности точки $t = 0$, т.е. при $|t| \le t_1$, t_1, > 0 и при всех значениях x.

Эта окрестность $|t| \le t_1$; определяет некоторую область Ω в пространстве $\mathbf{R}^\infty$, в которой изменяются значения $V_k(t), k \ge 1$ при $|t| \le t_1$, и при которых ряд (3.7) сходится.

Ряд (3.7) подставляется в уравнение из задачи (3.5), полученное соотношение также проецируется на функциональный базис

$$\{\sin(x),\ \sin(2x),\ \sin(3x), \dots\}.$$

В результате получается бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$V'_\ell(t) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m V_k(t) V_m(t) b_{k,\ell,m} - -\mu_0 \ell^2 V_\ell(t); \quad \ell = 1, 2, 3, \dots \qquad (3.8)$$

Для системы (3.8) ставятся соответствующие начальные условия:

$$V_k(t)|_{t=0} = u^o_{k,1}; \quad k = 1,2,3,\dots. \tag{3.9}$$

Поскольку ряд (3.7) удовлетворяет уравнению из задачи (3.5), то он и его коэффициенты удовлетворяют любым следствиям уравнения из задачи (3.5); т.е. коэффициенты $V_k(t)$ удовлетворяют уравнениям системы (3.8), и при этом все ряды в системе (3.8) сходятся. Значения V_k принадлежат описанной выше области Ω.

Поскольку система (3.8) отличается от системы для $U_k(t)$ только линейно входящими последними слагаемыми в соответствующих уравнениях, то ряды, стоящие в правых частях указанной системы, тоже сходятся, когда значения U_k, принадлежат области Ω. В том числе и потому, что $U_k(0) = V_k(0) = u^o_{k,1}$.

Лемма. Поскольку справедливо неравенство

$$|u^o_{k,1}| = |U_k(0)| \le |V_k(0)| = |u^o_{k,1}|; \quad k = 2,3,\dots, \tag{3.10}$$

то при $|t| \le t_1$ для решений задач Коши (3.3), (3.5) выполняются неравенства

$$|U_k(t)| \le |V_k(t)|; \quad k \ge 2. \tag{3.11}$$

Для доказательства леммы рассматривается по одному соответствующему уравнению из систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих поведение коэффициентов решений задач (3.3) и (3.5), начальные условия для них, а также для краткости записи вводятся упрощенные обозначения:

$$\begin{cases} U'_\ell(t) = f_\ell(t,\vec{U}) - \mu_0 \ell^2 U_\ell(t), \\ V'_\ell(t) = f_\ell(t,\vec{V}) - \mu_0 V_\ell(t), \\ U_\ell(0) = V_\ell(0) = u^o_{\ell,1};\ \ell \ge 2, \end{cases} \tag{3.12}$$

поскольку в системах обыкновенных дифференциальных уравнений для $U_k(t)$, $V_k(t)$ соответствующие ряды сходятся.

По теореме Коши у задач (3.12) для $U_k(t)$, $V_k(t)$ в некоторой окрестности точки $t = 0, U_\ell = V_\ell = u^o_{\ell,1}$ существуют единственные аналитические решения, и поэтому искомые функции из этих задач можно представить в виде

$$U_\ell(t) = U^o_\ell + \left[f(0,\overrightarrow{U^o}) - \mu_0 \ell^2 U^o_\ell\right]t + t^2 f_1(t),$$

$$V_\ell(t) = U^o_\ell + \left[f(0,\overrightarrow{U^o}) - \mu_0 \ell^2 U^o_\ell\right]t + t^2 f_2(t),$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$ – аналитические в окрестности точки $t = 0$ функции.

Поэтому

$$V_\ell(t) - U_\ell(t) =$$
$$= \mu_0(\ell^2 - 1)U^0_\ell t + t^2[f_2(t) - f_1(t)]. \tag{3.13}$$

При дальнейшем использовании равенства (3.13) принципиально то, что пока $\ell \ge 2$.

Пусть $U^o_\ell > 0$, тогда в некоторой окрестности точки $t = 0$ функции $V^o_\ell(t)$и $U^o_\ell(t)$ сохраняют положительные знаки, и поэтому из равенства (3.13) следует, что в некоторой окрестности точки $t = 0$ при $t \ge 0$ имеет место следующее неравенство:

$$V_\ell(t) \ge U_{\ell(t)},$$

и поэтому нужное соотношение

$$|U_\ell(t)| \le |V_{\ell(t)}|$$

установлено.

Пусть $U^o_\ell < 0$, тогда в некоторой окрестности точки $t = 0$ функции $V_\ell(t)$ и $U_{\ell(t)}$ будут отрицательными, и при $t \ge 0$ из равенства (3.13) следует, что

$$V_\ell(t) \le U_{\ell(t)} \le 0,$$

и нужное неравенство

$$|U_\ell(t)| \le |V_{\ell(t)}|$$

также установлено. Лемма доказана.

Из леммы следует, что ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} |V_k(t)||\sin(kx)|$$

мажорирует ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} |U_k(t)||\sin(kx)|,$$

и, следовательно, ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} U_k(t)\sin(kx),$$

являющийся рядом (3.4) без первого слагаемого, абсолютно сходится в области

$$\{|t| \le t_1, t_1 > 0;\ -\infty < x < +\infty\}. \tag{3.14}$$

А тогда ряд (3.4) без первого слагаемого, а также и весь ряд (3.4) там же сходятся абсолютно в области (3.14). Поэтому и ряд (3.1), задающий функцию $u_1(t,x)$, также абсолютно сходится в той же области (3.14).

Что и требовалось доказать.

Доказательство сходимости ряда,

$$v_2(t,y)=\sum_{k=1}^{\infty} v_{k,2}(t)\sin(ky) \qquad (3.15)$$

практически уже получено.

Коэффициенты ряда (3.15) определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.7), которая, как уже сказано выше, совпадает с системой (2.4) с точностью до обозначений. Повторение приведенного выше доказательства абсолютной сходимости ряда (3.1) дает доказательство абсолютной сходимости ряда (3.15) в области

$$\{|t|\le t_2, t_2>0;\ -\infty<y<+\infty\}.$$

Только при повторе доказательства необходимо поменять соответствующие обозначения: x на y; u_1 на v_2; $v_{k,1}$ на $v_{k,2}$; $u_{k,1}^o$ на $v_{k,1}^o$. В том числе вместо задач (3.3), (3.5) надо рассматривать такие задачи:

$$\begin{cases} U_t=-UU_y+\mu_0 U_{yy}, \\ U(t,y)|_{t=0}=\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_{k,2}^o\sin(ky)\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_t=-VV_y-\mu_0 V, \\ V(t,y)|_{t=0}=\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_{k,2}^o\sin(ky)\,. \end{cases}$$

Для доказательства сходимости рядов

$$v_1(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty} v_{k,1}(t)\sin(kx), \qquad (3.16)$$

$$u_2(t,y)=\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,2}(t)\sin(ky), \qquad (3.17)$$

поступаем следующим образом.

Поскольку сходимость рядов (3.1) и (3.15) доказана, то будем считать эти функции известными, и чтобы отличать уже найденные функции от ненайденных, над известными поставим знак тильды: $\tilde u_1, \tilde v_2, \tilde u_{k,1}, \tilde v_{k,2}$.

Тогда системы (2.5) и (2.6) запишутся следующим образом:

$$v_{\ell,1}'(t)=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m\tilde u_{k,1}(t)v_{m,1}(t)b_{k,\ell,m}- \\ -\frac{3}{4}\mu_0\ell^2 v_{\ell,1}(t);\quad \ell=1,2,3,\ldots$$

$$u_{\ell,2}'(t)=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} k\tilde v_{m,2}(t)u_{k,2}(t)b_{\ell,m,k}- \\ -\frac{3}{4}\mu_0\ell^2 u_{\ell,2}(t);\quad \ell=1,2,3,\ldots$$

Для доказательства сходимости рядов (3.16), (3.17) рассматриваются следующие две вспомогательные задачи:

$$\begin{cases} U_t=-\tilde u_1(t,x)U_x+\frac{3}{4}\mu_0 U_{xx}; \\ U(t,x)|_{t=0}=\sum_{k=1}^{\infty} v_{k,1}^o\sin(kx)\,, \end{cases} \qquad (3.18)$$

$$\begin{cases} V_t=-\tilde u_1(t,x)V_x-\frac{3}{4}\mu_0 V; \\ V(t,x)|_{t=0}=\sum_{k=1}^{\infty} v_{k,1}^o\sin(kx)\,, \end{cases} \qquad (3.19)$$

Далее предполагается, что абсолютно сходится числовой ряд из набора, (2.9) со слагаемыми $u_{k,1}^o$, что обеспечивает абсолютную сходимость при всех значениях x рядов, задающих начальные условия в задачах (3.18), (3.19).

Затем ряды

$$U(t,y)=\sum_{k=1}^{\infty} U_k(t)\sin(ky)\,, \qquad (3.20)$$

$$V(t,y)=\sum_{k=1}^{\infty} V_k(t)\sin(ky) \qquad (3.21)$$

подставляются в уравнения из задач соответственно (3.18), (3.19). Полученные уравнения проецируются на базис из $\sin(ky)$. В результате для $U_k(t)$, $V_k(t)$ получаются следующие системы:

$$U_\ell'(t)=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} k\tilde v_{m,2}(t)U_k(t)b_{\ell,m,k}- \\ -\frac{3}{4}\mu_0\ell^2 U_\ell(t); \qquad (3.22)$$

$$V_{\ell,1}'(t)=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m\tilde u_{k,1}(t)V_{m,1}(t)b_{k,\ell,m}- \\ \frac{3}{4}\mu_0\ell^2 V_{\ell,1}(t); \qquad (3.23)$$

где $\ell=1,2,\ldots$

После этого повторяются ранее приведенные рассуждения. А именно, по теореме Ковалевской, задача (3.19) имеет в некоторой окрестности точки ($t=0$, $x=0$) единственное аналитическое решение, которое представляется в виде абсолютно сходящегося ряда (3.21), и коэффициенты которого удовлетворяют системе (3.23).

Далее доказывается лемма о справедливости неравенств

$$|V_k(t)|>|U_k|,\ \ k\ge 2,$$

что обеспечивает сходимость ряда (3.20), коэффициенты которого определяются из системы (3.22).

А так как система (3.22) совпадает с системой (2.7) (с точностью до обозначений) при условии известности и сходимости ряда (3.1), то из сходимости ряда (3.22) следует сходимость ряда (3.16) в некоторой области

$$\{|t| \le t_3, t_3 > 0;\ -\infty < x < +\infty\}$$

Доказательство абсолютной сходимости ряда (3.17) в некоторой области

$$\{|t| \le t_4, t_4 > 0;\ -\infty < y < +\infty\}$$

проводится аналогично при рассмотрении двух других вспомогательных задач:

$$\begin{cases} U_t = -\tilde{u}_2(t,y)U_y + \dfrac{3}{4}\mu_0 U_{yy}, \\ U(t,y)|_{t=0} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,2}^{o}\sin(ky)\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_t = -\tilde{u}_2(t,y)V_y - \dfrac{3}{4}\mu_0 V, \\ V(t,y)|_{t=0} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,2}^{o}\sin(ky), \end{cases}$$

и в предположении сходимости числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,2}^{o}.$$

Таким образом, доказана абсолютная сходимость рядов (2.1), представляющих решение соответствующей задачи Коши для системы (1.2) в области

$$\{|t| \le t_*,\ t_* > 0;\ -\infty < x < +\infty;\ -\infty < y < +\infty\}.$$

4. ТЕОРЕМЫ О КРАТНЫХ ЧАСТОТАХ

Ранее [3–5] при исследовании одномерных течений вязкого теплопроводного газа были доказаны две теоремы о кратных частотах, которые передают очень важное свойство решений нелинейных уравнений с частными производными, моделирующих реальные воздушные течения.

Первая теорема о кратных частотах говорит о том, что, если начальные данные для исходной нелинейной системы уравнений с частными производными содержат гармонику только с одной частотой ℓ_0, то в решении этих систем могут присутствовать гармоники только с частотами, кратными ℓ_0.

Вторая теорема о кратных частотах говорит о том, что, если для рассматриваемой системы с частными производными ненулевые начальные данные имеются только у гармоник с частотами $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n$, то в решении этих систем могут присутствовать гармоники только с частотами, кратными $d = \text{НОД}(\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n)$.

Естественно, что первая теорема есть частный случай второй теоремы.

Теоремы о кратных частотах не имеют места в случае представления с помощью тригонометрических рядов решений линейных уравнений. Это связано с тем, что в решении линейных уравнений при $t > 0$ присутствуют только те гармоники, которые есть в начальных условиях при $t = 0$. Новые гармоники в решениях линейных уравнений не возникают.

В случае нелинейных систем уравнений с частными производными в решении при $t > 0$ появляются новые гармоники с частотами, не совпадающими с частотами гармоник в начальных условиях, полностью согласующимися с теоремами о кратных частотах [3]. По музыкальной терминологии, гармоники с новыми частотами называются «обертоны» и «унтертоны» (см. [3]).

Теоремы о кратных частотах доказываются при исследовании свойств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, из которых определяются коэффициенты как бесконечных тригонометрических рядов, так и коэффициенты только начальных отрезков рядов. В данной работе ими являются системы (2.4)–(2.7).

Ниже доказаны четыре теоремы о кратных частотах.

Пусть задан набор целых положительных чисел

$$L_1 = \{\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n\},$$

и число $d_1 = \text{НОД}(\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n)$ – наибольший общий делитель чисел $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n$. Введем множество

$$L_{d_1} = \{d_1, 2d_1, 3d_1\ \dots\}$$

Теорема 1. Пусть для системы (2.4) при $t = 0$ заданы начальные условия для всех коэффициентов $u_{\ell,1}(t)$, причем – нулевые для функций, у которых первый индекс не делится на d_1:

$$u_{\ell,1}(0) = 0, \text{если } \ell \notin L_{d_1}. \qquad (4.1)$$

Тогда функции с таким первым индексом ℓ, который не принадлежит множеству L_{d_1}, тождественно равны нулю:

$$u_{\ell,1}(t) \equiv 0, \text{если } \ell \notin L_{d_1}$$

При доказательстве теоремы для функции $u_{\ell,1}(t)$ с указанным первым индексом строим ломаную Эйлера по формуле

$$u_{\ell,1}(t_{j+1}) = u_{\ell,1}(t_j) + \tau \cdot f\left(t_j, u_{\ell,1}(t_j)\right),$$

т.е.

$$u_{\ell,1}(t_{j+1}) = u_{\ell,1}(t_j) + \tau \times$$
$$\times \left[-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m u_{k,1}(t_j) u_{m,1}(t_j) b_{k\ell m} - \mu_0 \ell^2 u_{\ell,1}(t_j)\right],$$

где точки t_j лежат на отрезке интегрирования $[0, t_*]$ из области сходимости тригонометрических рядов с постоянным шагом $\tau = t_{j+1} - t_j$.

Докажем, что, если ℓ не делится на d_1, т.е. $\ell \notin L_{d_1}$, то $u_{\ell,1}(t_1) = 0$.

Пусть $t_0 = 0$, $u_{\ell,1}(0) = 0$. Тогда имеем такие равенства:

$$u_{\ell,1}(t_1) = 0 + \tau \times$$
$$\times \left[-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m u_{k,1}(0) u_{m,1}(0) b_{k\ell m} - \mu_0 \ell^2 \cdot 0\right].$$

В двойной сумме ненулевыми могут остаться только слагаемые с такими произведениями и $u_{k,1}(0)u_{m,1}(0)b_{k\ell m}$, у которых все три сомножителя не нули. Сомножители $u_{k,1}(0)$, $u_{m,1}(0)$ отличны от нуля, если оба первых индекса k и m делятся на d_1, так как в противном случае эти произведения были бы равны нулю в силу начальных условий. Предположим, что в этом случае $b_{k\ell m} \neq 0$. Формула для этой константы задает отличную от нуля величину $b_{k\ell m}$ только в случае , когда ℓ есть линейная комбинация чисел *k*, *m*. Но если оба числа, k и m делятся на d_1, то тогда и ℓ делится на d_1. Это противоречит исходному предположению (4.1), и, следовательно $b_{k\ell m} = 0$.

Поэтому в рассматриваемом случае (4.1) все слагаемые в двойных суммах равны нулю, и тогда $u_{\ell,1}(t_1) = 0$.

По индукции предполагаем, что, если $\ell \notin L_{d_1}$, то

$$u_{\ell,1}(t_j) = 0, j = 1, 2, \dots, J,$$

и момент времени $t = t_{J+1} = t_*$, лежит в области сходимости тригонометрических рядов по переменной t: $|t| \leq t_*, t_* > 0$.

При подстановке в формулу Эйлера уже найденных значений на предыдущих шагах получается равенство

$$u_{\ell,1}(t_{J+1}) = 0 + h \times$$
$$\times \left[-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m u_{k,1}(t_J) u_{m,1}(t_J) b_{k\ell m} - \mu_0 \ell^2 \cdot 0\right].$$

При повторе только что проведенных рассуждений получается, что $u_{\ell,1}(t_{J+1}) = 0$. Следовательно, при $\ell \notin L_{d_1}$, ломаная Эйлера на отрезке $0 \leq t \leq t_{J+1} = t_*$, тождественно равна нулю. При стремлении h к нулю ломаная сходится к точному решению, и тогда при $\ell \notin L_{d_1}$

$$u_{\ell,1}(t) \equiv 0$$

в области сходимости тригонометрических рядов.

Значит, отличными от нуля решениями системы (2.4) могут быть только те $u_{\ell,1}(t)$, у которых первый индекс принадлежит множеству L_{d_1}.Теорема 1 доказана.

Теоремой 1 установлено, что в случае (4.1), т.е. когда при t = 0 в начальных условиях для функции

$$u_1(t, x) = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,1}(t) \sin(kx) \qquad (4.2)$$

присутствуют гармоники только с частотами из L_1, то при $|t| \leq t_*$ в решении (4.2) присутствуют гармоники только с частотами из L_{d_1}. Пусть задан набор целых положительных чисел

$$L_2 = \{q_0, q_1, \dots, q_m\},$$

и число $d_2 = \text{НОД}(d_1, q_0, q_1, \dots, q_m,)$ – наибольший общий делитель чисел: $d_1, q_0, q_1, \dots, q_m$. Введем множество

$$L_2 = \{d_2, 2d_2, 3d_2, \dots\}.$$

Теорема 2. Пусть для системы (4.2) при $t = 0$ заданы начальные условия для всех коэффициентов $u_{\ell,1}(t)$, как в Теореме 1, и для всех коэффициентов $v_{\ell,1}(t)$. Причем для тех функций $v_{\ell,1}(t)$, у которых первый индекс не делится на d_2, заданы нулевые начальные условия:

$$v_{\ell,1}(0) = 0, \text{если } \ell \notin L_{d_2}. \qquad (4.3)$$

Тогда,

$$v_{\ell,1}(t) \equiv 0, \text{если } \ell \notin L_{d_2},$$

т.е. тогда тождественно равны нулю те решения системы (2.5), у которых первый индекс не принадлежит множеству L_{d_2}.

Доказательство Теоремы 2 здесь не приводится, поскольку схема этого доказательства полностью повторяет схему доказательства Теоремы 1, естественно, при замене в нужных местах $u_{\ell,1}$ на $v_{\ell,1}$ и учете сомножителя $\frac{3}{4}$ у последних слагаемых в уравнениях (2.5).

Теоремой 2 установлено, что в случае (4.3), т.е. когда при $t = 0$ в начальных условиях для функции

$$v_1(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{k,1}(t)\sin(kx) \qquad (4.4)$$

присутствуют гармоники только с частотами из множества L_2, то при $|t| \le t_*$ в решении (4.3) присутствуют гармоники только с частотами из L_{d_2}.

Заметим, что содержание множества L_{d_2}, зависит не только от частот $\{q_0, q_1, \ldots, q_m\}$, но и от d_1, т.е. и от частот $\{\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n\}$. Также заметим, что частоты из L_{d_1}, и L_{d_2}, в общем случае разные, хотя имеют непустое пересечение. Следовательно, можно говорить, что данные частоты разделены по направлениям распространения гармоник: вдоль оси *Ox* в составе первой компоненты вектора *V* и вдоль оси *Oy* в составе второй компоненты вектора скорости газа, которая тем не менее зависит от *x*.

Далее рассматриваются свойства решений систем уравнений (2.6) и (2.7). В систему (2.7) входят только неизвестные $v_{k,2}$ в (2.6) входят неизвестные и $v_{k,2}$, и $u_{k,2}$. Поэтому для свойств решений системы (2.7) справедлива приведенная ниже Теорема 3, аналогичная Теореме 1. А для свойств решений системы (2.6) – Теорема 4, аналогичная Теореме 2.

Пусть заданы наборы целых положительных чисел:

$$L_3 = \{s_0, s_1, \ldots, s_{n_1}\}; L_{d_3} = \{d_3, 2d_3, 3d_3, \ldots\},$$

где число $d_3 = \text{НОД}(s_0, s_1, \ldots, s_{n_1},)$, наибольший общий делитель чисел $s_0, s_1, \ldots, s_{n_1}$ и поэтому целые числа, входящие в множество L_{d_3}, делятся на d_3.

Теорема 3. Пусть для системы (2.7) при $t = 0$ заданы начальные условия для всех коэффициентов $v_{\ell,2}(0)$ причем – нулевые для функций, у которых первый индекс не делится на d_3:

$$v_{\ell,2}(0) = 0, \text{если } \ell \notin L_{d_3}. \qquad (4.5)$$

Тогда функции с таким первым индексом ℓ, который не принадлежит множеству L_{d_3}, тождественно равны нулю:

$$v_{\ell,2}(t) \equiv 0, \text{если } \ell \notin L_{d_3}$$

Теоремой 3 установлено, что в случае (4.5), т.е. когда при $t = 0$ в начальных условиях для функции

$$v_2(t,y) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{k,2}(t)\sin(ky) \qquad (4.6)$$

присутствуют гармоники только с частотами из L_3, то при $|t| \le t_*$ в решении (4.6) присутствуют гармоники только с частотами из L_{d_3}.

Пусть заданы наборы целых положительных чисел:

$$L_4 = \{r_0, r_1, \ldots, r_{m_1}\}; L_{d_4} = \{d_4, 2d_4, 3d_4 \ldots\},$$

где число $d_4 = \text{НОД}\,(d_3, r_0, r_1, \ldots, r_{m_1})$ – наибольший общий делитель чисел $d_3, r_0, r_1, \ldots, r_{m_1}$, и поэтому целые числа, входящие в множество L_{d_4}, делятся на d_4.

Теорема 4. Пусть для системы (2.6) при $t = 0$ заданы начальные условия для всех коэффициентов $v_{\ell,2}(t)$, как в Теореме 3, и для всех коэффициентов $u_{\ell,2}(t)$. Причем, для тех функций $u_{\ell,2}(t)$, у которых первый индекс не делится на d_4, заданы нулевые начальные условия:

$$u_{\ell,2}(0) = 0, \text{если } \ell \notin L_{d_4}. \qquad (4.7)$$

Тогда

$$u_{\ell,2}(t) \equiv 0, \text{если } \ell \notin L_{d_4},$$

тождественно равны нулю те решения системы (2.6), у которых первый индекс не принадлежит множеству L_{d_4}.

Теоремой 4 установлено, что в случае (4.7), т.е. когда при $t = 0$ в начальных условиях для функции

$$u_2(t,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,2}(t)\sin(ky) \qquad (4.8)$$

присутствуют гармоники только с частотами из множества L_4, то при $|t| \le t_*$ в решении (4.8) присутствуют гармоники только с частотами из L_{d_4}.

Заметим, что содержание множества L_{d_4} зависит не только от частот $\{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{m_1}\}$, но и от d_3, т.е. и от частот $\{s_0, s_1, \dots, s_{n_1}\}$. Также заметим, что частоты из L_{d_3} и L_{d_4} в общем случае разные, хотя имеют непустое пересечение.

Следовательно, можно говорить, что данные частоты также разделены по направлениям распространения гармоник: вдоль оси *Oy* в составе первой компоненты вектора *V* и вдоль оси *Ox* в составе второй компоненты вектора скорости газа, которая тем не менее зависит от *y*.

Теоремы 3, 4 доказываются аналогично Теоремам 1, 2 с учетом явного вида коэффициента $b_{\ell,m,k}$, также приведенного в п. 2.

Итак, в данном пункте установлены связи между частотами

$$\{\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n\} \text{ для } u_{\ell,1}(0,x),$$

$$\{q_0, q_1, \dots, q_n\} \text{ для } v_{\ell,1}(0,x),$$

$$\{s_0, s_1, \dots, s_{n_1}\} \text{ для } v_{\ell,2}(0,y),$$

$$\{r_0, r_1, \dots, r_{m_1}\} \text{ для } u_{\ell,2}(0,y),$$

гармоник, которые входят в начальные условия для системы уравнений с частными производными, с частотами

$$L_{d_1}; L_{d_2};\ L_{d_3};\ L_{d_4}$$

ненулевых гармоник, присутствующих при $0 \le t \le\ t_*$ в функциях $u\,(t,x,y)$ $v\,(t,x,y)$, решающих при заданных начальных условиях систему (1.2).

Впервые теоремы о кратных частотах были доказаны в работе [5] в случае одной независимой пространственной переменной. Были рассмотрены представления одномерных решений полной системы уравнений Навье-Стокса в виде бесконечных тригонометрических рядов. Подробно эти теоремы представлены в монографии [3]. В работе [6] в случае других представлений одномерных решений полной системы уравнений Навье-Стокса доказаны теоремы о кратных частотах, которые ранее были доказаны в работах [3, 5], с одним обобщением: во второй теореме d определено для счетного набора частот $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n, \dots$ [6].

Доказанные теоремы о кратных частотах в случае одной пространственной переменной установили, что в исследуемых решениях будут присутствовать гармоники только с частотами d, *2d, 3d, 4d, 5d, …* . Поэтому исследуемые в работе решения не обладают свойством «удвоения частот», которое иногда без обоснования предполагают в течениях вязкой сплошной среды [7].

Многие ученые утверждают, что факты о возникающих кратных частотах установлены давно. В связи с этим ниже представлены два соображения, второе из которых есть опровержение выдвигаемого некоторыми учеными указанного возражения.

1. Как природное явление, конечно, известен факт, что при возбуждении гармоник с одними частотами с течением времени фиксируются и новые гармоники, значения частот которых полностью согласуются с теоремами о кратных частотах. В музыке этим природным явлением пользуются давно [8]. Например, в произведении Р. Шумана «Карнавал», а также в произведениях М. Равеля, К. Дебюсси и других композиторов есть так называемые «немые аккорды», когда заранее освобожденные и покоящиеся струны начинают звучать после того, как зазвучали другие струны, естественно, с другой частотой собственных колебаний. Поэтому объяснить это явление резонансом нельзя. Благодаря доказанным теоремам о кратных частотах [3, 5] установлено, что это природное явление есть следствие общих законов движения воздуха как сплошной среды: законов сохранения массы, импульса и энергии, проявляющихся как соответствующие свойства решений нелинейных уравнений с частными производными.

2. Если продифференцировать квадратичное выражение от гармоник с конкретными частотами и воспользоваться формулами тригонометрии, то в полученном выражении появятся гармоники с новыми частотами, которые будут иметь значения в полном соответствии с теоремами о кратных частотах. И именно это соображение наши оппоненты считают главным подтверждением своего возражения. Но данное свойство установлено как свойство дифференциальных операторов, а не как свойство решений нелинейных уравнений с частными производными. Авторам данной работы и нашим оппонентам по данному вопросу неизвестны работы (за исключением работ [3–6]), в которых хотя бы для формальных решений конкретных нелинейных уравнений с частными производными был бы доказан факт, соответствующий приведенным в работе теоремам о кратных

частотах. Заметим, что при доказательстве теорем о кратных частотах [3, 5] принципиально использовались следующие факты: нормальная форма уравнений с частными производными относительно производных по времени; присутствие в уравнениях только квадратичных нелинейностей. И эти теоремы о кратных частотах доказаны благодаря соответствующим свойствам конкретных определенных интегралов от произведения трех гармоник, а не в результате дифференцирования квадратичных полиномов от гармоник.

Доказанные в данной работе теоремы о кратных частотах в случае двух независимых пространственных переменных установили более сложную зависимость между частотами гармоник, присутствующих в начальных условиях, и частотами отличных от нуля гармоник, входящих при $t > 0$ в решение.

В конце данного пункта заметим, что полученные результаты не отменяют наличие «немого аккорда», а только еще раз подтверждают его. Ведь возбуждение струн музыкальных инструментов порождает распространяющиеся во всех трех пространственных направлениях одинаковые гармоники. То есть возникновение «немого аккорда» происходит в случае совпадения между собой множеств L_1, L_2, L_3, L_4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ковалевская С.В.* Научные труды. К теории дифференциальных уравнений с частными производными. М.: Изд-во АН СССР, 1948. 368 с.

2. *Баутин С.П.* Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.

3. *Баутин С.П., Замыслов В.Е., Скачков П.П.* Математическое моделирование тригонометрическими рядами одномерных течений вязкого теплопроводного газа. Новосибирск: Наука, Екатеринбург: УрГУПС, 2014. 91 с.

4. *Баутин С.П., Замыслов В.Е.* Представление решений уравнения Бюргерса тригонометрическими рядами // Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ, 2022, том 11, № 4, с. 305–318.

5. *Замыслов В.Е.* Стоячие волны как решения полной системы уравнений Навье–Стокса в одномерном случае // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18. № 2. С. 33–45.

6. *Курмаева К.В., Титов С.С.* Специальные ряды с кратными частотами для одномерных течений сжимаемого газа в обобщении теорем В.Е. Замыслова // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. 2016. № 3. С. 18–28.

7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.

8. *Алдошина И., Приттс Р.* Музыкальная акустика. СПб.: Композитор, 2006. 260 с.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 1, p. 39–51

SUBMISSION OF DECISIONS SYSTEM OF EQUATIONS OF MOTION USING TRIGONOMETRIC SERIES

S.P. Bautin[1,*], O.A. Karelina[1,**], A.G. Obukhov[2,**]
[1]*Snezhinsk Institute of Physics and Technology, National Research Nuclear University MEPhI, Snezhinsk, 456776 Russia*
[2]*Tyumen Industrial University, Tyumen, 625000 Russia*
[*]*e-mail: spbautin@mail.ru*
[**]*e-mail: karelina-1999@inbox.ru*
[***]*e-mail: agobukhov@inbox.ru*

Received March 3, 2023; revised March 3, 2023; accepted March 14, 2023

In this paper, in the case of two independent spatial variables, a system of equations of motion of a continuous medium with constant values of density and temperature is considered. Solutions of the Cauchy problem for this nonlinear system of partial differential equations are presented in the form of trigonometric series. An infinite system of ordinary differential equations is constructed to find the coefficients of time-dependent trigonometric series. The convergence of the trigonometric series used is proved. The theorem on multiple frequencies is also proved, describing the appearance of harmonics in the solution, which did not exist in the initial conditions.

Keywords: system of equations of motion, Cauchy problem, trigonometric series, convergence, multiple frequency theorem.

REFERENCE

1. *Kovalevskaya S.V.* Nauchnye trudy. K teorii differencial'nyh uravnenij s chastnymi proizvodnymi. [Research Works. To the Theory of Differential Equations with Partial Derivatives]. Moscow, Izd-vo AN SSSR Publ. 1948. 368 s. (in Russian).

2. *Bautin S.P.* Harakteristicheskaya zadacha Koshi i ee prilozheniya v gazovoj dinamike. [The characteristic problem of the Koshi and its applications in gas dynamics]. Novosibirsk: Nauka Publ. 2009. 368 s. (in Russian).

3. *Bautin S.P., Zamyslov V.E., Skachkov P.P.* Matematicheskoe modelirovanie trigonometricheskimi ryadami odnomernyh techenij vyazkogo teploprovodnogo gaza. [Mathematical modeling by trigonometric series of one-dimensional flows of viscous heat conducting gas]. Novosibirsk, Nauka Publ., Ekaterinburg: UrGUPS Publ. 2014. 91 p. (in Russian).

4. *Bautin S.P., Zamyslov V.E.* Predstavlenie reshenie uravnenija Burgersa trigonometricheskimi rajdami. [Present the solutions of Burger′s equation as thetrigonom serias]. Vestnik nacyonalnogo issledovatelskogo ajdernogo universiteta «MIFI», 2022, v. 11. No. 4. P. 305–318.

5. *Zamyslov V.E.* Stoyachie volny kak resheniya polnoj sistemy uravnenij Nav'e--Stoksa v odnomernom sluchae [Standing waves as solutions to the full system of Navier-Stokes equations in the one-dimensional case]. Vychislitel'nye tekhnologii. 2013. Vol. 18. No. 2. Pp. 33–45 (in Russian).

6. *Kurmaeva K.V., Titov S.S.* Special'nye ryady s kratnymi chastotami dlya odnomernyh techenij szhimaemogo gaza v obobshchenii teorem V.E. Zamyslova [Special series with multiple frequencies for one-dimensional compressible gas flows in generalization of theorems of V.E. Zamyslov]. Vestnik Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta putej soobshcheniya, 2016. No. 3. P. 18–28 (in Russian).

7. *Landau L.D., Lifcsych E.M.* Teoreticheskaja fizika. Tom 2. Teorija polja.[Theoretical physics. vol. 2. Field Theory]. Moscow, Gos. izd-vo fiz.-mat. Literatury Publ. 1960. 400 p. (in Russian).

8. *Aldoshina I., Pritts R.* Muzykal'naya akustika. [Music Acoustics] SPb.: Kompozitor Publ. 2006. 260 p.